فصلنامه علمی و پژوهشی شریف
تابستان ۱۳۸۴، شماره سی‌ام، ص. ۷-۱۱

توابع فوق مثلثاتی و کاربردهای آن

مرتضی بیات (دانشجوی دکتری)
حسین تیموری‌فعال (کارشناس ارشد)
بهمن مهری (استاد)
مرکز تحصیلات تکمیلیِ علوم پایه‌ی زنجان

با توجه به پیشرفت‌های روز افزون علم در حوزه‌های مختلف، هنوز مطالب لاینحل بسیاری وجود دارد. توسعه‌ی ابزارهای مؤثر در ریاضیات به پیشرفت و گسترش هرچه سریع‌تر علوم دیگر منجر می‌شود. به عنوان مثال، پیدایش توابع مثلثاتی، هذلولی، توابع بیضوی ژاکوبی و همچنین نمایش سری فوریه‌ی یک تابع متناوب، به گسترش علوم دیگر، از جمله فیزیک، مکانیک و مهندسی، انجامیده است.

در این نوشتار توابع مثلثاتی جدیدی به نام «توابع فوق مثلثاتی» را که تعمیم طبیعی توابع مثلثاتی و توابع هذلولی است معرفی خواهیم کرد، و سپس به بررسی خواص و نیز ارتباط آن با توابع مثلثاتی و توابع بیضوی ژاکوبی می‌پردازیم. در پایان به تعدادی از کاربردهای این توابع در حل بعضی از انتگرال‌ها و نیز حل تعدادی معادله‌ی دیفرانسیل غیرخطی و بالاخص معادله‌ی آونگ ساده خواهیم پرداخت.

مقدمه

برای لحظاتی به تعاریف مختلف توابع سینوس و کسینوس، که سال‌ها با آن مواجه بوده‌اید، بیندیشید. توابع مثلثاتی غالباً به‌عنوان نسبت‌هایی از اضلاع مثلث قائم‌الزاویه یا مختصات یک نقطه روی دایره‌ی واحد (یعنی $x^2+y^2=1$) و توابع هذلولی به‌عنوان مختصات یک نقطه روی هذلولی واحد (یعنی $x^2-y^2=1$) تعریف شده‌اند. تعریف دیگر توابع مثلثاتی این است که سینوس و کسینوس را به عنوان معکوسی از توابع انتگرالی زیر

$$u=\int_0^s \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\qquad u=\int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{۱}$$

که به‌ترتیب با $\sin u=s$ و $\cos u=c$ تعریف می‌شود، به دست آوریم. این دو تابع با رابطه‌ی $\sin^2u+\cos^2u=1$ به هم مرتبط می‌شوند. به روش مشابه، توابع هذلولی با توجه به توابع انتگرالی زیر

$$u=\int_0^s \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\qquad u=\int_1^c \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}, \tag{۲}$$

با $\sinh u=s$ و $\cosh u=c$ تعریف می‌شوند و نیز رابطه‌ی $\cosh^2u-\sinh^2u=1$ به هم مرتبط می‌شوند.[1] مشابه دو تعریف اخیر، برای عدد حقیقی k با شرط $0<k<1$، توابع بیضوی ژاکوبی از روی تابع انتگرالی

$$u=\int_0^\theta \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \tag{۳}$$

به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$sn(u)=\sin\theta,\ cn(u)=\cos\theta,\ dn(u)=\sqrt{1-k^2\sin^2x}, \tag{۴}$$

این توابع با روابط $sn^2(u)+cn^2(u)=1$ و $k^2sn^2(u)+dn^2(u)=1$ به هم مرتبط می‌شوند. لازم به ذکر است که توابع بیضوی ژاکوبی توابع دوتناوبی‌اند، یعنی یک دوره‌ی تناوب حقیقی و نیز یک دوره‌ی تناوب مختلط دارند.[2و3]

توابع فوق مثلثاتی

در این بخش توابع فوق مثلثاتی دایره گون و هذلولی گون را معرفی می‌کنیم و سپس به بررسی خواص این توابع می‌پردازیم، و سپس در پایان یک تعبیر هندسی از این توابع ارائه می‌دهیم.

توابع فوق مثلثاتی دایره گون و هذلولی گون

مشابه تعریف توابع بیضوی، با در نظر گرفتن تابع انتگرال زیر

$$u=\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \tag{۵}$$

توابع فوق مثلثاتی دایره گون را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\sin_4(u)=\frac{t}{\sqrt[4]{1+t^4}},\ \cos_4(u)=\frac{1}{\sqrt[4]{1+t^4}},\ \tan_4(u)=t, \tag{۶}$$

این توابع با روابط $\sin_4^4u+\cos_4^4u=1$ و $\tan_4(u)=\dfrac{\sin_4(u)}{\cos_4(u)}$ به هم مرتبط می‌شوند. همچنین توابع فوق مثلثاتی هذلولی‌گون با در نظر

گرفتن تابعِ انتگرالی

$$u=\int_{\frac{1}{t}}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}, \qquad (7)$$

چنین تعریف می‌شود:

$$\sinh_4(u)=\frac{t}{\sqrt[4]{t^4-1}},\quad \cosh_4(u)=\frac{1}{\sqrt[4]{t^4-1}},$$
$$\tanh_4(u)=t, \qquad (8)$$

این روابط با $\cosh_4^4(u)-\sinh_4^4(u)=1$ و $\tanh_4(u)=\frac{\sinh_4(u)}{\cosh_4(u)}$ به هم مرتبط می‌شوند. رابطه‌ی ۵ را می‌توان به صورت سری نوشت. برای این منظور با توجه به بسط نیوتن داریم:

$$(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}=$$
$$1-\frac{2x^4}{4\times 1!}+\frac{2(2+4)x^8}{4^2\times 2!}-\frac{2(2+4)(2+2\times 4)x^{16}}{4^3\times 3!}+\dots, \qquad (9)$$

حال با انتگرال‌گیری از طرفین تساوی ۹ خواهیم داشت:

$$u=t-\frac{2t^5}{5\times 4\times 1!}+\frac{2(2+4)t^9}{9\times 16\times 2!}-\frac{2(2+4)(2+2\times 4)t^{17}}{17\times 4^3\times 3!}+\dots, \qquad (10)$$

به طریق مشابه می‌توان رابطه‌ی ۷ را به صورت سری بیان کرد.

خواص توابع فوق مثلثاتی

با توجه به توابع انتگرالی ۵ و ۷ به سادگی مشاهده می‌شود که $\sin_4(0)=0$، $\cos_4(0)=1$، $\sinh_4(0)=0$ و $\cosh_4(0)=1$، و نیز $\sin_4(-u)=-\sin_4(u)$، $\cos_4(-u)=\cos_4(u)$، $\sinh_4(-u)=-\sinh_4(u)$ و $\cosh_4(-u)=\cosh_4(u)$. اینک نشان می‌دهیم که توابع $\sin_4(u)$ و $\cos_4(u)$ متناوب‌اند. برای این کار دوره‌ی تناوب این توابع را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\frac{\pi_4}{2}=\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \qquad (11)$$

به‌سادگی دیده می‌شود که این انتگرال همگراست و با استفاده از نرم‌افزار میپل مقدار آن برحسب تابع گاما، برابر $\pi^{\frac{3}{2}}/\Gamma(\frac{3}{4})^2$ است که مقدار تقریبی این عدد برابر با ...۳/۷۰۸۱۴ است.

در قضیه‌ی ۱ نشان می‌دهیم که عدد π_4 در واقع نقش عدد π در مثلثات معمولی را بازی می‌کند.

قضیه ۱: توابع $\sin_4(u)$ و $\cos_4(u)$ در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\sin_4(u+\frac{\pi_4}{2})=-\cos_4(u),\qquad \cos_4(u+\frac{\pi_4}{2})=\sin_4(u). \qquad (12)$$

و در نتیجه دوره‌ی تناوب توابع $\sin_4(u)$ و $\cos_4(u)$ عبارت است از $2\pi_4$.

اثبات: با توجه به روابط ۵ و ۱۱ داریم:

$$v=u+\frac{\pi_4}{2}=\int_0^{t}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}+\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}},$$

با اِعمال تغییر متغیر $x=\tan\theta$ داریم:

$$v=\int_0^{\tan^{-1}(t)}\frac{(1+\tan^2\theta)d\theta}{\sqrt{1+\tan^4\theta}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\tan^2\theta)d\theta}{\sqrt{1+\tan^4\theta}},$$

حال با اعمال تغییر متغیر $\phi=\theta+\frac{\pi}{2}$ در انتگرال اول خواهیم داشت:

$$v=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}(t)}\frac{(1+\cos^2\phi)d\phi}{\sqrt{1+\cos^4\phi}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\tan^2\theta)d\theta}{\sqrt{1+\tan^4\theta}}$$

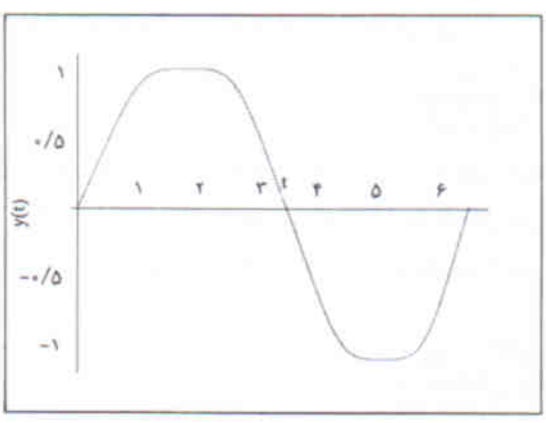
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}(t)}\frac{(1+\tan^2\phi)d\phi}{\sqrt{1+\tan^4\phi}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\tan^2\theta)d\theta}{\sqrt{1+\tan^4\theta}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}(t)}\frac{(1+\tan^2\phi)d\phi}{\sqrt{1+\tan^4\phi}}=\int_0^{\tan(\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}(t))}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}},$$

و با توجه به رابطه‌ی ۶ داریم:

$$\sin_4(u+\frac{\pi_4}{2})=$$
$$\frac{\tan(\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}(t))}{\sqrt{1+\tan^4(\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}(t))}}=\frac{-1}{\sqrt{1+t^4}}=-\cos_4(u).$$

به طریق مشابه داریم $\cos_4(u+\frac{\pi_4}{2})=\sin_4(u)$. بنابراین با توجه به



شکل ۱. نمودار تابع $\sin_4(u)$.

دو رابطه‌ی به دست آمده به سادگی دیده می‌شود که روابط زیر برقرارند:

$$\sin_4(u+\pi_4)=-\sin_4(u),\qquad \sin_4(u+2\pi_4)=\sin_4(u),$$

و در نتیجه دوره‌ی تناوب $\sin_4(u)$ عبارت خواهد بود از $2\pi_4$. تناوبی بودن $\cos_4(u)$ به طریق مشابه بررسی می‌شود. با استفاده از نرم‌افزار میپل و نیز با استفاده از رسم پارامتری اشکال (با پارامتر t) نمودارهای $\sin_4(u)$ در بازه‌ی $[0,2\pi_4]$ رسم شده است (شکل ۱).

تعبیر هندسیِ توابع فوق مثلثاتی

همانند تعریف مقدماتیِ توابع مثلثاتی (یا هذلولی) به‌عنوان یک پارامتر از دایره‌ی واحد $x^2+y^2=1$ (یا هذلولی واحد $x^2-y^2=1$) توابع مثلثاتی را نیز به‌عنوان یک پارامتر از دایره‌گون $x^4+y^4=1$ (یا هذلولی گون واحد $x^4-y^4=1$) تعبیر می‌کنیم. برای این کار خود را به ناحیه‌ی اول صفحه مختصات محدود می‌کنیم. خم‌های اخیر را به صورت زیر پارامتری می‌کنیم:

$$x=\cos_4(u),\quad y=\sin_4(u)$$
$$\text{یا}\ x=\cosh_4(u),\quad y=\sinh_4(u)\ \left(0\le u\le \frac{\pi_4}{2}\right).$$

پارامتر u یک تعبیر هندسی ساده دارد. فرض کنید $area(S_u)$ نشان دهنده‌ی مساحت قطاع محدود به وسیله محور x و شعاع گذرنده از مبدأ مختصات و نقطه $(\cos_4(u),\sin_4(u))$ (یا $(\cosh_4(u),\sinh_4(u))$) و خم $x^4+y^4=1$ (یا $x^4-y^4=1$) باشد. مقدار u را ۲ برابر مقدار $area(S_u)$ تعریف می‌کنیم که با استفاده از انتگرالی همچون انتگرال زیر به دست می‌آید:

$$u=\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos_4^4(u)+\sin_4^4(u)}}\ \left(\text{یا}\ u=\int_0^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{\cos_4^4(u)-\sin_4^4(u)}}\right)$$

مشتق و انتگرال توابع فوق مثلثاتی

در این قسمت درمورد مشتق توابع فوق مثلثاتی بحث می‌کنیم. با توجه به روابط ۵ و ۶ داریم:

$$\frac{d\sin_4(u)}{du}=\frac{d\sin_4(u)}{dt}\times\frac{1}{\frac{du}{dt}}=\frac{1}{\sqrt[4]{(1+t^4)^3}}=\cos_4^3(u).$$

بنابراین قضیه زیر را داریم:

قضیه ۲. مشتق توابع مثلثاتی طبق روابط زیر به دست می‌آید:

$$\frac{d\sin_4(u)}{du}=\cos_4^3(u),\qquad \frac{d\cos_4(u)}{du}=-\sin_4^3(u),$$

$$\frac{d\tan_4(u)}{du}=\frac{1}{\cos_4^2(u)}=\sqrt{1+\tan_4^4(u)},$$
$$\frac{d\sinh_4(u)}{du}=\cosh_4^3(u),\qquad \frac{d\cosh_4(u)}{du}=\sinh_4^3(u),$$
$$\frac{d\tanh_4(u)}{du}=\frac{1}{\cosh_4^2(u)}=\sqrt{1-\tanh_4^4(u)}.\tag{13}$$

اینک تابع معکوس $\sin_4(u)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sin_4^{-1}:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi_4}{2},\frac{\pi_4}{2}\right]$$
$$\sin_4^{-1}(x)=u\Leftrightarrow\sin_4(u)=x$$

معکوس تابع $\tan_4(u)$ از $(-\infty,\infty)$ به $\left(-\frac{\pi_4}{2},\frac{\pi_4}{2}\right)$ تعریف می‌شود. به طریق مشابه با توجه به دامنه و بُرد توابع $\cos_4(u)$، $\tan_4(u)$، $\sinh_4(u)$، $\cosh_4(u)$، و $\tanh_4(u)$ معکوس آنها نیز قابل تعریف است. با توجه به $x=\sin_4(u)$ داریم $\frac{dx}{du}=\cos_4^3(u)$ که این رابطه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{\cos_4^3(u)}=\frac{1}{\sqrt[4]{(1-\sin_4^4(u))^3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{(1-(x^4))^3}}$$

بنابراین:

$$\sin_4^{-1}(x)=u=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}$$

و بنابراین به قضیه‌ی ۳ می‌رسیم.

قضیه‌ی ۳. انتگرال‌های زیر برحسب معکوس توابع فوق مثلثاتی قابل بیان است:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}=\sin_4^{-1}(x),\qquad \int\frac{-dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}=\cos_4^{-1}(x),$$
$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=\tan_4^{-1}(x),\qquad \int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1+x^4)}}=\sinh_4^{-1}(x),$$
$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x^4-1)^3}}=\cos_4^{-1}(x),\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\tanh_4^{-1}(x).\tag{14}$$

ارتباط توابع فوق مثلثاتی دایره‌گون با توابع بیضوی

رابطه‌ی ۵ یک انتگرال بیضوی است. با گرفتن تغییر متغیر $x=\tan\theta$ این انتگرال قابل تبدیل به انتگرال زیر است:

$$u=\int_0^{\tan^{-1}(t)}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2(2\theta)}},\tag{15}$$

حال با تغییر متغیر $\phi=2\theta$ داریم:

$$u=\int_0^{2\tan^{-1}(t)}\frac{d\phi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\phi}},$$

اینک با توجه به تعریف توابع بیضوی و با در نظر گرفتن $\theta=\tan^{-1}(t)$ داریم:

$$\mathrm{sn}(2u)=\sin(2\theta),\qquad \mathrm{cn}(2u)=\cos(2\theta),$$
$$\mathrm{dn}(2u)=\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2(2\theta)}.\tag{16}$$

حال طبق روابط ۶ و ۱۶ و نیز با توجه به اتحادهای زیر

$$\sin^2\theta=\frac{1-\sqrt{1-\sin^2 2\theta}}{2},\qquad \cos^2\theta=\frac{1+\sqrt{1-\sin^2 2\theta}}{2},$$

خواهیم داشت:

$$\sin_4(u)=\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{sn}(u)\mathrm{dn}(u)}{\sqrt{1+\mathrm{cn}^4(u)}},\qquad \cos_4(u)=\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{cn}(u)}{\sqrt{1+\mathrm{cn}^4(u)}}.\tag{17}$$

از آنجا که توابع $\mathrm{sn}(u)$، $\mathrm{cn}(u)$ و $\mathrm{dn}(u)$ توابع دوتناوبی‌اند، نتیجه می‌گیریم که توابع $\sin_4(u)$ و $\cos_4(u)$ نیز توابع دوتناوبی‌اند.

سری توانی توابع فوق مثلثاتی

با توجه به رابطه‌ی ۱۳ به‌سادگی دیده می‌شود که تابع $\sin_4(u)$ در معادله‌ی دیفرانسیل $y'=\sqrt[4]{(1-y^4)^3}$ با شرط اولیه‌ی $y(0)=0$ صدق می‌کند. حال با استفاده از نرم‌افزار میپل سری توانی این تابع به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\sin_4(u)=u-\frac{3}{20}u^5+\frac{19}{480}u^9-\frac{469}{41600}u^{13}+\frac{189611}{56576000}u^{17}-\frac{1157629}{1131520000}u^{21}+\dots,$$

با توجه به رابطه‌ی ۱۳ با تشکیل معادله‌ی دیفرانسیل با شرط اولیه‌ی مناسب قضیه‌ی ۴ را داریم:

قضیه ۴. سری توانی توابع فوق مثلثاتی عبارت‌اند از:

$$\sin_4(u)=u-\frac{3}{20}u^5+\frac{19}{480}u^9-\frac{469}{41600}u^{13}+\frac{189611}{56576000}u^{17}-\frac{1157629}{1131520000}u^{21}+\dots,$$

$$\cos_4(u)=1-\frac{1}{4}u^4+\frac{9}{160}u^8-\frac{149}{9600}u^{12}+\frac{15147}{3328000}u^{16}-\frac{4679969}{3394560000}u^{20}+\dots,$$

$$\tan_4(u)=u+\frac{1}{10}u^5+\frac{1}{120}u^9+\frac{11}{15600}u^{13}+\frac{211}{3536000}u^{17}+\frac{1607}{318240000}u^{21}+\dots,$$

$$\sinh_4(u)=u+\frac{3}{20}u^5+\frac{19}{480}u^9+\frac{469}{41600}u^{13}+\frac{189611}{56576000}u^{17}+\frac{1157629}{1131520000}u^{21}+\dots,$$

$$\cosh_4(u)=1+\frac{1}{4}u^4+\frac{9}{160}u^8+\frac{149}{9600}u^{12}+\frac{15147}{3328000}u^{16}+\frac{4679969}{3394560000}u^{20}+\dots,$$

$$\tanh_4(u)=u-\frac{1}{10}u^5+\frac{1}{120}u^9-\frac{11}{15600}u^{13}+\frac{211}{3536000}u^{17}-\frac{1607}{318240000}u^{21}+\dots,$$

کاربردها

در این جا به دو کاربرد از توابع فوق مثلثاتی در حل بعضی از انتگرال‌های نامعین و نیز حل معادله‌ی آونگ می‌پردازیم.

حل چند انتگرال به کمک توابع فوق مثلثاتی

در این جا به ذکر دو نمونه از انتگرال که به کمک توابع فوق مثلثاتی حل می‌شود می‌پردازیم:

مثال ۱. مقدار انتگرال نامعین $\int\cos_4^2(u)du$ را به دست آورید.

حل. بافرض اینکه $I=\int\cos_4^2(u)du$، داریم:

$$I=\int\frac{d\sin_4(u)}{\sqrt[4]{1-\sin_4^4(u)}},$$

حال با تغییر متغیر $x=\sin_4(u)$، خواهیم داشت:

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}.$$

با استفاده از نرم‌افزار میپل (یا جدول انتگرال) انتگرال زیر را داریم:

$$\int\frac{dt}{1+t^4}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1+t\sqrt{2}+t^2}{1-t\sqrt{2}+t^2}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{1-t\sqrt{2}}{1-t^2}\right),$$

حال اگر در انتگرال اخیر $t=\tan_4(u)$ باشد و سپس $\tan_4(u)$ را برحسب $\sin_4(u)$ بیابیم و فرض کنیم که $x=\sin_4(u)$، خواهیم داشت:

$$t=\tan_4(u)=\frac{\sin_4(u)}{\cos_4(u)}=\frac{x}{\sqrt[4]{1-x^4}},$$

پس داریم:

$$\int \frac{dt}{1+t^4} = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}},$$

بنابراین با توجه به $x=\sin_4(u)$ داریم:

$$\int \cos_4^2(u)du = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln[1+2\sqrt{2}x\sqrt[4]{(1-x^4)^3}+4x^2\sqrt{1-x^4}$$
$$+2\sqrt{2}x^3\sqrt[4]{1-x^4}]+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}x\sqrt[4]{1-x^4}}{\sqrt{1-x^4}-x^2}\right].$$

مثال ۲. مقدار انتگرال $\int \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}$ را برحسب توابع مثلثاتی به دست آورید.

حل. داریم:

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}} = 2\int \frac{d\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}},$$

اگر زیرِ داخلِ رادیکالِ طرفِ دومِ تساوی اخیر را در $\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}=1$ ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}} = 2\int \frac{d\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^4\frac{\theta}{2}-\sin^4\frac{\theta}{2}}} \int \frac{d\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-\tan^4\frac{\theta}{2}}},$$

حال با توجه به رابطه‌ی ۱۴ داریم:

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}} = 2\tanh_4^{-1}\left[\tan\frac{\theta}{2}\right]. \qquad (18)$$

معادله‌ی آونگ

آونگ ساده شامل جرم m است که به میله‌ی صلبی (از جرم میله صرف نظر شده است) به طول l متصل است. فرض می‌کنیم میله از نقطه‌ی ثابت O آویزان شده است. معادله‌ی دیفرانسیل حرکت جرم m به صورت زیر است:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0 \quad (\theta(t_0)=\frac{\pi}{2},\ \theta'(t_0)=0). \qquad (19)$$

با ضرب طرفین معادله در θ' و گرفتن انتگرال از طرفین معادله خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{d\theta}{dt}\right]^2-\frac{g}{l}\cos\theta=c_1, \qquad (20)$$

با اِعمال شرط اولیه $\theta'(t_0)=0$ در معادله‌ی ۲۰ نتیجه می‌گیریم که $c_1=0$. بنابراین،

$$\frac{1}{2}\left[\frac{d\theta}{dt}\right]^2-\frac{g}{l}\cos\theta=0, \quad (\text{یا } dt=\sqrt{\frac{1}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}). \qquad (21)$$

حال با انتگرال‌گیری از طرفین معادله‌ی ۲۱ و اِعمال شرط $\theta(t_0)=\frac{\pi}{2}$ داریم:

$$\sqrt{\frac{2g}{l}}t+c_2=2\tanh_4^{-1}(\tan\frac{\theta}{2}) \text{ و } c_2=\tanh_4^{-1}(1)-\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2g}{l}},$$

که در آن

$$\tanh_4(1)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}\approx\frac{1/311028}{2}$$

اینک معادله‌ی زیر را برای θ برحسب t به دست می‌آوریم:

$$\theta=2\tan^{-1}[\tanh_4(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2g}{l}}t-\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{2g}{l}}+\frac{1/311028}{2})].$$

نتیجه‌گیری

همان‌گونه که توابع مثلثاتی و توابع هذلولی نقش کلیدی در توسعه حوزه‌های مختلف علوم به عهده دارند، آشنایی با توابع فوق مثلثاتی نیز می‌تواند چنین جایگاهی را در حوزه‌های مختلف علوم ایجاد کند. البته بایستی گفت که این توابع را می‌توان روی خط‌های کلی‌تر مانند $x^{2n}+y^{2n}=1$ برای عدد طبیعی n، نیز تعریف کرد و نتایج جالب‌تری از آنها استخراج کرد. کاربردهای اساسی این توابع در حل معادلات دیفرانسیل و بالاخص یافتن جواب‌های تناوبی به کمک این توابع می‌باشد.

منابع

1. Lindqvist. P. and Peetre, J., "Two remarkable identities called twos for inverses to some abelian integrals", *Amer. Math. Monthly* , **108,** pp 403-410 (2001).
2. Meyer, K.R., "Jacobi elliptic functions from a dynamical systems point of view", *Amer. Math. Monthly,* **108,** pp 729-737 (2001).
3. Cayley, A., "An elementary treatise on elliptic functions", New York, Dover Publications (1895).