مجله‌ی علمی و پژوهشی شریف
تیر ۱۳۸۷، شماره‌ی چهل و دوم، ص. ۲۲-۲۲

مقایسه‌ی آئرودینامیک پیترز و تئودورسون در تعیین مرزهای ناپایداری آئروالاستیک

حسن حدادپور (دانشیار)
سعید محمودخانی (دانشجوی دکتری)
دانشکده‌ی مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف

haddadpour@sharif.edu
s.mahmoudkhani@yahoo.com

در این مطالعه مرز ناپایداری بال در رژیم جریان تراکم‌ناپذیر با استفاده از آئرودینامیک پیترز استخراج، و نتایج به دست آمده با آئرودینامیک تئودورسون مقایسه شد. بدین‌منظور ابتدا ضریب برا در حوزه‌ی فرکانس برای حرکت رفت و برگشتی خالص نوسانی، و براساس الگوی آئرودینامیکی پیترز، به‌دست آمد. رابطه‌ی به دست آمده از طریق رسم نمودار قسمت حقیقی و موهومی ضریب برا، برحسب فرکانس کاسته‌شده، با مقادیر به دست آمده از فرضیه‌ی تئودورسون مقایسه شد. نمودارهای حاصله بیانگر نزدیک شدن نتایج روش پیترز به روش تئودورسون، از طریق افزایش تعداد متغیرهای حالت آئرودینامیکی است، به‌طوری که با پنج متغیر حالت آئرودینامیکی بین نتایج تطابق قابل قبولی به چشم می‌خورد. در ادامه، روابط مربوط به ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی آئرودینامیکی الگوی پیترز به دست آمد. برای استخراج این ماتریس‌ها از دو روش متداول مقطع معادل و فرض تیر، برای الگوسازی سازه‌ی بال استفاده شد. در پایان با توجه به معادلات دینامیکی به دست آمده از هر دو روش الگوسازی، پایداری و سرعت فلاتر برای دو مثال عددی با استفاده از روش k و $p-k$ مورد بررسی قرار گرفت. مقایسه‌ی نتایج حاصله با مقادیر به دست آمده از فرضیه‌ی تئودورسون حاکی از نزدیکی قابل توجه بین دو فرضیه است.

واژگان کلیدی: جریان تراکم‌ناپذیر، فرضیه پیترز، فرضیه تئودورسون، ناپایداری آیرودینامیکی.

۱. مقدمه

به‌منظور بررسی پدیده‌ی آئروالاستیسیته، نظریه‌های مختلفی برای الگوسازی جریان آئرودینامیک ناپایای حاکم ارائه شده است. الگوهای تحلیلی ارائه شده که به‌طور مرسوم برای جریان تراکم‌ناپذیر توسعه یافته‌اند به‌طور کلی در چهار دسته قرار می‌گیرند.[۱] دسته‌ی اول الگوهای آئرودینامیکی در حوزه‌ی فرکانس هستند که در آنها حرکت سازه و پارامترهای آئرودینامیکی (مانند فشار و گردش[۱] جریان) به‌تناوب در نظر گرفته می‌شوند (e^{ikt}). از جمله الگوهای ارائه‌شده از این نوع می‌توان به الگوی تئودورسون[۲] اشاره کرد که در آن، پاسخ فرکانسی نیروی «برا»ی آئرودینامیکی برای جریان پتانسیل تراکم‌ناپذیر ارائه شده است.[۲] دسته‌ی دوم، الگوهای آئرودینامیکی در حوزه‌ی لاپلاس هستند. استفاده از تبدیل لاپلاس در الگوهای آئرودینامیکی برای اولین‌بار توسط جونز پیشنهاد[۳]، و سیرز از آن برای حل چند مسئله استفاده کرد.[۴] دسته‌ی سوم الگوهای آئرودینامیکی در حوزه‌ی زمان هستند که در آنها از تابع گرین[۳] با انتگرال کانولوشن برای رسیدن به پاسخ در حرکت دلخواه استفاده می‌شود. این الگو اولین بار توسط واگنر مورد استفاده قرار گرفت.[۵] او پاسخ صفحه‌ی تخت را با این روش محاسبه کرد، و در این راه همانند تئودورسون جریان را دوبعدی و تراکم‌ناپذیر در نظر گرفت. دسته‌ی چهارم عبارت است از الگوهای حالات محدود[۴] که این الگوها از امتیازات ویژه‌یی برخوردارند. از جمله این که امکان شبیه‌سازی آئرودینامیک را در فضای حالتی که در برگیرنده‌ی سازه نیز هست فراهم می‌کنند که این امر ترکیب کامل روابط کنترلی و روابط مربوط به سیستم آئروالاستیک و استفاده از آن در مسائل آئروسروالاستیک[۵] را ممکن می‌کند. همچنین این الگوها دست‌یابی صریح[۶] به پاسخ را ممکن می‌سازند و دیگر نیازی به تکرار فرایند نخواهد بود. سومین مزیت این نوع الگوها انعطاف‌پذیری و قابلیت استفاده در هر سه حوزه‌ی زمان، لاپلاس و فرکانس است.

الگوهای حالت محدود انواع مختلفی دارند. روش شبکه‌ی گردابه‌یی[۷] و روش‌های دینامیک سیالات عددی[۸] از جمله‌ی این الگوها هستند که تعداد حالات در آنها برابر با تعداد گره‌های شبکه‌ی گردابه‌ای و تعداد گره‌های الگوی CFD است. ازجمله معایب الگوهای حالت محدود، عدم امکان تفسیر فیزیکی مستقیم است که درنتیجه به‌طور سیستماتیک و سلسله‌مراتبی قابل بهبود نیست.

در دیگر الگوهای حالت محدود که توسط محققان ارائه‌شده[۶ و ۷] از تقریب پد[۹] برای ارائه‌ی الگوی اختلاف محدود تابع آئرودینامیکی برا در حوزه‌ی فرکانس استفاده شده است. الگوی حالت محدود پیترز که در سال ۱۹۹۵ ارائه شد، یکی دیگر از این نوع الگوهاست.[۱]

این الگو بدون فرض حرکت خاصی به دست آمده و برای هر حرکت دلخواه قابل

استفاده است. برخلاف الگوهای شبکه‌ی گردابه‌یی و روش‌های دینامیک سیالات عددی، حالت محدود در این روش به‌جای سرعت درگره‌ها، بسط جریان القا شده و ضرایب به‌صورت صریح به دست می‌آیند. همچنین می‌توان با انتخاب تعداد اندکی حالت محدود به دقت‌های مناسبی رسید. معادلات به دست آمده به‌راحتی قابل ترکیب‌شدن با معادلات سازه‌یی و کنترلی هستند و در حوزه‌های زمان، فرکانس و لاپلاس قابل استفاده‌اند.

در ادامه ضمن معرفی روابط حاکم در الگوی پیترز و با فرض حرکت رفت و برگشتی خالص، «ضریب برا» در حوزه‌ی فرکانس با استفاده از تعداد حالت‌های مختلف به دست آمده و نتیجه‌ی آن با «ضریب برا»ی تئودورسون مقایسه شده است. همچنین پدیده‌ی فلاتر برای آئروفویلی با دو درجه آزادی (حرکت خطی و حرکت پیچشی)، با استفاده از روش‌های مختلف تعیین مرزهای پایداری مورد بررسی قرار گرفته و نتایج با مقادیر به دست آمده از الگوی تئودورسون مقایسه شده است. نتایج نشان‌دهنده‌ی دقت کافی روش اختلاف محدود پیترز است (این دقت تنها با انتخاب پنج حالت محدود به‌دست آمده است).

۲. روابط حاکم

۱.۲. الگوی پیترز در حوزه‌ی زمان

براساس فرضیه‌ی آئرودینامیکی پیترز، و با فرض زوایای حمله‌ی کوچک خواهیم داشت:[۸]

$$\alpha_t = \alpha + \frac{\dot{h}}{U} + \frac{b}{U}\Big(\frac{1}{2} - a\Big)\dot{\alpha} - \frac{\lambda_0}{U} \tag{۱}$$

که در آن α_t زاویه‌ی حمله‌ی معادل براساس بردار نسبی سرعت باد در فاصله‌ی $\frac{3}{4}$ وتر، λ_0 مقدار میانگین جریان القاشده به ایرفویل در جهت عمود بر خط با نیروی «برا»ی صفر، و ab فاصله‌ی محورکشسان از میانه‌ی مقطع بال است. در این حالت نیروی برا و گشتاور آئرودینامیکی با احتساب نیروهای مربوط به جرم جابه‌جا شده‌ی سیال در اثر حرکت ایرفویل به‌صورت رابطه‌های ۲ و ۳ خواهد بود:[۹]

$$L = \pi\rho b^2(\ddot{h} + U\dot{\alpha} - ba\ddot{\alpha}) + 2\pi\rho U b\Big[U\alpha + \dot{h} + b\Big(\frac{1}{2} - a\Big)\dot{\alpha} - \lambda_0\Big] \qquad M_{\frac{1}{4}} = -\pi\rho b^3\Big[\frac{1}{2} \tag{۲}$$

$$\ddot{h} + U\dot{\alpha} + b\Big(\frac{1}{8} - \frac{a}{2}\Big)\ddot{\alpha}\Big] \tag{۳}$$

برای مقدار میانگین جریان القا شده λ_0 با در نظرگرفتن تعداد N حالت جریان القا شده $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ می‌توان نوشت:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} b_n\lambda_n \tag{۴}$$

با قرار دادن مقادیر مختلف λ_n در ماتریسی ستونی $(\boldsymbol{\lambda})$، N معادله‌ی دیفرانسیلی معمولی درجه ۱ به دست خواهد آمد:

$$\mathbf{C}\Big[U\dot{\alpha} + \ddot{h} + b\Big(\frac{1}{2} - a\Big)\ddot{\alpha}\Big] = \boldsymbol{\lambda}\frac{U}{b} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}\mathbf{A} \tag{۵}$$

ماتریس‌های به‌کار رفته در رابطه‌ی ۵ عبارت خواهند بود از:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{d}\mathbf{b}^T + \mathbf{c}\mathbf{d}^T + \frac{1}{2}\mathbf{c}\mathbf{b}^T \tag{۶}$$

که در آن عناصر ماتریس‌های $\mathbf{D}, \mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$D_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{2n} & , n = m + 1 \\ -\frac{1}{2n} & , n = m - 1 \\ 0 & n \neq, m \pm 1 \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} (-1)^{n-1}\frac{(N+n-1)!1}{(N-n-1)!(n!)^2} & , n \neq N \\ (-1)^{n-1} & , n = N \end{cases}$$

$$d_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & , n = 1 \\ 0 & , n \neq 1 \end{cases}$$

$$c_n = \frac{2}{n} \tag{۷}$$

۲.۲. تعیین ضریب برا برحسب فرکانس کاسته با استفاده از فرضیه آئرودینامیکی پیترز (با فرض حرکت خطی نوسانی برای مقطع معادل)

در ادامه، با توجه به روابط استخراج شده توسط پیترز برای بارهای آئرودینامیکی، مقادیر حقیقی و موهومی «ضریب برا» برای حرکت خطی نوسانی[۱۰] $(\alpha = \dot{\alpha} = \ddot{\alpha} = 0, h = \overline{h}e^{i\omega t})$ به‌دست آمده است و درنتیجه معادله‌ی دیفرانسیلی رابطه‌ی ۵ به‌صورت رابطه‌ی ۸ ساده خواهد شد:

$$\mathbf{c}\overline{h}\omega^2 e^{i\omega t} = \boldsymbol{\lambda}\frac{U}{b} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}\mathbf{A} \tag{۸}$$

که جواب خصوصی آن عبارت خواهد بود از:

$$\boldsymbol{\lambda} = \overline{\boldsymbol{\lambda}}e^{i\omega t}$$

$$\overline{\boldsymbol{\lambda}} = -\omega^2\overline{h}(i\omega\mathbf{A} + \frac{U}{b}\mathbf{I})^{-1}\mathbf{c} = -\overline{h}\cdot\frac{U}{b}\Big(\frac{i}{k}\mathbf{A} + \frac{1}{k^2}\mathbf{I}\Big)^{-1}\mathbf{c} \tag{۹}$$

که در آن $k = \frac{\omega b}{U}$ است. با جای‌گذاری مقادیر مؤلفه‌های λ در رابطه‌ی ۴ مقدار λ_0 و از آنجا مقدار نیروی برا از رابطه‌ی ۲ برحسب h به دست می‌آید. در نتیجه برای ضریب برا می‌توان نوشت:

$$C_L = \frac{L}{2\pi\frac{\dot{h}}{U}\frac{1}{2}\rho U^2 2b} = \frac{ki}{2} + 1 + \frac{1}{ki}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} b_n\Big(\frac{i}{k}\mathbf{A} + \frac{\mathbf{I}}{k^2}\Big)^{-1}_{nm} c_m \tag{۱۰}$$

منظور از x^{-1}_{nm} درایه واقع در سطر n ام و ستون m ام معکوس ماتریس x است. رابطه‌ی به دست آمده برای ضریب برا در مقایسه با رابطه‌ی تئودورسون در حرکت خطی نوسانی خالص[۱۰] $(C_l = \frac{ik}{2} + C(k))$ برای Nهای مختلف رسم شده است که در بخش نتایج آمده است.

۳.۲. تعیین ماتریس‌های آئرودینامیکی با استفاده از فرضیه‌ی پیترز برای الگوی مقطع معادل

در الگوسازی بال با استفاده از مقطع معادل دو درجه آزادی، یکی در راستای عمود بر جریان و دیگری پیچش بال در نظر گرفته می‌شود. در این حالت، معادلات دینامیکی

حاکم بر بال به‌صورت رابطه‌ی ۱۱ خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} m & S_\alpha \\ S_\alpha & I_\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} L \\ -M_y \end{bmatrix}=0$$ (۱۱)

که در حوزه‌ی فرکانس طبق رابطه‌ی ۱۲ خواهد بود:

$$-\omega^2\begin{bmatrix} m & S_\alpha \\ S_\alpha & I_\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{h} \\ \overline{\alpha} \end{bmatrix}+i\omega\begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{h} \\ \overline{\alpha} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \overline{L} \\ -\overline{M}_y \end{bmatrix}=0$$ (۱۲)

که:

$$m=\int \mu dx, S_\alpha=\int x\mu dx=mbx_\alpha,$$
$$I_\alpha=\int x^2\mu dx=I_{CG}+mb^2x_\alpha^2$$ (۱۳)

با توجه به سهولت انجام محاسبات در حوزه‌ی فرکانس، قبل از جایگذاری مقادیر مربوط به L و M_y، مقدار λ_0 با فرض حرکت نوسانی ایرفویل ($\alpha=\overline{\alpha}e^{i\omega t}$ و $h=\overline{h}e^{i\omega t}$) با حل معادله‌ی دیفرانسیل ۵ به دست می‌آید:

$$\overline{\boldsymbol{\lambda}}=\Big[(i\omega)U\overline{\alpha}-\omega^2\overline{h}-$$
$$b\Big(\frac{1}{2}-a\Big)\omega^2\overline{\alpha}\Big]\Big(\mathbf{A}\mathbf{i}\omega+\frac{U}{b}\mathbf{I}\Big)^{-1}\mathbf{c}$$ (۱۴)

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\bar{\lambda}_0=\frac{b}{2U}\Big[Ui\Big(\frac{kU}{b}\Big)\bar{\alpha}-\Big(\frac{kU}{b}\Big)^2\bar{h}-$$
$$\Big(\frac{kU}{b}\Big)^2 b\Big(\frac{1}{2}-a\Big)\bar{\alpha}\Big]\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}b_n\Big(\mathbf{A}ki+\frac{U}{b}\mathbf{I}\Big)^{-1}_{nm}c_m$$ (۱۵)

که با استفاده از روابط ۲ و ۳ در حوزه‌ی فرکانس رابطه‌ی ۱۶ حاصل خواهد شد:

$$\begin{vmatrix} \bar{L} \\ -\bar{M}_y \end{vmatrix}=-w^2\pi\rho b^2$$
$$\begin{vmatrix} 1-f(k) & -ba-b\Big(\frac{1}{2}-a\Big)f(k) \\ \frac{b}{2}+b(\frac{1}{2}+a)(f(k))-1) & b^2(a^2+\frac{1}{8})+b^2\Big(\frac{1}{2}-a^2\Big)f(k) \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} \bar{h} \\ \bar{\alpha} \end{vmatrix}+(i\omega)2\pi\rho Ub$$
$$\begin{vmatrix} 1 & b[1-a-\frac{1}{2}f(k)] \\ -b(\frac{1}{2}+a) & b^2[a(-\frac{1}{2}+a)+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+a)f(k)] \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \bar{h} \\ \bar{\alpha} \end{vmatrix}+$$
$$2\pi\rho U^2 b\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b(\frac{1}{2}+a) \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \bar{h} \\ \bar{\alpha} \end{vmatrix}$$ (۱۶)

که در آن $f(k)$ برابر است با:

$$f(k)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}b_n\Big(\mathbf{A}ki+\frac{U}{b}\mathbf{I}\Big)^{-1}_{nm}c_m$$ (۱۷)

با جایگذاری رابطه‌ی ۱۶ در رابطه‌ی ۱۲، معادله‌ی دینامیکی سیستم به دست خواهد آمد:

$$-\omega^2[M+M_a]\overline{x}+i\omega[C+C_a]\overline{x}+[K+K_a]\overline{x}=0,$$
$$\overline{x}=\begin{bmatrix} \overline{h} \\ \overline{\alpha} \end{bmatrix}$$ (۱۸)

در رابطه‌ی ۱۸ ماتریس‌های $\mathbf{M}$ ، $\mathbf{K}$ ، $\mathbf{X}$ ماتریس‌های سازه‌یی، و ماتریس‌های $\mathbf{M}_\alpha$ ، $\mathbf{K}_\alpha$ ، $\mathbf{X}_\alpha$ ماتریس‌های آئرودینامیکی‌اند.

در ادامه، با دست‌یابی به معادله‌ی دینامیکی سیستم و نیز با استفاده از دو روش k و $p-k$ به بررسی فلاتر پرداخته شده که در بخش نتایج آمده است.

۴.۲. تعیین ماتریس‌های آئرودینامیکی با استفاده از فرضیه‌ی پیترز برای الگوی تیر

برای بررسی سیستم با فرض تیر و تعیین ماتریس‌های سازه‌یی و آئرودینامیکی، خیز و پیچش تیر به‌صورت دو مجموع از مودهای خمشی و پیچشی تیر در نظر گرفته شده است:

$$w(y,t)=\sum_{i=1}^{N_w}\eta_i(t)w_i(y), \theta(y,t)=\sum_{i=1}^{N_\theta}\beta_i(t)\theta_i(y)$$ (۱۹)

که در آن θ_i و w_i مودهای پیچشی و خمشی، و N_w و N_θ تعداد آنها هستند. β_i و η_i نیز مختصات تعمیم‌یافته هستند. برای مودهای خمشی و پیچشی تیر یک سرگیردار می‌توان نوشت:

$$\theta_i(y)=\sqrt{2}\sin(\gamma_i y), \gamma_i=\frac{\pi\Big(i-\frac{1}{2}\Big)}{l}$$ (۲۰)

$$w_i=\cosh(\alpha_i y)-\cos(\alpha_i y)-$$
$$\zeta_i\Big[\sinh(\alpha_i y)-\sin(\alpha_i y)\Big]$$ (۲۱)

که $\alpha_i l$ ریشه‌های معادله‌ی زیر هستند:

$$\cos(\alpha l)\cosh(\alpha l)+1=0$$ (۲۲)

متغیر ζ_i نیز از رابطه‌ی زیر به دست خواهد آمد:

$$\zeta_i=\frac{\cosh(\alpha_i l)+\cos(\alpha_i l)}{\sinh(\alpha_i l)+\sin(\alpha_i l)}$$ (۲۳)

که این مقادیر عبارت‌اند از:

$$(\alpha_i l,\zeta_i)=(1.875, 0.734), (4.694, 1.018),$$
$$(7.854, 0.999), ..., \Big(\frac{(2i-1)\pi}{2}, 1\Big)$$ (۲۴)

جمله‌ی آخر در این رابطه برای مقادیر بالای i قابل قبول است. با استفاده از روش مودال و اعمال آن بر معادلات حاکم بر سازه، ماتریس‌های سازه‌یی به‌دست آمده عبارت خواهند بود از:

$$\mathbf{M}_s=\begin{bmatrix} m\mathbf{I} & mbx_a\mathbf{A}^T \\ mbx_a\mathbf{A} & mb^2r^2\mathbf{I} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_s=\begin{bmatrix} \frac{EI}{l^3}\mathbf{B} & 0 \\ 0 & \frac{GJ}{l}\mathbf{T} \end{bmatrix}$$ (۲۵)

که ضرایب به‌کار رفته در آن طبق رابطه‌ی ۲۶ تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{B}_{ii}=(\alpha_i l)^{۴}, B_{ij}=۰\,(i\neq j)$$
$$\mathbf{T}_{ii}=(\gamma_i l)^{۲}, T_{ij}=۰\,(i\neq j)$$
$$\mathbf{A}_{ij}=\frac{۱}{l}\int\theta_i(\overline{y})w_i(\overline{y})dy \qquad (۲۶)$$

$m=\mu l$ جرم بال (μ جرم واحد طول و l طول بال است)، و r شعاع ژیراسیون مقطع بال حول مرکزکشسان آن است. ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی آئرودینامیکی نیز با توجه به روابط ۲ و ۳، و با استفاده از روش مودال در نهایت به‌صورت رابطه‌ی ۲۸ به دست می‌آیند.

۳. بررسی ناپایداری

با توجه به غیرخطی بودن معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم برحسب p ($p=i\omega$)، استفاده از روش k یا روش $p-k$ مناسب است که در این مطالعه برای بررسی پایداری و تعیین سرعت فلاتر، مورد استفاده قرارگرفته‌اند. در روش k میرایی سازه‌یی به‌صورت ضریب ماتریس سختی سیستم در $(۱+ig)$ فرض می‌شود که درنتیجه معادله‌ی دینامیکی سیستم با فرض حرکت نوسانی کامل به‌صورت مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی زیر درمی‌آید:

$$\left[(\mathbf{M}_s+\mathbf{M}_a)\left(\frac{k}{b}\right)^{۲}-\overline{\mathbf{C}}_a\left(\frac{k}{b}\right)i-\overline{\mathbf{K}}_a\right]\overline{q}=$$
$$\mathbf{K}\frac{۱+ig}{U^{۲}}\overline{q} \qquad (۲۷)$$

با انتخاب مقادیر مختلف k، مقادیر g و U به دست خواهند آمد که نقطه‌ی فلاتر متناظر با مقدار $g=۰$ خواهد بود.

با توجه به این که در این روش مقادیر ماتریس‌های آئرودینامیکی به‌ازای مقادیر حقیقی k به‌دست می‌آیند، این روش از پیچیدگی‌های محاسباتی کم‌تری برخوردار است، اما با توجه به فرض حرکت نوسانی کامل و در عین حال در نظرگرفتن میرایی در سیستم، پاسخ‌های به دست آمده برای مقادیر میرایی و فرکانس تنها در نقطه‌ی $g=۰$ معتبر خواهند بود. همچنین از آنجا که بررسی پایداری تنها با انتخاب یک مقدار برای فرکانس k شروع می‌شود و مقدار سرعت مجهول است، این روش نیازمند فرایندی تکراری خواهد بود تا مقدار به دست آمده برای سرعت و عدد ماخ معادل با آن از محدوده‌یی معین، که نظریه‌ی آئرودینامیکی به‌کار رفته تنها در آن محدوده معتبر است، خارج نشود و

$$\mathbf{M_a}=\pi\rho b^{۲}l$$
$$\begin{bmatrix}[۱-f(k)]\mathbf{I} & -b\left[a+\left(\frac{۱}{۲}-a\right)f(k)\right]\mathbf{A^T}\\ -b\left[a-\left(\frac{۱}{۲}+a\right)f(k)\right]\mathbf{A} & b^{۲}\left[\left(a^{۲}+\frac{۱}{۸}\right)+\left(\frac{۱}{۲}-a^{۲}\right)f(k)\right]\mathbf{I}\end{bmatrix},$$
$$\mathbf{C_a}=$$
$$۲\pi\rho Ubl\begin{bmatrix}\mathbf{I} & b\left[۱-a-\frac{۱}{۲}f(k)\right]\mathbf{A}^T\\ -b\left(\frac{۱}{۲}+a\right)\mathbf{A} & -b^{۲}\left[a\left(\frac{۱}{۲}-a\right)-\frac{f(k)}{۲}\left(\frac{۱}{۲}+a\right)\right]\mathbf{I}\end{bmatrix},$$
$$\mathbf{K_a}=$$
$$۲\pi\rho U^{۲}bl\begin{bmatrix}۰ & \boldsymbol{A}^T\\ ۰ & -b\left(\frac{۱}{۲}+a\right)\mathbf{I}\end{bmatrix} \qquad (۲۸)$$

در صورت بروز این حالت، ادامه‌ی بررسی با نظریه‌ی دیگری انجام شود. از این‌رو، برای بررسی پایداری از روشی دیگر معروف به روش $p-k$ استفاده خواهد شد. در این روش بارهای آئرودینامیکی به‌صورت نوسانی کامل و تابعی از k خواهد بود و حرکت سازه به‌صورت نمایی در نظرگرفته می‌شود. در این حالت رابطه‌ی زیر با انتخاب مقدار اولیه برای k, U حل می‌شود.

$$\left|p\mathbf{M}_s+\frac{b^{۲}}{U^{۲}}\mathbf{K}_s-Q(k)\right|=۰ \qquad (۲۹)$$

چنانچه قسمت موهومی یکی از مقادیر به دست آمده برای p برابر با مقدار k باشد، مقادیر به دست آمده برای p معتبر خواهند بود؛ و در غیر این‌صورت رابطه‌ی ۲۸ برای مقادیر دیگری از k حل خواهد شد تا این برابری حاصل شود. در نهایت با رسم قسمت حقیقی p برحسب سرعت (U)، سرعت فلاتر به دست خواهد آمد. با توجه به این که این روش با انتخاب مقادیر اولیه برای k, U شروع می‌شود، برای تحلیل مسائل در محدوده‌ی تراکم‌پذیر وابسته به عدد ماخ نیست. همچنین مقادیر به دست‌آمده برای میرایی و فرکانس معتبرتر از روش k است.

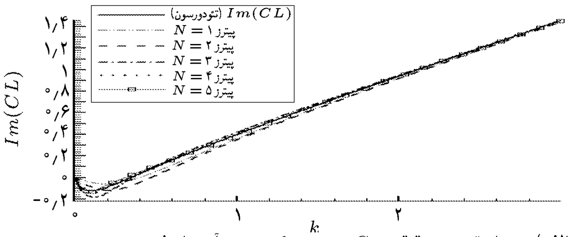
۴. نتایج

در این قسمت نتایج روش به‌کارگرفته شده برای شبیه‌سازی آئرودینامیک در دو بخش آئرودینامیک ناپایا و بررسی ناپایداری آئروالاستیک بررسی خواهد شد.

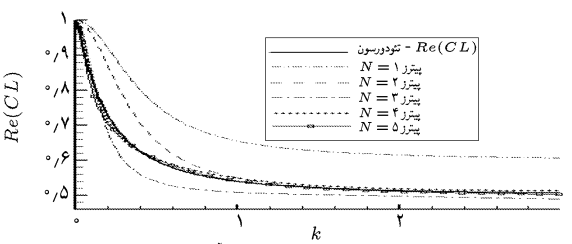
۱.۴. مقایسه‌ی ضریب برا با فرض حرکت خطی نوسانی ایرفویل، با نتایج حاصل از روش پیترز

در این قسمت نمودار ضریب برا، برحسب فرکانس‌کاسته‌شده برای Nهای مختلف رسم شده است. در هر مورد نمودار حاصله با نمودار «ضریب برا»ی حاصل از فرضیه‌ی تئودورسون مقایسه شده است (شکل ۱الف و ۱ب).

همان‌طور که از نمودارهای بالا مشخص است برای حالت $N=۵$، نمودار به دست آمده از هر دو فرضیه مطابقت زیادی با هم دارند. از این‌رو در ادامه‌ی



الف) نمودار قسمت حقیقی C_L برحسب k به‌دست آمده از فرضیه پیترز و تئودورسون؛



ب) نمودار قسمت موهومی C_L برحسب k به‌دست آمده از فرضیه پیترز و تئودورسون.

شکل ۱. مقایسه مقادیر ضریب برا، حاصل از روش تئودورسون و پیترز با تعداد N های مختلف.

مطالعه از این مقدار برای بررسی فلاتر با استفاده از آئرودینامیک پیترز و مقایسه‌ی آن با فرضیه‌ی تئودورسون استفاده شده است.

۲.۴. مقایسه‌ی سرعت فلاتر به دست آمده با استفاده از فرضیه‌ی تئودرسون و پیترز

به‌منظور بررسی فلاتر با فرض الگوی مقطع معادل از یک بال نمونه با مشخصات ارائه شده در جدول ۱ استفاده شده است. نتیجه‌ی به‌دست آمده برای سرعت فلاتر با بارهای آئرودینامیکی پیترز، با مقدار به‌دست آمده با بارهای آئرودینامیکی تئودورسون (جدول ۲)، حاکی از یک همخوانی خوب بین دو فرضیه است.

نمودار مقادیر به دست آمده برای میرایی و فرکانس برحسب سرعت در شکل‌های ۲ و ۳ برای روش‌های k و $p-k$ رسم شده است. نمودارهای حاصله نشان‌دهنده‌ی تطابق نتایج به دست‌آمده از دو فرضیه‌اند. به‌منظور مقایسه‌ی دو فرضیه، سرعت فلاتر برای یک بال سه‌بعدی با طول $l = ۳m$، با استفاده از فرض تیر برای بال محاسبه شده است. مشخصات بال در جدول ۳ آمده است.

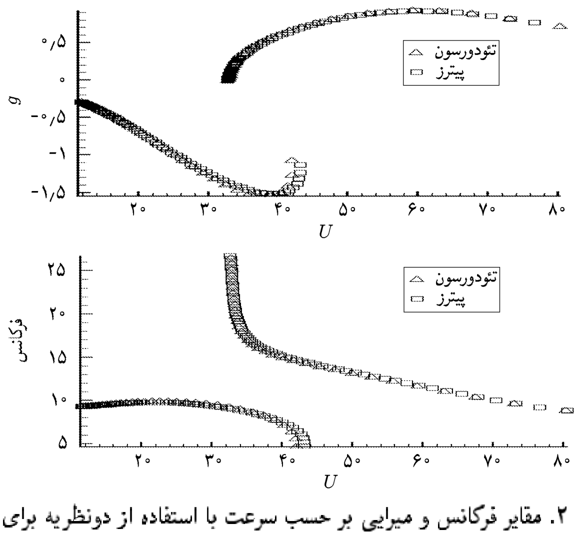
با توجه به جدول ۴، سرعت فلاتر به دست آمده از هر دو فرضیه از نزدیکی قابل قبولی برخوردارند که بار دیگر دقت روش پیترز را اثبات می‌کند. در شکل‌های ۴ و ۵ نمودار مقادیر میرایی و فرکانس به دست آمده از دو فرضیه، با استفاده از روش k و $p-k$ برحسب سرعت رسم شده است که انطباق بالای نتایج دو فرضیه را نشان می‌دهد.

جدول ۱. مشخصات بال نمونه ۱.

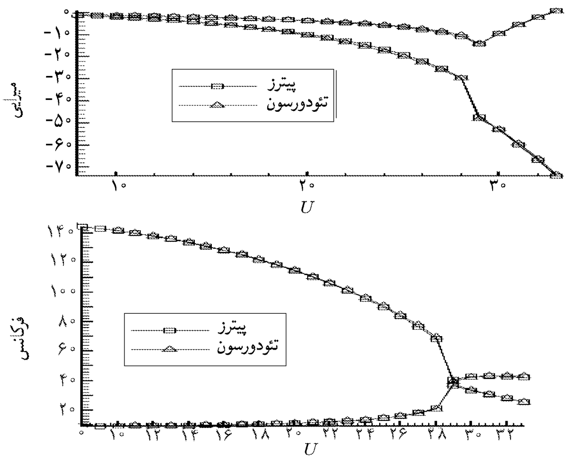
ρ	$۱٫۲۲۵kg/m^۳$	m	$۱۹٫۶kg$
I_a	$۰٫۱۲۶kg/m^۲$	k_h	$۱۹۶۲N/m^۲$
k_θ	$۲۵۶۴N/m^۲$	x_α	۰٫۴
$c = ۲b$	$۱٫۸۳m$	a	$-۰٫۲$

جدول ۲. سرعت فلاتر بال نمونه با فرض مقطع معادل.

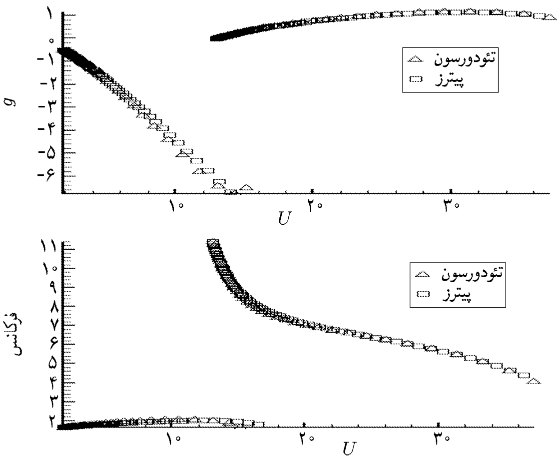
نظریه آئرودینامیکی مورد استفاده	سرعت فلاتر با استفاده از روش p − k	سرعت فلاتر با استفاده از روش (U_F)k
فرضیه تئودورسون	$۳۳(m/s)$	$۳۲٫۷۷(m/s)$
فرضیه پیترز	$۳۳(m/s)$	$۳۲٫۶۴(m/s)$



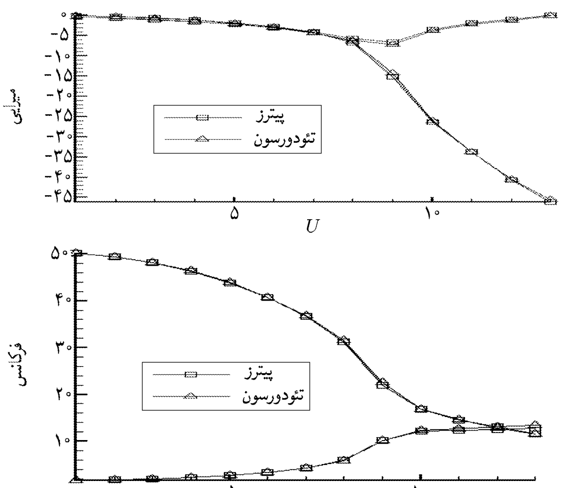
شکل ۲. مقایر فرکانس و میرایی بر حسب سرعت با استفاده از دونظریه برای بال نمونه ۱ (روش k).



شکل ۳. مقایر فرکانس و میرایی بر حسب سرعت با استفاده از دو نظریه برای بال نمونه ۱ (روش $p-k$).



شکل ۴. مقادیر فرکانس و میرایی بر حسب سرعت با استفاده از دونظریه برای بال نمونه ۲ (روش k).



شکل ۵. مقادیر فرکانس و میرایی بر حسب سرعت با استفاده از دو نظریه برای بال نمونه ۲ (روش $p-k$).

جدول ۳. مشخصات بال نمونه‌ی ۲.

ρ	۱/۲۲۵kg/m^3	m	۶/۵۳kg/m
I	۰/۰۴۲kg/m	EI	۱۵۹N/m^2
GJ	۱۰۳۹N/m^2	x_α	۰/۴
$c=$ ۲b	۱/۸۳m	a	−۰/۲

جدول ۴. سرعت فلاتر بال نمونه با فرض تیر.

نظریه آئرودینامیکی مورد استفاده	سرعت فلاتر با استفاده از روش $\mathbf{p-k}$	سرعت فلاتر با استفاده از روش $\mathbf{k}$
فرضیه تئودورسون	۱۴(m/s)	۱۳(m/s)
فرضیه پیترز	۱۴(m/s)	۱۳/۰۲(m/s)

۵. نتیجه‌گیری

ضریب برا در حوزه‌ی فرکانس براساس الگوی آئرودینامیکی پیترز، برای حرکت خطی نوسانی به دست آمد. رابطه‌ی به دست آمده از طریق رسم نمودار قسمت حقیقی و موهومی ضریب برا برحسب k با مقادیر به‌دست آمده از فرضیه‌ی تئودورسون مقایسه شد. نمودارهای حاصله بیانگر افزایش نزدیکی نتایج روش پیترز به روش تئودورسون با افزایش تعداد N است، به‌طوری که برای تعداد $N=$ ۵ تطابق قابل قبولی بین نتایج وجود دارد. در ادامه، روابط مربوط به ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی آئرودینامیکی الگوی پیترز به دست آمد. برای استخراج این ماتریس‌ها از دو روش متداول مقطع معادل و فرض تیر، برای الگوسازی سازه‌ی بال استفاده شد.

در پایان، با توجه به معادلات دینامیکی به دست آمده از هر دو روش الگوسازی، سرعت فلاتر برای دو مثال عددی با استفاده از روش k و $p-k$ محاسبه شد. نتایج حاصله با مقادیر به‌دست آمده از فرضیه‌ی تئودورسون مقایسه شد که نزدیکی قابل توجهی بین دو فرضیه ملاحظه می‌شود.

فهرست علائم

ω: فرکانس حرکت بال و تغییرات بارهای آئرودینامیکی

U: سرعت جریان آزاد یکنواخت

ρ: چگالی جریان آزاد

C_L: ضریب برا

L, M_y: نیرو و گشتاور آئرودینامیکی حول محور کشسان

λ_0: میانگین جریان القا شده

m: جرم بال

t: زمان

M, M_a: ماتریس جرم سازه‌یی و آئرودینامیکی

K, K_a: ماتریس سفتی سازه‌یی و آئرودینامیکی

C_a: ماتریس میرایی آئرودینامیکی

y: فاصله از ریشه بال در راستای طولی بال

w, θ: حرکت پیچشی و خمشی بال با فرض تیر

h, α: حرکت پیچشی و خمشی بال با فرض مقطع معادل

E: مدول کشسانی

G: مدول برشی

l: طول بال

b: نصف اندازه‌ی پهنای بال

I: ممان اینرسی خمشی مقطع تیر

J: ممان اینرسی قطبی مقطع تیر

$\mathbf{I}$: ماتریس همانی

ab: فاصله‌ی میانه‌ی مقطع بال از محور الاستیک

پانوشت

1. vorticity
2. theodorson
3. green's function
4. finite state
5. aero-servo-elastic
6. explicit
7. vortex lattice
8. CFD
9. pade
10. pure plunging

منابع

1. Peters, David A. "Finite state induced flow models", *Journal of Aircraft,* **32**(2), (March-April 1995).
2. Theodorson, T.E., "General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter", *NACA Rept.* **496,** pp. 413-433 (May 1934).
3. Jones, R.T. "Operational treatment of the nonuniform lift theory to airplane dynamics", *NACA TN,* **667,** pp. 347-350 (March 1938).
4. Sears, W.R., "Operational methods in the theory of airfoils in nonuniform motion", *Journal of the Franklin Institute,* **230,** pp. 95-111 (July 1940).
5. Wagner, H. "Ubea die entstehung des dynamichen auftriebs von tragflugeln", *ZAMM, Bd.* **5**(Heft 1), pp. 17-35 (Feb 1925).
6. Vepa, R. "On the use of pade approximants to represent unsteady aerodynamic loads for arbitrarily small motions of wings", AIAA Paper, 76-17, (Jan. 1976).
7. Dowell, E.H., "A simple method for converting frequency domain aerodynamics to the time domain", *NASA TM,* 81844 (Oct 1980).
8. Hodges, D.H. and Pierce, G.A. "Introduction to structural dynamics and aeroelasticity", Cambridge University Press (2002).
9. Bisplinghoff, R.L.; Ashley, H. and Halfman R.L. "Aeroelasticity", Addison-Wesley Publishing Co., Inc. (1955).
10. Katz, J. and Plotkin, A. "Low-speed aerodynamics from wing theory to panel methods",, 2nd edition, Cambridge, New York (2001).