

تحلیل ارتعاشات آزاد دیسک حلقوی به روش مدار معادل الکترومکانیکی

حسن نحوی* (دانشیار)

نیما نوری (دانشجوی کارشناسی ارشد)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

مهندسی مکانیک شریف
دوری ۳-۲۸، شماری ۱، ص. ۹۳-۸۷، (پادداشت فنی)

در این نوشتار ارتعاشات پیچشی و شعاعی دیسک‌های حلقوی ایزوتروپیک با تغییرات خطی ضخامت در راستای شعاعی و با استفاده از روش مدار الکترومکانیکی معادل و توابع بسل حل شده است. به کمک این مدار، فرکانس‌های طبیعی و روابط آن برای ارتعاشات پیچشی و شعاعی و همچنین ضرایب بزرگ‌نمایی (نسبت دامنه سرعت) آن به دست آمده است. سپس تغییرات فرکانس‌های طبیعی و ضرایب بزرگ‌نمایی نسبت به تغییرات پارامترهای هندسی، از جمله شعاع داخلی و خارجی، مورد بحث قرار گرفته است. در ادامه، شکل مودها و فرکانس‌های طبیعی دیسک از نرم‌افزار اجزاء محدود استخراج و با نتایج حاصل از روش مدار معادل مکانیکی مقایسه شده است. هم‌خوانی خوبی بین این نتایج مشاهده شده است. روش مطرح شده در این نوشتار به عنوان یک الگوریتم حل برای بررسی ارتعاشات دیسک‌ها با ضخامت متغیر نیز قابل استفاده است.

hnahvi@cc.iut.ac.ir
n.nouri@me.iut.ac.ir

واژگان کلیدی: ارتعاشات، دیسک حلقوی، مدار الکترومکانیکی.

مقدمه

که پیدا کردن جواب دقیق تحلیلی برای دیسک‌های حلقوی با ضخامت متغیر بسیار مشکل است. این در حالی است که در بعضی موارد خاص حل‌های تحلیلی دقیق قابل دست‌یابی است؛ مانند تغییرات ضخامت به صورت پله‌یی، نمایی و خطی. با این وجود روش‌های مذکور برای یافتن فرکانس طبیعی بسیار پیچیده‌اند.^[۱-۱۱] در این مقاله از تکنیک مدار الکترومکانیکی معادل برای تحلیل ارتعاشات آزاد دیسک‌های نازک حلقوی با مقطع مخروطی استفاده شده است. محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات شعاعی و پیچشی و شکل مودهای متناظرشان به کمک مدارهای معادل ممکن شده است. رابطه‌ی بین ابعاد هندسی و فرکانس‌های طبیعی نیز مورد بررسی قرار گرفته است. روش جدید ارائه شده به لحاظ محاسباتی ساده‌تر از روش‌های مورد استفاده‌ی قبلی است و نتایج آن هم‌خوانی قابل قبولی با نتایج FEM دارد. همچنین این روش برای آنالیز ارتعاشی صفحات حلقوی با مقطع نمایی یا پله‌یی نیز قابل استفاده است.

ارتعاشات پیچشی دیسک‌های حلقوی با مقطع مخروطی

مقطع دیسک حلقوی در شکل ۱ نمایش داده شده است. در این تصویر r و Z به ترتیب مختصات شعاعی و محوری‌اند. در محاسبات از مختصات استوانه‌یی استفاده شده است. با فرض کم بودن ضخامت دیسک (یعنی $h_b \propto r_b$)، تنش و کرنش در راستای محوری قابل اغماض است. بنابراین ارتعاشات دیسک (صفحه) حلقوی را می‌توان تقارن محوری فرض کرد. معادله‌ی ارتعاشات پیچشی با ضخامت

صفحات با اشکال، ابعاد و ضخامت‌های متفاوت و با شرایط مرزی گوناگون نقش مهمی را در زمینه‌هایی چون هوافضا، دریانوردی، مهندسی مکانیک، صنایع نفت و پتروشیمی، حمل‌ونقل، و مهندسی برق ایفا می‌کنند. برای مثال از صفحات حلقوی نازک برای متمرکز کردن انرژی، بزرگ‌نمایی سرعت و جابه‌جایی، جوشکاری فلزات و پلاستیک، ماشین‌کاری فوق صوت و کشش سرد مافوق صوت لوله استفاده می‌شود. همچنین در طراحی میل‌های سوپرسونیک و کنترل ارتعاشات و صوت در زیر آب، ارتعاشات شعاعی و پیچشی دیسک‌های حلقوی کاربرد گسترده‌ی دارد. تاکنون تحقیقات زیادی برای تخمین فرکانس طبیعی صفحات با دیسک‌های حلقوی با بستر کشسان انجام شده است. برای مثال ارتعاشات صفحه‌یی که به صورت عمودی با بستر کشسان احاطه شده قابل دسترسی است.^[۱] لیسا ثابت کرده که بستر وینکله‌ر صرفاً باعث افزایش فرکانس طبیعی صفحه به اندازه‌ی ضریبی ثابت می‌شود. ارتعاشات آزاد صفحه با ضخامت متغیر با روش‌های مختلفی حل شده است. بدین منظور بیشتر محققین از روش تقریبی ریتز استفاده کرده‌اند و به بررسی مواردی چون ارتعاشات دیسک با تغییرات ضخامت دوخطی، نمایی و تغییرات غیر یکنواخت پرداخته‌اند.^[۲-۴] ارتعاشات شعاعی و پیچشی دیسک‌های نازک حلقوی به کمک ماتریس انتقال نیز حل شده است.^[۵-۶] دیفرانسیل مرتبه چهار (DQ) و دیفرانسیل هارمونیک مرتبه چهار (HDQ) را می‌توان برای حل کماتش و ارتعاشات دیسک‌های ضخیم و ارتعاشات دیسک‌هایی با ضخامت غیر یکنواخت و متغیر به کار برد.^[۷-۹] محققین دریافته‌اند

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۸۹/۴/۱۲، اصلاحیه ۱۳۸۹/۱۰/۲۶، پذیرش ۱۳۸۹/۱۲/۱۸.

(معادله ۷) به دست آورد:

$$\begin{cases} M_a = -\frac{G}{r_i \omega} \cdot S_a \cdot a \left[-1 + \frac{r_a (Y'_a J_b - J'_a Y_b)}{J_b Y_a - J_a Y_b} \right] \varphi_a \\ -\frac{G}{r_i \omega} \cdot S_a \cdot a \left[\frac{a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} (J_a Y'_a - J'_a Y_b)}{J_b Y_a - J_a Y_b} \right] \varphi_b \\ M_b = -\frac{G}{r_i \omega} \cdot S_b \cdot b \left[-1 + \frac{r_a (Y'_b J_a - J'_b Y_a)}{J_b Y_a - J_a Y_b} \right] \varphi_b \\ -\frac{G}{r_i \omega} \cdot S_b \cdot b \left[\frac{a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} (J_b Y'_b - J'_b Y_a)}{J_b Y_a - J_a Y_b} \right] \varphi_a \end{cases} \quad (7)$$

که در آن $J'_a, J'_b, Y'_a, Y'_b, S_b = 2\pi b h_b, S_a = 2\pi a h_a$ به ترتیب دیرانسیل J_a و J_b, Y_a, Y_b برحسب شعاع هستند. به عبارت دیگر:

$$\begin{aligned} J'_a &= \left(\frac{d}{dr} \right) \left[J_{\frac{r}{2}}(k_t r) \right] \Big|_{r=a}, \quad J'_b = \left(\frac{d}{dr} \right) \left[J_{\frac{r}{2}}(k_t r) \right] \Big|_{r=b}, \\ Y'_a &= \left(\frac{d}{dr} \right) \left[Y_{\frac{r}{2}}(k_t r) \right] \Big|_{r=a}, \quad Y'_b = \left(\frac{d}{dr} \right) \left[Y_{\frac{r}{2}}(k_t r) \right] \Big|_{r=b} \end{aligned} \quad (8)$$

با معرفی دو تابع $M_b^* = \frac{r M_b k_t (J_b Y_a - J_a Y_b)}{\rho c_t S_b}$ و $M_a^* = \frac{r M_a k_t (J_b Y_a - J_a Y_b)}{\rho c_t S_a}$ و با توجه به خواص توابع بسل می توان نوشت:

$$b(J_b Y'_b - J'_b Y_b) = a(J_a Y'_a - J'_a Y_b) = \frac{\pi}{r}$$

معادله ۷ را نیز می توان به صورت معادله ۹ ساده کرد:

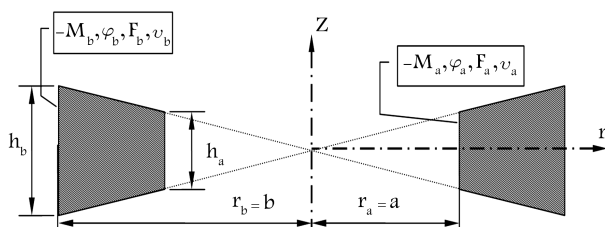
$$\begin{cases} M_b^* = (Z_{1t} + Z_{rt}) \varphi_b + Z_{rt} \varphi_a \\ M_a^* = (Z_{rt} + Z_{rt}) \varphi_a + Z_{rt} \varphi_b \end{cases} \quad (9)$$

که در آن Z_{rt}, Z_{rt}, Z_{1t} امپدانس های مکانیکی معادل برای ارتعاشات پیچشی اند:

$$\begin{cases} Z_{1t} = i b (J_b Y_a - J_a Y_b) + i 2 b^{\frac{1}{2}} (Y'_b J_a - J'_b Y_a) - Z_{rt} \\ Z_{rt} = -i a (J_b Y_a - J_a Y_b) + i 2 a^{\frac{1}{2}} (Y'_a J_b - J'_a Y_b) - Z_{rt} \\ Z_{rt} = i \pi a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (10)$$

مفهوم فیزیکی پارامترهای الکتریکی و مکانیکی متفاوت از یکدیگرند ولی بعضی از آن ها روابط ریاضی یکسانی دارند. تحلیل های الکترومکانیکی روشی را برای بررسی مسائل مکانیکی و صوتی به کمک روش های مورد استفاده در مهندسی برق در اختیار ما می گذارند که حل معادلات را ساده تر می کنند. [۱۲] از این روش می توان در محاسبه ی فرکانس طبیعی میدل فوق صوت، با محاسبه ی فرکانس تشدید مدار آن، بهره جست. بنابر نظریه ی الکترومکانیکی، مدار معادل صفحه ی حلقوی با مقطع مخروطی را می توان مانند شکل ۲ ارائه کرد، که در آن φ معادل جریان الکتریکی و M^* معادل اختلاف پتانسیل است. معادلات ۹ همان معادلات ولتاژ کیرشهف برای حلقه های نشان داده شده اند.

تعیین امپدانس مکانیکی معادل بارگذاری های واقعی در ترمینال های متمرکزکننده عملاً کاری بسیار دشوار است. بنابراین باید از معادله ی فرکانسی که در آن از امپدانس مکانیکی بارگذاری صرف نظر شده، استفاده کرد. در تحلیل فوق، استهلاک مکانیکی موجود در صفحه در نظر گرفته نمی شود؛ همچنین در حالتی که امپدانس مکانیکی بارگذاری وجود نداشته باشد (برای تحلیل ارتعاشات آزاد) و با توجه به شکل ۲،



شکل ۱. تصویر نیم برش دیسک حلقوی با مقطع با تغییرات خطی.

متغیر را می توان چنین بیان کرد: [۶]

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dr} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right) - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r h} \frac{dh}{dr} \right) \phi = \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (1)$$

که در آن $h = h(r)$ ضخامت دیسک در راستای محوری است. تنش برشی روی صفحات دیسک عبارت است از:

$$T_t = G r \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (2)$$

چنانچه تابع ضخامت به صورت $h(r) = h_0$ بیان شود -- h_0 عددی ثابت است -- صفحه ی حلقوی اصطلاحاً مخروطی نامیده می شود. برای ارتعاشات هارمونیک، جابه جایی دورانی (زاویه یی) را با $\phi = \phi_0 \cdot e^{i\omega t}$ بیان می کنند. با جایگزینی در معادله ی ۲ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi_0}{\partial r} + \left(k_t^2 - \frac{1}{r^2} \right) \phi_0 = 0 \quad (3)$$

که در آن ϕ_0 دامنه ی ارتعاشات پیچشی است. معادله ی ۳ یک معادله ی بسل (ضمیمه) از مرتبه ی ۳/۲ است. با استفاده از فرض ارتعاشات هارمونیک و حل معادله ی ۳ عبارت ۴ حاصل می شود:

$$\phi = r^{-\frac{1}{2}} \left[A \cdot J_{\frac{r}{2}}(k_t r) + B \cdot Y_{\frac{r}{2}}(k_t r) \right] e^{i\omega t} \quad (4)$$

که در آن A و B ثابت اند و $J_{\frac{r}{2}}(k_t r)$ و $Y_{\frac{r}{2}}(k_t r)$ به ترتیب توابع نوع اول و دوم بسل از مرتبه ی ۳/۲ هستند. سرعت زاویه یی را می توان طبق معادله ی ۵ محاسبه کرد:

$$\varphi = \frac{\partial \phi}{\partial t} = i \omega r^{-\frac{1}{2}} \left[A \cdot J_{\frac{r}{2}}(k_t r) + B \cdot Y_{\frac{r}{2}}(k_t r) \right] e^{i\omega t} \quad (5)$$

با توجه به اندازه ی سرعت های زاویه یی مرزی $\left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{r=a} = \varphi_a$ و $\left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{r=b} = -\varphi_b$ مقادیر ثابت های A و B چنین محاسبه می شوند:

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{\omega} \cdot \frac{b^{\frac{1}{2}} Y_a \varphi_b + a^{\frac{1}{2}} Y_b \varphi_a}{(J_b Y_a - J_a Y_b)} \\ B = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{b^{\frac{1}{2}} J_a \varphi_b + a^{\frac{1}{2}} J_b \varphi_a}{(J_b Y_a - J_a Y_b)} \end{cases} \quad (6)$$

در معادله ی ۶، $J_a = J_{\frac{r}{2}}(k_t a)$ ، $J_b = J_{\frac{r}{2}}(k_t b)$ ، $Y_a = Y_{\frac{r}{2}}(k_t a)$ و $Y_b = Y_{\frac{r}{2}}(k_t b)$ اما با توجه به شرایط مرزی گشتاور $M|_{r=a} = a T_t|_{r=a} S_a = -M_a$ می توان $M|_{r=b} = b T_t|_{r=b} S_b = -M_b$ و

در صورتی که سطح مقطع دیسک را مخروطی فرض کنیم، معادله ی ۱۴ را می توان چنین ساده کرد:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} - \frac{1-v}{r^2} \xi = \frac{1}{c_r^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (16)$$

با فرض هارمونیک بودن ارتعاشات داریم:

$$\xi = [C \cdot f(r) + D \cdot g(r)] e^{i\omega t} \quad (17)$$

که در آن A و B اعدادی ثابت و f و g دوتابع ۱۸ خواهند بود.

$$\begin{cases} f(r) = r^{-\frac{1}{2}} J_\alpha(k_r r) \\ g(r) = r^{-\frac{1}{2}} Y_\alpha(k_r r) \end{cases} \quad (18)$$

که در آن $J_\alpha(k_r r)$ و $Y_\alpha(k_r r)$ به ترتیب توابع از نوع اول و دوم بسل و از مرتبه ی α هستند و $\alpha = \sqrt{\frac{b}{r} - v^2}$ است. از معادله ی ۱۷ می توان سرعت شعاعی را محاسبه کرد:

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} = i\omega [C \cdot f(r) + D \cdot g(r)] e^{i\omega t} \quad (19)$$

با توجه به شرایط مرزی سرعت ارتعاشات شعاعی $v_b = \frac{\partial \xi}{\partial r}|_{r=b}$ و $v_a = \frac{\partial \xi}{\partial r}|_{r=a}$ و نیز نیروهای شعاعی $T_r|_{r=a} S_a = -F_a$ و $T_r|_{r=b} S_b = -F_b$ می توان ثابت های C و D را محاسبه و سپس F_a و F_b را به صورت تابعی از v_a و v_b نوشت:

$$\begin{cases} F_b^* = \frac{F_a k_r}{\rho c_r S_a [G(a)f(a) - F(b)g(a)]} = (Z_{1r} + Z_{2r}) v_b + Z_{2r} v_a \\ F_a^* = \frac{F_b k_r}{\rho c_r S_b [G(b)f(b) - F(a)g(b)]} = (Z_{1r} + Z_{2r}) v_a + Z_{2r} v_b \end{cases} \quad (20)$$

که در آن Z_{1r} ، Z_{2r} و Z_{3r} امپدانس های الکترومکانیکی ارتعاشات شعاعی اند:

$$\begin{cases} Z_{1r} = \frac{F(b)[g(a)-g(b)]-G(b)[f(a)-f(b)]}{g(b)F(b)-f(b)G(b)} Z_{2r} \\ Z_{2r} = \frac{F(a)[g(b)-g(a)]-G(a)[f(b)-f(a)]}{g(a)F(a)-f(a)G(a)} Z_{3r} \\ Z_{3r} = i \frac{1}{f(a)g(b)-f(b)g(a)} \end{cases} \quad (21)$$

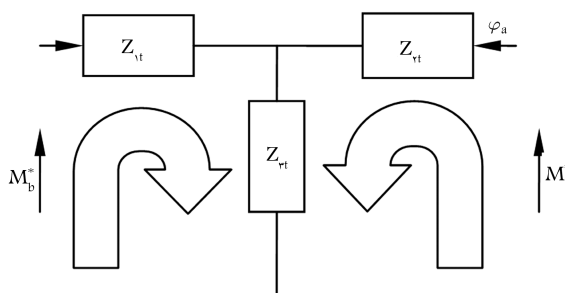
در این معادلات داریم:

$$\begin{aligned} f(a) &= f(r)|_{r=a}, & f(b) &= f(r)|_{r=b} \\ g(a) &= g(r)|_{r=a}, & g(b) &= g(r)|_{r=b} \\ F(a) &= F(r)|_{r=a}, & F(b) &= F(r)|_{r=b} \\ G(a) &= G(r)|_{r=a}, & G(b) &= G(r)|_{r=b} \end{aligned} \quad (22)$$

که در آن ها F ، G براساس روابط ۲۳ به دست می آیند.

$$\begin{cases} F(r) = \frac{df(r)}{dr} + \frac{v}{r} f(r) \\ G(r) = \frac{dg(r)}{dr} + \frac{v}{r} g(r) \end{cases} \quad (23)$$

مدار معادل الکترومکانیکی ارتعاشات شعاعی مانند شکل ۲ است با این تفاوت که جای متغیرهای Z_{1t} ، Z_{2t} ، Z_{3t} ، M_a^* و M_b^* به ترتیب M_a^* ، M_b^* ، φ_a ، φ_b ، Z_{1t} ، Z_{2t} ، Z_{3t}



شکل ۲. مدار معادل دیسک حلقوی با مقطع مخروطی.

معادله ی فرکانس طبیعی پیشگی عبارت خواهد بود از:

$$Z_{1t} + \frac{Z_{2t}Z_{3t}}{Z_{2t} + Z_{3t}} = 0 \quad (11)$$

تمامی متغیرهای معادله ی ۱۱ برحسب سختی پیشگی k_t است و با حل این معادله برای یافتن k_t و با در نظر گرفتن ارتباط بین این متغیر و سرعت موج c_t می توان فرکانس طبیعی را به دست آورد:

$$f_t(n) = \frac{k_t(n)}{2\pi} \sqrt{\frac{E}{2(1+v)\rho}} \quad (12)$$

در معادله ی ۱۲، n یک عدد صحیح و مثبت است و $n=1$ اولین فرکانس طبیعی را نشان می دهد. از معادله ی ۱۱ و مقادیر Z_{1t} ، Z_{2t} ، Z_{3t} می توان دریافت که وقتی پارامترهای مادی E ، ρ و σ مشخص اند، k_t وابسته به a (شعاع داخلی) و b (شعاع خارجی) است و در نتیجه فرکانس طبیعی نیز به a و b وابسته است.

پارامتر مهم دیگر که در ارتعاشات پیشگی صفحه ی حلقوی مؤثر است، مقدار بزرگنمایی دامنه ی ارتعاشات (نسبت دامنه ی ارتعاشات شعاع داخلی به خارجی) پیشگی است. با توجه به شکل ۲ داریم:

$$M_t = \left| \frac{\phi_a}{\phi_b} \right| = \left| \frac{\varphi_a}{\varphi_b} \right| = \left| \frac{Z_{2t}}{Z_{2t} + Z_{3t}} \right| \quad (13)$$

در صورت مشخص بودن پارامترهای مادی E ، ρ و σ و پارامترهای هندسی a و b ، مقدار k_t از معادله ی ۱۲ قابل محاسبه است. با جایگذاری متغیرها در معادله ی ۱۳ می توان مقدار بزرگنمایی M_t را محاسبه کرد. از محاسبات عددی می توان دریافت که M_t منحصرأ وابسته به نسبت شعاع خارجی به داخلی است.

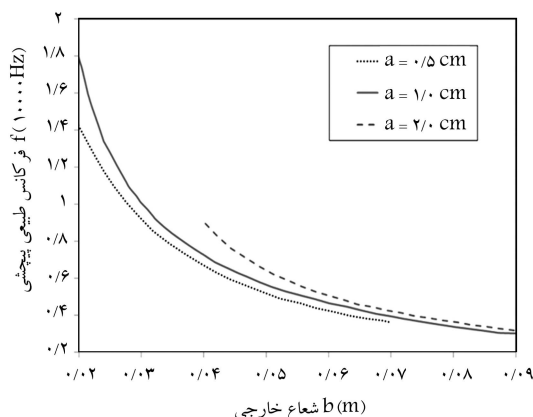
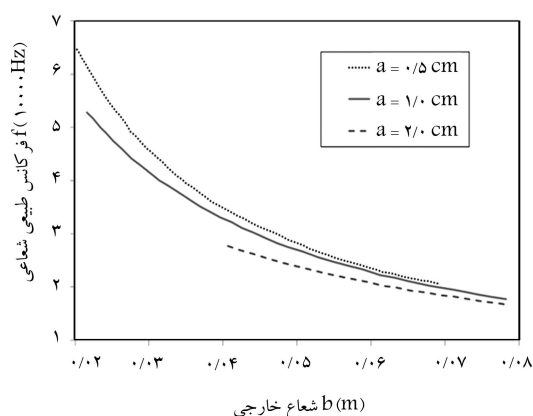
ارتعاشات شعاعی دیسک های حلقوی با مقطع مخروطی

ارتعاشات شعاعی نیز از قابلیت مدل سازی به صورت تقارن محوری برخوردارند. برای ارتعاشات شعاعی، به جای φ و M در شکل ۱، به ترتیب از متغیرهای v و F استفاده می شود. ارتعاشات شعاعی دیسک (صفحه) حلقوی با ضخامت متغیر براساس معادله ی ۱۴ محاسبه می شود: [۶]

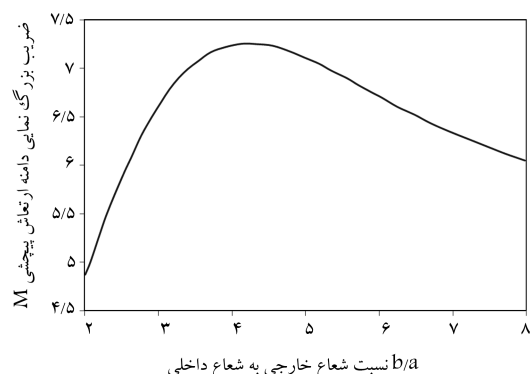
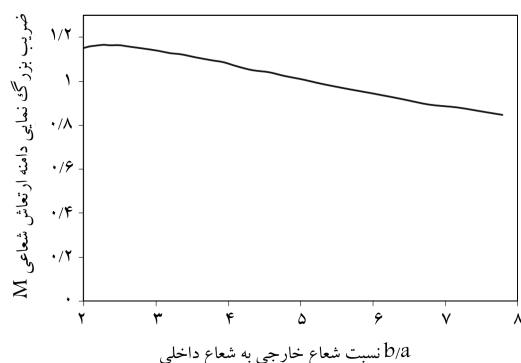
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{h} \cdot \frac{dh}{dr} \right) \frac{\partial \xi}{\partial r} - \left(\frac{1}{r^2} - \frac{v}{rh} \cdot \frac{dh}{dr} \right) \xi = \frac{1}{c_r^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (14)$$

تنش شعاعی دیسک نیز عبارت خواهد بود از:

$$T_r = \frac{E}{1-v^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + v \frac{\xi}{r} \right) \quad (15)$$



شکل ۳. نمودارهای تغییرات فرکانسهای طبیعی برحسب تغییرات شعاع خارجی.



شکل ۴. نمودارهای تغییرات ضریب بزرگنمایی برحسب تغییرات نسبت شعاع خارجی به شعاع داخلی.

F_a^* و F_b^* عوض شده است؛ معادله‌ی ارتعاشات شعاعی مانند حالت قبل چنین به دست می‌آید:

$$Z_{1r} + \frac{Z_{2r}Z_{3r}}{Z_{2r} + Z_{3r}} = 0 \quad (24)$$

جواب معادله‌ی ۲۴ سختی شعاعی k_r بوده و با توجه به روابط این متغیر و سرعت موج شعاعی (c_r) می‌توان فرکانس طبیعی شعاعی را به دست آورد:

$$f_r(n) = \frac{k_r(n)}{2\pi} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \quad (25)$$

که در آن n یک عدد طبیعی مثبت است و به‌ازای $n = 1$ اولین فرکانس طبیعی ارتعاشات شعاعی مشخص می‌شود. همچنین مانند حالت قبل k_t به شعاع داخلی (a) و شعاع خارجی (b) وابسته است. بزرگنمایی دامنه‌ی ارتعاشات شعاعی نیز از رابطه‌ی ۲۶ به دست می‌آید.

$$M_r = \left| \frac{\xi_a}{\xi_b} \right| = \left| \frac{v_a}{v_b} \right| = \left| \frac{Z_{2r}}{Z_{2r} + Z_{3r}} \right| \quad (26)$$

k_r براساس معادله‌ی ۲۴ محاسبه می‌شود و سپس با جایگذاری در معادله‌ی ۲۶ مقدار بزرگنمایی قابل محاسبه است. مانند حالت قبل می‌توان نشان داد که M_r منحصرأ وابسته به نسبت شعاع‌های خارجی به داخلی (b/a) است.

نتایج

باید به این نکته اشاره داشت که سرعت‌های v و φ و جابه‌جایی‌های ϕ و ξ خیلی کم‌تر از سرعت‌های صوت c_t و c_r و طول موج‌های مربوطه در نظر گرفته شده‌اند. بنابراین روابط ارائه‌شده برای تحلیل ارتعاشات غیرخطی مناسب نیستند. برای بررسی رابطه‌ی بین فرکانس تشدید و بزرگنمایی با پارامترهای هندسی، نمودار تغییرات فرکانس طبیعی و ضریب بزرگنمایی دامنه‌ی متناظر آن‌ها برای ارتعاشات پیچشی و شعاعی با شعاع داخلی ثابت و برحسب شعاع خارجی، به‌ترتیب در شکل‌های ۳ و ۴ ترسیم شده است. برای حل معادلات، جنس ماده‌ی دیسک از فولاد معمولی با خواص زیر در نظر گرفته شده است:

$$\nu = 0.28, \quad E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}, \quad \rho = 7850 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

چنان‌که در نمودارهای شکل ۳ مشخص است، درصورت ثابت بودن شعاع داخلی و افزایش شعاع خارجی، فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند. همچنین، برای شعاع‌های داخلی متفاوت تمامی نمودارها با افزایش شعاع خارجی به مقدار مشترکی همگرا می‌شوند. درصورت ثابت بودن شعاع خارجی و افزایش شعاع داخلی، فرکانس طبیعی پیچشی بزرگ‌تر می‌شود ولی برای ارتعاشات شعاعی، با افزایش شعاع داخلی فرکانس طبیعی شعاعی کاهش می‌یابد. علت این موضوع، افزایش سختی سازه با کاهش شعاع داخلی است. باید به این نکته توجه داشت که انطباق یا تقاطع این نمودارها ممکن نیست زیرا علی‌رغم تأثیرگذاری شعاع داخلی، عامل اصلی شعاع خارجی است. تغییرات بزرگنمایی دامنه نسبت به پارامترهای هندسی در شکل ۴ نشان داده شده است. در ابتدا با افزایش نسبت شعاع خارجی به داخلی مقدار ضریب بزرگنمایی ارتعاشات پیچشی سریعاً افزایش می‌یابد، ولی با ادامه‌ی افزایش این نسبت، ضریب بزرگنمایی پس از رسیدن به مقدار بیشینه با سرعت کم‌تری کاهش می‌یابد. مقدار بیشینه‌ی ضریب بزرگنمایی ارتعاش پیچشی ۳/۷ است که در $b/a = 4$ مشاهده شده است. در ارتعاشات شعاعی، افزایش b/a باعث کاهش تدریجی ضریب بزرگنمایی می‌شود و مقدار متوسط آن در نزدیکی عدد ۱ است.

بررسی صحت روش

الف) مقایسه با حل دقیق دیسک با ضخامت یکنواخت
در صورت باز نویسی معادله‌ی ۳ برای ضخامت یکنواخت داریم:

$$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_0}{\partial r} + \left(k_t^2 - \frac{1}{r^2} \right) \phi_0 = 0 \quad (27)$$

معادله‌ی فوق با توجه به مطالب موجود در ضمیمه، یک معادله‌ی بسل از مرتبه‌ی ۱ است. با استفاده از فرض ارتعاشات هارمونیک و حل معادله‌ی ۲۷، عبارت ۲۸ قابل استخراج است.

$$\phi = [A \cdot J_1(k_t r) + B \cdot Y_1(k_t r)] e^{i\omega t} \quad (28)$$

با توجه به اندازه‌ی سرعت‌های زاویه‌ی مرزی $\left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{r=a} = \varphi_a$ و $\left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{r=b} = -\varphi_b$ ، ثابت‌های A و B مطابق رابطه‌ی ۶ خواهند بود.

باتوجه به شرایط مرزی گشتاور $M|_{r=a} = aT_{t|_{r=a}}S_a = -M_a$ و $M|_{r=b} = bT_{t|_{r=b}}S_b = -M_b$ می‌توان M_a و M_b را برحسب φ_a و φ_b

مطابق رابطه‌ی ۷ به دست آورد:

$$M_b^* = \frac{\varphi_b k_t (J_b Y_a - J_a Y_b)}{\rho c t S_b} \text{ و } M_a^* = \frac{\varphi_a k_t (J_b Y_a - J_a Y_b)}{\rho c t S_a}$$

با معرفی دو تابع M_b^* و M_a^* و با توجه به خواص توابع بسل می‌توان نوشت.

$$\begin{cases} M_b^* = (Z_{1t} + Z_{rt}) \varphi_b + Z_{rt} \varphi_a \\ M_a^* = (Z_{rt} + Z_{rt}) \varphi_a + Z_{rt} \varphi_b \end{cases} \quad (29)$$

که در آن Z_{1t} ، Z_{rt} و Z_{rt} امپدانس‌های مکانیکی معادل برای ارتعاشات پیچشی مطابق معادله‌ی ۳۲ به دست می‌آید.

$$\begin{cases} Z_{1t} = b (J_b Y_a - J_a Y_b) + 2b^2 (Y_b' J_a - J_b' Y_a) - Z_{rt} \\ Z_{rt} = -a (J_b Y_a - J_a Y_b) + 2a^2 (Y_a' J_b - J_a' Y_b) - Z_{rt} \\ Z_{rt} = \pi a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (30)$$

سپس مانند گذشته، با حل معادله‌ی تشدید مدار معادل الکترومکانیکی (معادلات ۱۱ و ۱۲) برحسب k_t مقدار فرکانس طبیعی اول به دست می‌آید. مطالب مطرح شده به لحاظ قالبی برای ارتعاشات شعاعی نیز قابل طرح است. فرکانس طبیعی پیچشی و شعاعی اول برای چند دیسک حلقوی به کمک روش مذکور و نیز با توجه به نتایج بررسی‌های قبلی محققین^[۵]، در جدول ۱ مقایسه شده است.

جدول ۱. فرکانس‌های طبیعی محاسبه شده از روش ارائه شده و مقایسه آن با نتایج حل مرجع^[۵] و اجزاء محدود.

ردیف	پارامترهای هندسی (m)				نتایج مدار معادل الکترومکانیکی (Hz)		نتایج حل ^[۵] برای دیسک یکنواخت (Hz)		نتایج اجزاء محدود (Hz)		درصد خطا با نتایج ^[۵] (%)	
	h_b	h_a	b	a	f_r	f_t	f_{nr}	f_{nt}	f_{nr}	f_{nt}	Δf_t	Δf_r
۱	۰/۰۰۲	۰/۰۰۲	۰/۰۴	۰/۰۱	۲۴۵۷۳	۷۳۲۶۴	۲۳۹۸۴	۷۳۱۹۶	۲۵۷۶۵	۷۴۸۷۶	۰/۰۹	۲/۴۶
۲	۰/۰۰۱۵	۰/۰۰۱۵	۰/۰۳	۰/۰۱	۳۰۹۱۲	۱۰۱۸۱۶	۲۹۹۸۱	۱۰۱۶۶۱	۳۱۴۹۱	۱۰۲۵۶۸	۰/۱۵	۳/۱۰

جدول ۲. فرکانس های طبیعی محاسبه شده از روش ارائه شده و مقایسه آن با نتایج روش اجزاء محدود.

ردیف	پارامترهای هندسی (m)				نتایج مدار معادل الکترومکانیکی (Hz)		نتایج اجزاء محدود (Hz)		درصد خطا (%)
	a	b	h_a	h_b	f_t	f_r	f_{nt}	f_{nr}	
۱	۰/۰۱	۰/۰۳	۰/۰۰۳	۰/۰۰۹	۱۰۰۶۹۳	۴۰۸۱۲	۱۰۴۶۷۸	۴۰۷۵۴	۳/۶۱۰
۲	۰/۰۱	۰/۰۳	۰/۰۰۴	۰/۰۱۲	۱۰۰۶۹۳	۴۰۸۱۲	۱۰۴۸۱۲	۴۰۸۵۶	۳/۹۳۰
۳	۰/۰۱	۰/۰۴	۰/۰۰۲	۰/۰۰۸	۷۲۱۲۲	۳۲۳۲۷	۷۵۶۲۰	۳۲۲۵۵	۴/۶۲۶
۴	۰/۰۰۵	۰/۰۲	۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۱	۱۴۴۲۹۳	۶۴۴۵۵	۱۵۱۲۰۶	۶۴۵۷۳	۴/۵۷۲
۵	۰/۰۲	۰/۰۶	۰/۰۰۶	۰/۰۱۸	۵۰۳۴۷	۲۰۴۰۶	۵۲۲۳۲	۲۰۴۲۱	۳/۶۰۹

نتیجه گیری

به خوبی مطابقت دارند. چون اندازه گیری ضریب بزرگ نمایی در نرم افزار ANSYS امکان پذیر نیست و نیز اندازه گیری آزمایشگاهی آن دشوار است، مقایسه ی پارامتر بزرگ نمایی میسر نبود.

در این نوشتار ارتعاشات پیچشی و شعاعی دیسک های حلقوی با تغییرات ضخامت خطی به کمک روش مدار معادل الکترومکانیکی تحلیل شد. در تحلیل فوق، دیسک به صورت نازک در نظر گرفته شده است. به بیان دیگر ضخامت آن در برابر شعاع بسیار کوچک است و بنابراین ارتعاشات آن را می توان تقارن محوری در نظر گرفت. ارتباط بین فرکانس های طبیعی و شعاع های هندسی بررسی و مشخص شد با وجود این که فرکانس های طبیعی به شعاع داخلی وابسته اند اما عامل مهم تر شعاع خارجی است. هنگامی که شعاع داخلی ثابت است، فرکانس های طبیعی پیچشی و شعاعی با افزایش شعاع خارجی کاهش می یابند.

همچنین این نتایج نشان می دهند که ضرایب بزرگ نمایی وابستگی مستقیم به ابعاد سیستم ندارند و فقط به هیأت کلی سیستم (نسبت قطر خارجی به قطر داخلی) وابسته اند. در نهایت این ارتباط (شکل ۴) مشخص ساخت که تغییرات ضریب بزرگ نمایی ارتعاشات پیچشی حساسیت زیادی به نسبت شعاع های خارجی به داخلی دارد.

روش ارائه شده در این نوشتار که برای طراحی دیسک هایی با تغییرات ضخامت خطی است برای طراحی دیسک هایی با الگوی ضخامتی متفاوت نیز مناسب است. از آنجا که پیش بینی رفتار مدار معادل الکترومکانیکی ساده تر از پیش بینی رفتار معادله ی دیفرانسیل مربوطه است، درک این روش به راحتی امکان پذیر است. روش ارائه شده برای بررسی ارتعاشات دیسک های ضخیم یا در تحلیل ارتعاشات غیرخطی دیسک ها کارایی نخواهد داشت.

فهرست علائم

$$c_r = \sqrt{E/\rho(1-v^2)}: \text{سرعت موج طولی}$$

$$c_t = \sqrt{E/2\rho(1+v)}: \text{سرعت موج برشی}$$

E : مدول یانگ

f_r : فرکانس طبیعی شعاعی

f_t : فرکانس طبیعی پیچشی

F_a : نیروی شعاعی در شعاع داخلی

F_b : نیروی شعاعی در شعاع خارجی

$$G = E/2(I+v): \text{مدول برشی}$$

h_a : ضخامت در شعاع داخلی

h_b : ضخامت در شعاع خارجی

$$k_r = \omega/c_r: \text{عدد موج ارتعاشات شعاعی}$$

$$k_t = \omega/c_t: \text{عدد موج ارتعاشات پیچشی}$$

M_a : ممان خارجی در سطح داخلی

M_b : ممان خارجی در سطح بیرونی

M_r : ضریب بزرگ نمایی دامنه جابه جایی شعاعی

M_t : ضریب بزرگ نمایی دامنه تغییر زاویه پیچشی

S_a : مساحت سطح داخلی

S_b : مساحت سطح خارجی

T_r : تنش شعاعی

T_t : تنش مماسی

v_r : سرعت شعاعی

v_s : سرعت شعاعی در سطح داخلی

v_b : سرعت شعاعی در سطح خارجی

ξ : جابه جایی شعاعی

ρ : چگالی ماده

v : ضریب پواسان

ϕ : جابه جایی زاویه پی

φ : سرعت زاویه پی

φ_a : سرعت زاویه پی در سطح داخلی

φ_b : سرعت زاویه پی در سطح خارجی

ω : فرکانس زاویه پی

منابع (References)

1. Leissa, A.W., *Vibration of Plates*, Acoustical Society of America, Sewickley, PA (1993).
2. Singh, B. and Saxena, V. "Axisymmetric vibration of a circular plate with double linear variable thickness", *Journal of Sound and Vibration*, **179**, pp. 879-897 (1995).
3. Singh, B. and Saxena, V. "Axisymmetric vibration of a circular plate with exponential thickness variation", *Journal of Sound and Vibration*, **192**, pp. 35-42 (1996).
4. Laura, P.A.A.; Gutierrez, R.H. and Rossi, R.E. "Vibration of circular annular plates of cylindrical anisotropy and non-uniform thickness", *Journal of Sound and Vibration*, **231**, pp. 246-252 (2000).
5. Gladwell, G.M.L. "The vibration of mechanical resonators (I) uniform rings and discs", *Journal of Sound and Vibration*, **6**, pp. 343-350 (1967).
6. Mindlin, R.D. and Dereiewicz, H. "Thickness-shear and plexural vibration of a circular disk", *Journal of Applied Physics*, **25**, pp. 1329-1332 (1954).
7. Civalek, O. "Application of differential quadrature (DQ) and harmonic differential quadrature (HDQ) for buckling analysis of thin isotropic plates and elastic columns", *Engineering Structures*, **26**, pp. 171-186 (2004).
8. Han, J.B. and Liew, K.M. "Axisymmetric free vibration of thick annular plates", *International Journal of Mechanical Sciences*, **41**, pp. 1089-1109 (1999).
9. Wang, X.; Yang, J. and Xiao, J. "On free vibration analysis of circular annular plates with non-uniform thickness by the differential quadrature method", *Journal of Sound and Vibration*, **194**, pp. 547-551 (1995).
10. Xiang, Y. and Zhang, L. "Free vibration analysis of stepped circular Mindlin plates", *Journal of Sound and Vibration*, **280**, pp. 633-655 (2005).
11. Hang, L.T.T.; Wang, C.M. and Wu, T.Y. "Exact vibration results for stepped circular plates with free edges", *International Journal of Mechanical Sciences*, **47**, pp. 1224-1248 (2005).
12. Mason, W.P. "Physical acoustics1", Part A, Academic Press, New York, London (1964).
13. Kamke, E., *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und losungen, I, gewöhnliche differentialgleichungen*, B. G. Teubner, Leipzig (1977).
14. Polyanin, A.D. and Zaitsev, V.F., *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, 2nd Edition, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton (2003).

تابع بسل نوع اول (شکل ۷):

$$J_{\alpha}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m + \alpha}$$

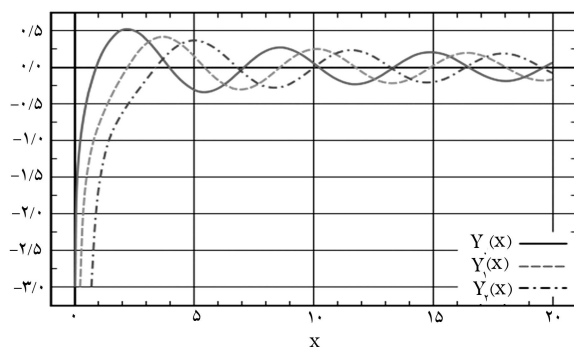
$$J_{\alpha + \frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{\alpha + \frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx}\right)^{\alpha} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$$

$$J_{-\alpha - \frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{\alpha + \frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx}\right)^{\alpha} \left(\frac{\cos(x)}{x}\right)$$

تابع بسل نوع دوم (شکل ۸):

$$Y_{\alpha}(x) = \frac{J_{\alpha}(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}$$

$$Y_{\alpha + \frac{1}{2}}(x) = (-1)^{n+1} J_{-\alpha - \frac{1}{2}}(x)$$



شکل ۸. تابع بسل نوع دوم.

ضمیمه

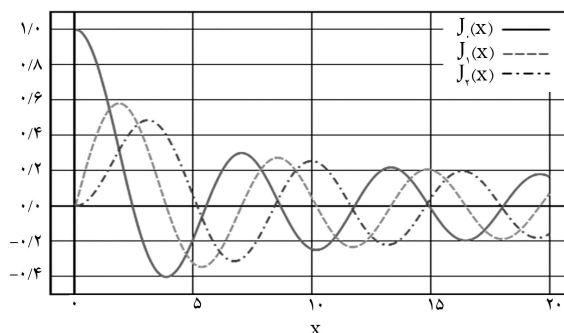
برای توابعی به شکل:

$$, b \neq 0 \quad x^{\tau} y''_{xx} + ax y'_x + (bx^n + C) y = 0, \quad n \neq$$

می توان حلی کلی به صورت:

$$y = x^{\frac{1-a}{2}} \cdot \left[C_1 \cdot J_{\alpha} \left(\frac{\tau}{n} \sqrt{bx^{\frac{n}{2}}} \right) + C_2 \cdot Y_{\alpha} \left(\frac{\tau}{n} \sqrt{bx^{\frac{n}{2}}} \right) \right]$$

که در آن $\alpha = \frac{1}{n} \cdot \sqrt{(1-a)^2 - 4C}$, C_1, C_2 مقادیری ثابت و J_{α} و Y_{α} به ترتیب توابع بسل نوع اول و دوم هستند، پیشنهاد داد. [۱۲، ۱۳]



شکل ۷. تابع بسل نوع اول.

VIBRATION ANALYSIS OF ANNULAR DISKS BY EQUIVALENT ELECTRO-MECHANICAL CIRCUIT METHOD

H. Nahvi*

hnahvi@cc.iut.ac.ir

N. Nouri

n.nouri@me.iut.ac.ir

Dept. of Mechanical Engineering
Isfahan University of Technology

Sharif Mechanical Engineering Journal
Volume 28, Issue 3, Page 87-93, Research Note

© Sharif University of Technology

Abstract

In this paper, the vibration of an annular disk with a linearly varying cross-section is analyzed by means of Bessel's functions and an equivalent electro-mechanical circuit method. By using the equivalent electrical equations, natural frequencies and magnification factors are obtained. This is done by writing the equations of motion for the disk vibration and rewriting the equation to make it similar to a three component Kirchhoff circuit. The method can be used to obtain the resonance frequency of an ultrasonic transducer as well as the resonance frequency of a circuit. In this method, the vibration of an annular disk is investigated separately in radial and torsional components. The results of the method were first verified for the cylindrical disks with uniform

thickness and proved to be compatible with the previously developed methods for extracting natural frequencies of such shapes. Then, the effects of variations of geometrical parameters, namely; the ratio of the outer radius over the inner radius and the relation between the angular and radial displacement amplitude magnification on the natural frequencies, are studied. The results show that by fixing the inner radius, the torsional and radial resonance frequencies are decreased as the outer radius is increased. Although the inner radius affects the natural frequencies, it is observed that the primary factor is the outer radius. The relationship between the magnifications and the geometrical radius ratio is also analyzed, which shows a weak relationship between them. Correspondingly, the finite element method is used to analyze the modal shapes by ANSYS software. It is shown that the frequency values calculated by applying the presented theory are in good agreement with the simulation results by ANSYS. The method is also capable of providing benchmark values for researchers to validate other variable thickness annular plates. The drawback of this analysis is that it assumes a very thin annular disk. For thick disks, the vibrations are complex and the method of this paper is not applicable.

Key Words: analytical vibrations, annular disks, electro-mechanical circuit.

* corresponding author

Received 3 July 2010; received in revised form 16 January 2011; accepted 9 March 2011.