

# مطالعه‌ی کارایی اختلاط تحت تأثیر الکتروکینتیک درون ریزمجراهای ناهمگن

جعفر جماعتی\* (دانشجوی دکتری)

حمید نیازمند (دانشیار)

دانشکده‌ی مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

مهندسی مکانیک شریف  
دربی ۳-۴۹، شماری ۱، ص. ۷۷-۸۵ (پادداشت فنی)

در این نوشتار اختلاط ناشی از جریان الکترواسموتیک<sup>۱</sup> درون ریزمجراهای<sup>۲</sup> دارای خواص سطحی ناهمگن مورد مطالعه قرار گرفته است. میدان سرعت توسط حل عددی معادله‌های ناویر-استوکس به همراه شرط سرعت لغزشی در دیواره به دست آمده، و با استفاده از آن میدان غلظت گونه‌ها محاسبه شده است. سپس معیار مناسب برای تعیین کارایی اختلاط جریان درون ریزمجراهای ناهمگن معرفی شده و با استفاده از آن، عملکرد یک تکه ناهمگنی<sup>۳</sup> واقع بر دیواره‌ی ریزمجرا در ایجاد اختلاط بررسی شده و اثر پارامترهای هندسی و چگونگی پروفیل ناهمگنی مورد مطالعه قرار گرفته است. بررسی عددی نشان داده که وجود ناپوستگی در پروفیل ناهمگنی تفاوت چندانی در عملکرد اختلاطی ریزمجرا ندارد. نتایج نیز نشان می‌دهد که ایجاد ناهمگنی با اندازه‌های کوچک‌تر در نزدیکی ورودی ریزمجرا بیشترین بهبود را در اختلاط ایجاد می‌کند. این نتایج می‌تواند در طراحی بهینه‌ی ریزمخلوط‌گرها<sup>۴</sup> مورد استفاده قرار بگیرد.

jafar\_jamaati@yahoo.com  
niazmand@um.ac.ir

واژگان کلیدی: ریزمجرای ناهمگن، جریان الکترواسموتیک، کارایی اختلاط.

## مقدمه

پیشرفت سریع در حوزه‌ی علوم مهندسی باعث شده تا بسیاری از مباحث کاملاً نظری در قالب مسائل کاربردی نمود پیدا کنند. در سال‌های اخیر ریزبازارها<sup>۵</sup> و ریزجریان‌ها<sup>۶</sup> در بسیاری از حوزه‌های مهندسی مورد استفاده قرار گرفته‌اند و در اغلب این موارد الگوی جریان سیال و چگونگی اختلاط آن بسیار مورد توجه است. اساسی‌ترین نکته در اختلاط با مقیاس میکرونی این است که عامل این پدیده پخش مولکولی است که ذاتاً فرایند کندی است، به‌ویژه زمانی که ضریب پخش کم باشد. در جریان‌های با مقیاس ماکرو، ایجاد اغتشاش و پدیده‌ی توربولانس می‌تواند میزان اختلاط را به‌طور چشمگیری افزایش دهد. ایجاد جریان‌های مغشوش در ریزمجراها نیاز به تأمین افت فشارهای بالایی دارد به‌نحوی که در بیشتر کاربردهای عملی، جریان درون ریزمجراهای مستقیم یا حتی دارای انحنا<sup>۱۱</sup> در محدوده آرام است، و به همین دلیل افزایش اختلاط درون ریزمجراها بر اثر پدیده‌ی اغتشاش چندان موجه نیست. در این شرایط تنها راه حل ممکن برای افزایش اختلاط، به‌کارگیری راهکارهایی است که طول پخش مولکولی را کاهش می‌دهند. از آنجا که زمان پخش مولکولی با مجذور طول پخش مولکولی رابطه دارد، کاهش طول پخش مولکولی بر کوتاه شدن زمان اختلاط توسط ریزمجرا تأثیری مثبت دارد. بیشتر تلاش‌ها برای بهبود عملکرد اختلاط درون ریزمجراها در راستای کاهش طول پخش مولکولی است.

اختلاط درون ریزمجرا ممکن است به دو شیوه‌ی غیرفعال<sup>۷</sup> یا فعال<sup>۸</sup> صورت

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۸/۱۰/۱۳۸۹، اصلاحیه ۳/۴/۱۳۹۰، پذیرش ۵/۱/۱۳۹۰.

پذیرد که برای هر کدام از آن‌ها روش‌های متفاوتی پیشنهاد شده است.<sup>۱۲</sup> در اختلاط فعال علاوه بر انرژی لازم برای راندن سیال، یک منبع انرژی خارجی برای تأمین اختلاط نیز وجود دارد و بنابراین راندمان اختلاط به‌طور چشمگیری بالاست. اما تجهیزات مکانیکی و ابزارهای الکترونیکی اضافی به کار رفته در آن‌ها به‌ویژه برای مقاصد ریز تراشه‌های آزمایشگاهی<sup>۹</sup> مطلوب نیست و حتی در برخی موارد این تجهیزات اضافی می‌تواند روی نمونه‌های زیست‌شناختی تأثیرات منفی داشته باشد.<sup>۱۳</sup>

برای ایجاد اختلاط غیرفعال شیوه‌های مختلفی وجود دارد. نظیر ریزمخلوط‌گرهای لایه‌یی<sup>۱۰</sup> -- که در آن‌ها با ایجاد چندین لایه جداگانه از گونه‌های مورد نظر برای اختلاط، طول پخش مولکولی کوتاه می‌شود.<sup>۱۴</sup> بخش عمده‌ی پژوهش‌ها در مورد ریزمخلوط‌گرهای لایه‌یی اختصاص دارد به مطالعه‌ی اختلاط دو جزء که در ورودی ریزمجرا از یکدیگر مجزا هستند. بنابراین اختلاط لایه‌یی بیشتر تحت تأثیر ترکیب اجزا در ورودی ریزمجراست. با این سازوکار می‌توان به بزرگ‌نمایی هیدرودینامیکی<sup>۱۱، ۱۵</sup> که در جریان‌های الکترواسموتیک کاربرد دارد<sup>۱۶</sup>، دست یافت. مخلوط‌گرهای لایه‌یی سازگار با جریان‌های فشار-محرك<sup>۱۲</sup> نیز طراحی شده‌اند که در هر گذر سیال از آن‌ها، طول پخش مولکولی نصف می‌شود.<sup>۱۷</sup> در جریان‌های دوبعدی گذرا یا سه‌بعدی امکان ایجاد سازوکار دیگری از اختلاط -- معروف به اختلاط آشوبه‌یی<sup>۱۳</sup> -- وجود دارد. براساس این سازوکار وجود شیارهای سطحی بر روی کانال می‌تواند در جریان‌های فشار-محرك یا الکترواسموتیک کارایی اختلاط را افزایش دهد.<sup>۱۸</sup>

مطالعات متعدد در زمینه‌ی الکتروکینتیک<sup>۱۴</sup> نشان داده است که خواص سطحی

نادرست از پدیده‌ی اختلاط می‌شود؛ به این صورت که میزان اختلاط قبل از گردابه کاهش می‌یابد و سپس میزان اختلاط با گذر از گردابه افزایش می‌یابد. کاهش میزان اختلاط در طول مسیر جریان چندان موجه نیست. بنابراین معرفی معیاری مناسب برای ارزیابی اختلاط جریان‌های دارای گردابه درون ریزمجرها ضروری است.

در این نوشتار ابتدا با مطالعه‌ی موردی دسته‌بندی خاص از جریان‌های پیچیده، مفاهیم مناسب برای تعیین و ارزیابی اختلاط درون ریزمجرها ارائه و بررسی شده است. با استفاده از این مفاهیم معیار مناسبی برای اختلاط درون ریزمجرهای دارای خواص ناهمگن در دیواره معرفی شده است. سپس با استفاده از این معیار عملکرد اختلاطی ریزمجری دارای یک تکه ناهمگنی -- که یکی از کاربردی‌ترین الگوهای ناهمگنی است -- مطالعه، و اثر اندازه و موقعیت تکه ناهمگنی در میزان اختلاط بررسی شده است و الگوی مناسب برای اختلاط بیشینه معرفی شده است. به‌علاوه مشخص شده که وجود ناپوستگی در الگوی ناهمگنی اثر چندان بر عملکرد اختلاطی ریزمجر ندارد و میزان اختلاط چنین الگوهای اندکی متفاوت از الگوهای پیوسته‌ی مشابه است. استفاده از این نکته می‌تواند منجر به صرفه‌جویی محاسباتی در مدل‌سازی اختلاط درون ریزمجرهای ناهمگن شود.

## مدل‌سازی جریان الکترواسموتیک

جریان الکترواسموتیک درون یک ریزمجری دوبعدی با ارتفاع  $H$  و طول  $L$  را در نظر بگیرید. هندسه‌ی ریزمجر در شکل ۱ نشان داده شده است. معادله‌های حاکم بر جریان سیال تراکم‌ناپذیر عبارت است از:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2)$$

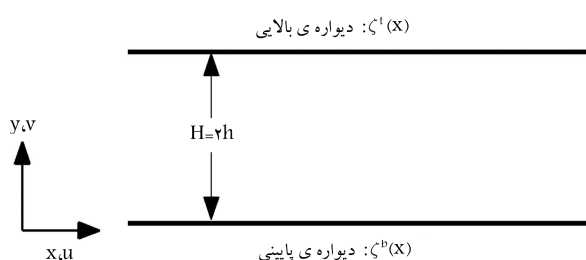
با توجه به مدل هلمهولتز-اسمولوچوفسکی شرایط مرزی در نظر گرفته شده عبارت است از:

$$u(x, 0) = u_b(x) = \frac{\varepsilon E_x \zeta_b(x)}{\mu} \quad (3)$$

$$u(x, H) = u_t(x) = \frac{\varepsilon E_x \zeta_t(x)}{\mu} \quad (4)$$

که در آن،  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$  مقدار ضریب عبوردهی سیال مورد نظر،  $E_x$  شدت میدان اعمالی در راستای طولی کانال، و  $\zeta_b(x)$  و  $\zeta_t(x)$  به‌ترتیب توزیع زتاپتانسیل روی دیواره‌ی پایینی و بالایی هستند.

در ورودی و خروجی کانال مقدارگرادیان‌های سرعت برابر با صفر اعمال شده

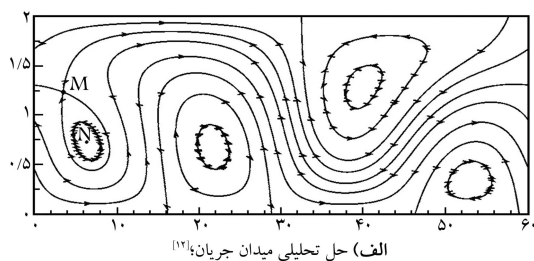


شکل ۱. هندسه‌ی ریزمجر و محورهای مختصات.

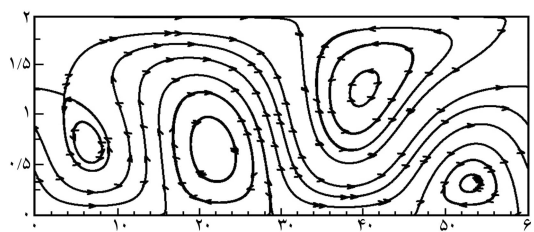
دیواره‌ی ریزمجر می‌تواند باعث ایجاد الگوهای پیچیده برای جریان سیال شود. بررسی‌های زیادی براساس مدل هلمهولتز-اسمولوچوفسکی<sup>۱۵</sup> درون ریزمجرهای با زتاپتانسیل<sup>۱۶</sup> غیریکنواخت انجام شده<sup>۹-۱۱</sup> و نشان داده شده است که سطوح ناهمگن منجر به ایجاد جریان‌های پیچیده و چرخشی می‌شود که می‌تواند برای اختلاط مناسب باشد. مطالعات تحلیلی در این زمینه به‌خوبی اثر سطوح ناهمگن را در تولید جریان‌های پیچیده نشان می‌دهد.<sup>۱۲-۱۴</sup> در چنین جریان‌هایی چنانچه به‌نحوی خطوط بسته‌ی جریان شکسته شود، می‌توان از مزایای پخش آشوبه‌یی بهره برد. برای دستیابی به پخش آشوبه‌یی باید جریان دوبعدی گذرا<sup>۱۵،۱۶</sup> یا سه‌بعدی<sup>۱۷</sup> (در صورت دائمی بودن) وجود داشته باشد. اخیراً ریزمجرهای ناهمگن با ایجاد موانع کوچک روی دیواره ساخته شده و جریان درون آن‌ها بررسی شده است. الگوهای پیچیده‌ی جریان درون این ریزمجرها به‌طور کیفی نشان می‌دهد که وجود گردابه‌ها و چرخش موضعی سیال در ریزمجرهای ناهمگن اختلاط گونه‌ها را بهبود می‌دهد.<sup>۱۸</sup> با حل معادله‌ی غلظت، میزان اختلاط درون ریزمجرهای ناهمگن به‌صورت کمی مطالعه شده و اثر تعداد، اندازه و موضع ناهمگنی‌ها بر کارایی اختلاط بررسی شده است.<sup>۱۹،۲۰</sup> با پیشرفت فناوری در سال‌های اخیر، ایجاد ناهمگنی در خواص سطحی ریزمجر از طریق پوشش‌دهی<sup>۱۷</sup> سطوح ریزمجر با مواد مختلف نیز فراهم شده است.<sup>۲۱،۲۲</sup> علاوه بر این، کنترل زمانی و مکانی زتاپتانسیل در نواحی ناهمگن ممکن است با ایجاد میدان‌های الکتریکی عمود بر دیواره صورت پذیرد. این میدان‌ها به‌وسیله‌ی الکترودهای تعبیه‌شده در پشت فصل مشترک جامد-مایع تولید می‌شوند.<sup>۲۳</sup> راندمان اختلاط درون چنین ریزمجرهایی از روش‌های عددی محاسبه شده و اثر اندازه ناهمگنی و شدت ناهمگنی (یعنی اختلاف بین زتاپتانسیل بخش‌های همگن و ناهمگن) مورد بررسی قرار گرفته است.<sup>۲۴</sup> عملکرد این شیوه در محفظه‌های اختلاط نیز مطالعه شده است.<sup>۲۵</sup>

با طراحی مناسب ناهمگنی روی سطوح کانال می‌توان ریزمجرهایی را معرفی کرد که برای اهداف اختلاط، پمپاژ -- یا هر دوی آن‌ها -- قابل استفاده باشد.<sup>۲۶</sup> در چنین وضعیتی حل عددی جریان الکترواسموتیک در کانال‌های ناهمگن بدون استفاده از تشابه هلمهولتز-اسمولوچوفسکی پرهزینه است و مطالعات معدودی در این زمینه وجود دارد.<sup>۲۷،۲۸</sup> به‌طور عام، حل میدان سرعت در هندسه‌های پیچیده‌ی درون کانال با دیواره‌های ناهمگن نیازمند حل هم‌زمان میدان الکتریکی و توزیع بار و معادله‌های ناویر-استوکس است. اوربک<sup>۱۸</sup> (۱۹۵۲) به‌عنوان اولین ساده‌سازی برای حل این مسئله، پیشنهاد کرد که برای جریان‌های ساده در رینولدزهای کم، توزیع سرعت جریان الکترواسموتیک درون حوزه‌ی حل به‌موازات میدان الکتریکی در نظر گرفته شود. این نظریه توسط محققین بررسی، و شرایط لازم برای این تشابه تبیین شده است.<sup>۲۹،۳۰</sup> یک حالت مهم از این تشابه به معادله‌ی هلمهولتز-اسمولوچوفسکی منتهی می‌شود و بر این اساس همه‌ی اثرات الکتروکینتیک بر میدان جریان به‌صورت نوعی شرط لغزش در مرز جریان داخل ریزمجر با EDL (لایه‌ی دوگانه‌ی الکتریکی) در نظر گرفته می‌شود. استفاده از معادله‌ی هلمهولتز-اسمولوچوفسکی مدل‌سازی جریان‌های الکترواسموتیک ساده را بسیار آسان می‌کند، زیرا در آن حل میدان جریان و حل میدان الکتریکی به‌صورت مستقل انجام می‌شود. با این ساده‌سازی شرط هلمهولتز-اسمولوچوفسکی در مرزها اعمال می‌شود و با استفاده از این شرط مرزی، میدان سرعت درون حوزه‌ی جریان حل می‌شود.

در این پژوهش، اختلاط ناشی از تأثیرات الکتروکینتیک درون کانال‌های با خواص ناهمگن در دیواره مطالعه شده است. برای ارزیابی میزان اختلاط درون ریزمجرها معیارهای رایج مورد بررسی قرار گرفته است. هنگامی که جریان شامل نواحی گردابه‌یی باشد، نتایج ارائه‌شده توسط اغلب معیارهای رایج منجر به تفسیر



الف) حل تحلیلی میدان جریان؛  $Re=100$



ب) حل عددی میدان جریان.

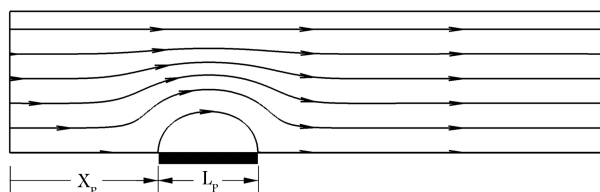
شکل ۲. مقایسه‌ی حل عددی و حل تحلیلی میدان جریان.

نقاط  $375 \times 75$  می‌تواند به‌خوبی نتایجی مستقل از شبکه‌ی به کار رفته ارائه کند. در این بررسی‌ها مشاهده شد که در جریان‌های نامتقارن، هنگامی که تکه ناهمگنی نزدیک به ورودی کانال باشد، گردابه‌ی ناشی از آن روی جریان ورودی ریزمجرا تأثیر می‌گذارد و حتی منجر به جریان برگشتی در ورودی ریزمجرا می‌شود. بنابراین، برای کاهش این اثرات در ابتدای حوزه‌ی حل عددی به اندازه یک برابر ارتفاع ریزمجرا طول اضافی در نظر گرفته شده است و در آن شرط مرزی سرعت در دیواره‌ها شبیه به قسمت همگن در نظر گرفته شده است و به‌علاوه ضرایب پخش گونه‌ها برابر با صفر اعمال شده است تا شرایط فیزیکی مسئله در ورودی ریزمجرا دگرگون نشود.

## اختلاط درون ریزمجراهای دارای خواص ناهمگن

جریان درون یک ریزمجرا با دیواره‌های همگن و هندسه‌ی یکنواخت به‌صورت موازی با دیواره‌های ریزمجراست. جریان درون چنین ریزمجراهایی فاقد کارایی مناسب برای اختلاط ذرات است. مشاهدات تجربی و شبیه‌سازی‌های عددی نشان داده که اختلاط درون ریزمجراهای ناهمگن را می‌توان مناسب‌تر و مؤثرتر انجام داد. از این رو، مطالعه و معرفی ریزمجراهای ناهمگن اهمیت فراوانی پیدا کرده است.

یک ریزمجرای همگن که خواص بخشی از دیواره آن به‌صورت موضعی متفاوت با سایر نقاط باشد، را می‌توان به‌عنوان ساده‌ترین حالت یک ریزمجرای ناهمگن در نظر گرفت. در شکل ۳ جریان الکترواسموتیک درون چنین ریزمجرای به‌صورت کیفی نشان داده شده است. مقدار زتاپتانسیل دیواره در همه جا — غیر از تکه‌ی ناهمگنی — مثبت و در قسمت تکه‌ی ناهمگنی منفی در نظر گرفته شده است.



شکل ۳. ساده‌ترین نحوه‌ی ایجاد ریزمجرای ناهمگن و خطوط جریان مربوط به آن.

است. بررسی اختلاط گونه‌ها توسط معادله‌ی دوبعدی غلظت صورت می‌گیرد:

$$\rho \left( \frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) C \right) = D \nabla^2 C \quad (5)$$

که در آن،  $D$  ضریب پخش مولکولی، و  $C(x, y)$  غلظت جزء مورد نظر است. در ورودی ریزمجرا شرایط مرزی مربوط به دو جزء کاملاً مجزا اعمال شده است:

$$C(0, y) = \begin{cases} 0, & 0 < y < 0.5 \\ 1, & 0.5 < y < 1 \end{cases} \quad (6)$$

و در دیواره‌ها و خروجی ریزمجرا شار غلظت برابر صفر در نظر گرفته شده است:

$$\left. \frac{\partial C(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0, H} = 0 \quad \& \quad \left. \frac{\partial C(x, y)}{\partial y} \right|_{x=L} = 0 \quad (7)$$

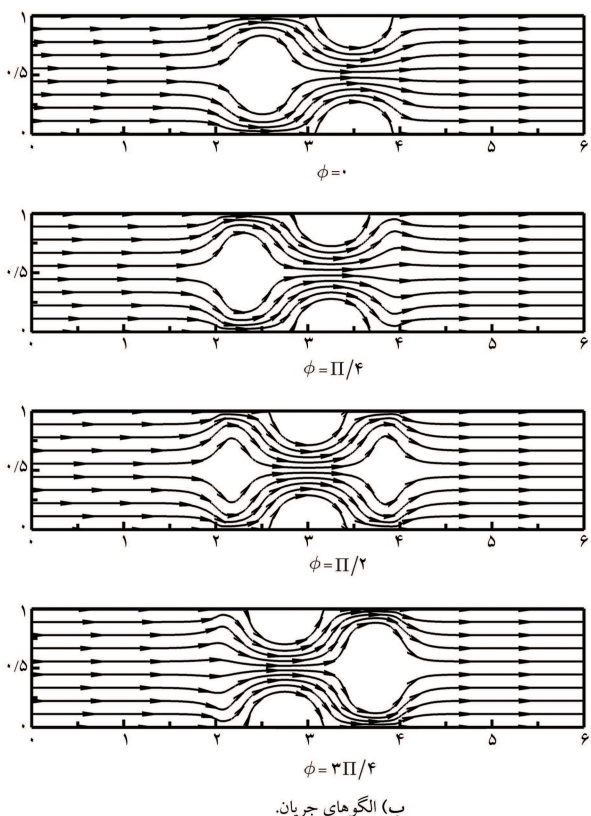
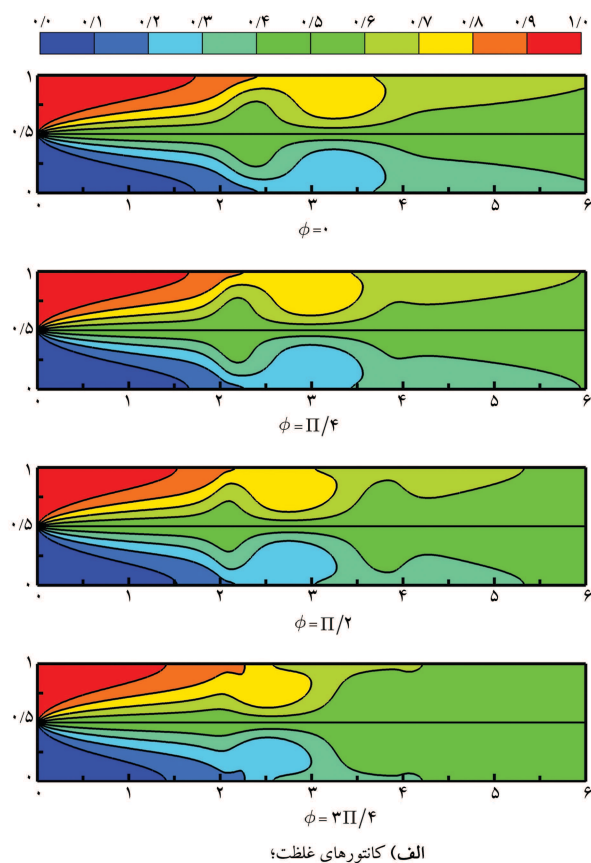
## نتایج

جریان الکترواسموتیک از یک سیال تراکم‌ناپذیر درون یک ریزمجرای صفحه‌یی با دیواره‌های همگن را در نظر بگیرید. با توجه به مدل هلمهولتز-اسمولوچوفسکی سرعت لغزشی ایجادشده در مجاورت دیواره‌ها از رابطه‌ی  $u_s = \varepsilon \zeta E_x / \mu$  به دست می‌آید. برای  $\mu = 10^{-6} \text{ Ns/m}$ ،  $\varepsilon = 6.95 \times 10^{-10} \text{ C/Vm}$  و ارتفاع ریزمجرا  $H = 100 \mu\text{m}$  به‌ازای چند مقدار مختلف زتاپتانسیل ( $\zeta$ ) و پتانسیل الکتریکی اعمال شده بر ریزمجرا ( $E_x$ ) اندازه سرعت لغزشی و عدد رینولدز در جدول ۱ محاسبه شده است.

در تمامی موارد بررسی شده در جدول ۱، برنامه‌ی جریان آرام است که دلیل اصلی این امر اندازه بسیار کوچک ریزمجراهاست. مدل هلمهولتز-اسمولوچوفسکی اگرچه ابتدائاً برای ریزمجراهای همگن توسعه یافته، به‌خوبی می‌تواند رفتار جریان و الگوی آن را در ریزمجراهای ناهمگن نیز پیش‌بینی کند و لذا توسط محققین متعددی مورد استفاده قرار گرفته است. در این نوشتار جریان الکترواسموتیک با  $Re=0.1$  درون ریزمجرای ناهمگن مورد مطالعه قرار گرفته است. برای اطمینان از صحت حل عددی، بین نتایج مربوط به میدان جریان عددی با نتایج حاصل از حل تحلیلی<sup>[۱۲]</sup> در حالت‌های مختلف مقایسه‌یی به‌عمل آمده، و برای یک جریان پیچیده میدان‌های مربوطه در شکل ۲ نشان داده شده است. موقعیت مرکزگردابه (شکل ۲)، یعنی نقطه‌ی  $N$ ، توسط حل تحلیلی  $(x, y)_N = (6.5^\circ, 0.75)$  محاسبه شده و موقعیت نقطه‌ی تکین  $M$  برابر با  $(x, y)_M = (5.5^\circ, 1.22)$  به دست آمده است. موقعیت این نقاط توسط حل عددی برابر  $(x, y)_N = (6.2^\circ, 0.75)$  و  $(x, y)_M = (4.0^\circ, 1.2^\circ)$  به دست آمده‌اند. برای این میدان جریان پیچیده، بیشینه خطای نسبی موجود در پیش‌بینی مکان نقاط تکین در جهت عرضی (جهت  $y$ ) برابر با  $0.1^\circ$  و در جهت طولی برابر با  $0.3^\circ$  است. بر این اساس، بررسی‌های انجام شده برای جریان‌های ساده نشان می‌دهد که تعداد

جدول ۱. مقادیر سرعت لغزشی در ریزمجرای یکنواخت.

| $\zeta$ (mV) | $E_x$ (V/mm) | $u_s$ (mm/s) | Re   |
|--------------|--------------|--------------|------|
| 50           | 100          | 3.48         | 0.35 |
| 100          | 100          | 6.95         | 0.70 |
| 200          | 100          | 13.90        | 1.39 |



شکل ۴. جریان مورد مطالعه برای ارزیابی معیارهای اختلاط درون ریزمجرای ناهمگن.

همان‌طور که دیده می‌شود در مجاورت تکه‌ی ناهمگنی گردابه‌یی ایجاد شده که باعث بهبود میزان اختلاط در داخل و خارج آن می‌شود. در مطالعه‌ی کمی میزان اختلاط، حضور یک معیار مناسب ضرورت دارد. معیارهای مختلفی برای تعیین میزان اختلاط معرفی شده و مورد استفاده قرار گرفته است که در بین آن‌ها، «انحراف معیار غلظت گونه‌ها در هر مقطع از ریزمجرای» معیاری مرسوم و نسبتاً مناسب است، و چنین تعریف می‌شود:

$$\sigma = \frac{\int_0^1 (C(y) - C_m)^2 dy}{\int_0^1 dy} \quad (8)$$

که در آن،  $C_m$  مقدار غلظت متوسط در هر مقطع است و مطابق رابطه‌ی ۹ محاسبه می‌شود:

$$C_m = \frac{\int_0^1 u(y)C(y) dy}{\int_0^1 u(y) dy} \quad (9)$$

برای تعیین قابلیت معیار فوق در برآورد اختلاط در جریان‌های پیچیده، جریان لغزشی نسبتاً پیچیده‌یی درون یک ریزمجرای ناهمگن مورد مطالعه قرار گرفته و میزان اختلاط گونه‌ها محاسبه شده است. برای ایجاد جریان‌های پیچیده که مناسب اختلاط باشند، الگوهای مختلفی پیشنهاد شده است. برای این منظور شرایط مربوط به سرعت لغزشی این ریزمجرای چنین در نظر گرفته شده است:

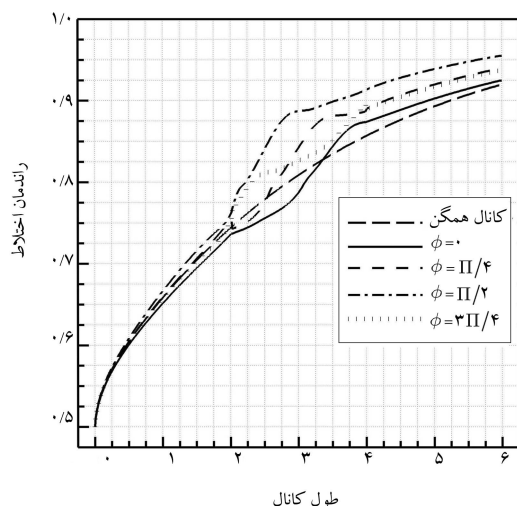
$$u_b(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 2 \\ 1 + 4 \sin\left(\phi + \frac{\pi x}{L}\right), & 2 < x \leq 4 \\ 1, & 4 < x \leq 6 \end{cases} \quad (10)$$

$$u_t(x) = u_b(x) \quad (11)$$

$L$  طول بخشی از کانال است که در آن قسمت ناهمگنی ایجاد شده، و  $\phi$  یک آرگومان اختیاری برای ایجاد الگوهای مختلف سرعت لغزشی در دیواره است. با توجه به این الگوها می‌توان جریان‌های پیچیده‌ی مختلفی برای افزایش اختلاط تولید کرد.<sup>[۱۲]</sup> شرایط مرزی معادله‌ی غلظت در ورود چنین فرض شده است که در ورودی ریزمجرای غلظت گونه‌ی مورد مطالعه در نیمه‌ی پایینی ریزمجرای برابر با صفر و در نیمه‌ی بالایی برابر با ۱ باشد. میدان جریان و میدان غلظت به ازای  $Sc=50$  و برای مقادیر مختلف  $\phi$  (ظاهر شده در رابطه‌ی ۱۰) در شکل ۴ نشان داده شده است. چنان که به لحاظ کیفی دیده می‌شود، ناحیه‌ی ناهمگن (حوزه‌ی  $2 < x \leq 4$ ) به‌طور چشمگیری میزان اختلاط را بهبود داده است.

برای میدان‌های غلظت نشان داده شده در شکل ۴ با استفاده از انحراف معیار معرفی شده توسط معادله‌ی ۸، میزان اختلاط در طول این ریزمجرای ناهمگن مورد مطالعه قرار گرفته و نتایج مربوط به آن در شکل ۵ نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود در مجاورت ناحیه‌هایی که سیال دارای جریان چرخشی باشد میزان اختلاط دچار نوسان می‌شود. به لحاظ فیزیکی قابل پیش‌بینی بود که به دلیل اختلاط بیشتر، میزان انحراف معیار غلظت‌ها در مجاورت گردابه‌ها کاهش یابد، اما افزایش انحراف معیار غلظت‌ها در نزدیکی گردابه‌ها چندان موجه نیست و دلالت بر کاهش اختلاط دارد. دلیل بروز این تناقض این است که معادله‌ی ۸ مقدار اختلاط را مستقل از توزیع سرعت محاسبه می‌کند و بنابراین کم یا زیاد بودن سرعت، یا منفی بودن آن کاملاً نادیده گرفته می‌شود.

برای پرهیز از ایجاد نوسان در میزان اختلاط در طول ریزمجرای از معیار زیر (رابطه‌ی ۱۲) برای محاسبه‌ی کارایی اختلاط استفاده شده است که در آن اثر سرعت



شکل ۷. میزان کارایی اختلاط در طول چند ریزمجرا با دیواره‌ی ناهمگن ( $Sc=50$ ).

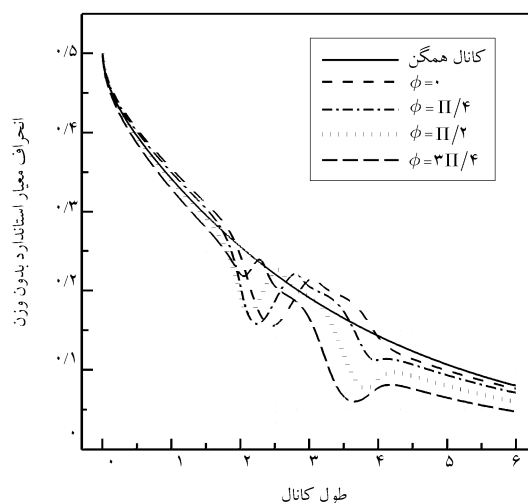
اختلاط تعبیر کرد. بنابراین براساس استفاده از انحراف معیار وزن‌دار غلظت‌ها در هر مقطع از ریزمجرا، کارایی اختلاط را به‌عنوان نسبت میزان اختلاط در هر مقطع به میزان اختلاط پیشینه تعریف می‌کنیم:

$$\varepsilon_m = \frac{1 - \sigma_w}{1 - \sigma_{w, \min}} \quad (13)$$

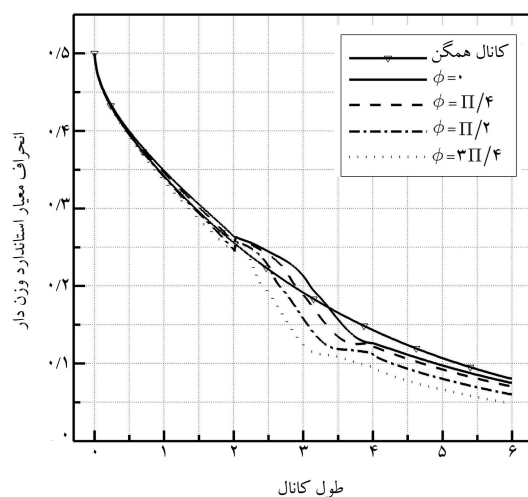
چنانچه اختلاط کامل به وجود آید، مقدار انحراف معیار وزن‌دار غلظت به کم‌ترین میزان خود یعنی صفر می‌رسد ( $\sigma_{w, \min} = 0$ ) و مخرج کسر معادله‌ی ۱۳ برابر با ۱ می‌شود؛ بنابراین کارایی اختلاط به‌صورت  $\varepsilon_m = 1 - \sigma_w$  محاسبه می‌شود. در شکل ۷ میزان کارایی اختلاط برای میدان سرعت و غلظت ارائه شده در شکل ۳ محاسبه و نمودار مربوط به آن رسم شده است.

برای ریزمجراهای بررسی شده در شکل ۷، میزان کارایی اختلاط تا قبل از تکه‌ی ناهمگن (یعنی بازه  $0 < x \leq 2$ ) تقریباً برای همه‌ی ریزمجراها مشابه است و عمده اختلاف بعد از تکه‌ی ناهمگنی رخ می‌دهد و این اختلاف تا پایان ریزمجرا باقی می‌ماند. میزان کارایی اختلاط در انتهای هر ریزمجرا معرف عملکرد آن ریزمجرا در اختلاط است و می‌تواند به‌عنوان معیاری برای مقایسه‌ی عملکرد دو ریزمجرای مختلف باشد. به‌عنوان مثال در شکل ۷ میزان کارایی اختلاط در انتهای ریزمجرای همگن برابر با ۹۱/۹ درصد، و میزان کارایی ریزمجرا برای حالت  $\phi = \pi/2$  برابر با ۹۵/۶ درصد است. ممکن است در ابتدا به نظر برسد که این میزان بهبود چندان درخور توجه نیست، اما دقت بیشتر نشان می‌دهد که در مقادیر بالا از کارایی اختلاط، حتی برای افزایش جزئی در میزان کارایی اختلاط باید طول ریزمجرا را به میزان قابل توجهی افزایش داد. در شکل ۷ مشاهده می‌شود که ریزمجرای همگن در طولی برابر با  $6H$  کارایی اختلاط را به ۹۱/۹ درصد می‌رساند، در حالی که ریزمجرای بهینه ( $\phi = \pi/2$ ) در طولی کم‌تر یعنی  $4H \approx x$  به این میزان کارایی اختلاط دست می‌یابد، و این معادل ۳۰ درصد کاهش طول است. کارایی اختلاط ریزمجرای کاملاً همگن را می‌توان مرجعی مناسب برای مقایسه‌ی سایر ریزمجراها تلقی کرد. در شکل ۸ میزان کارایی نهایی ریزمجراهای مختلف و کارایی نسبی آن‌ها نسبت به ریزمجرای همگن رسم شده است.

با توجه به شکل ۸ دیده می‌شود که برای ریزمجراهای مورد مطالعه که میدان جریان و غلظت آن‌ها در شکل ۳ نشان داده شده، تغییر الگوی ناهمگنی (به‌وسیله‌ی تغییر فاز تابع سینوسی سرعت اعمال شده روی دیوار) می‌تواند حداکثر تا ۴ درصد



شکل ۵. میزان غلظت متوسط و انحراف معیار در طول چند ریزمجرا با دیواره‌ی ناهمگن ( $Sc=50$ ).



شکل ۶. میزان غلظت متوسط و انحراف معیار وزن‌دار با تابع وزنی سرعت در طول چند ریزمجرا با دیواره‌ی ناهمگن ( $Sc=50$ ).

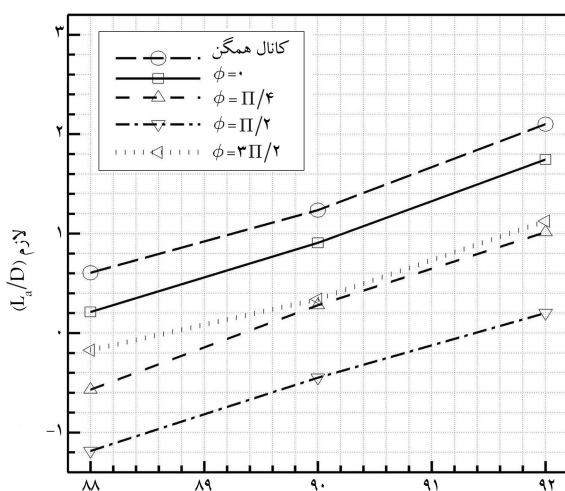
ذرات نیز گنجانده شده است:

$$\sigma_w = \frac{\int_0^1 u(y) (C(y) - C_m)^2 dy}{\int_0^1 u(y) dy} \quad (12)$$

طبق رابطه‌ی ۱۲، به جای این که در ارزیابی میزان اختلاط از انحراف معیار استفاده شود، از انحراف معیار وزن‌دار با تابع وزنی سرعت استفاده می‌شود. در این حالت سنجش میزان اختلاط در طول ریزمجرا مطابق شکل ۶ است.

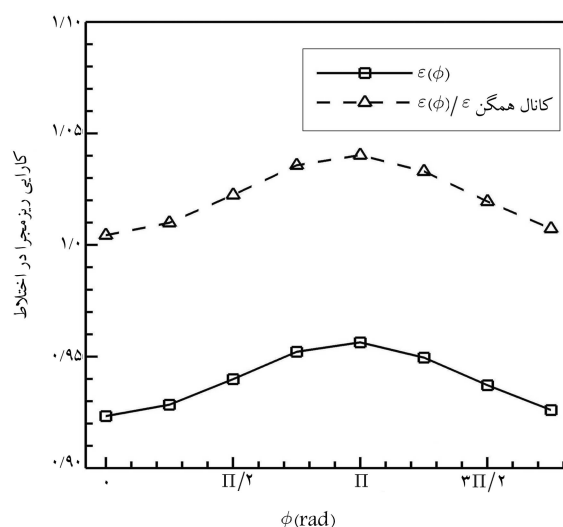
در شکل ۶ دیده می‌شود که با استفاده از انحراف معیار وزن‌دار در ارزیابی اختلاط، بر خلاف معیار قبلی (معادله‌ی ۸)، منحنی مربوط به میزان اختلاط در مجاورت گردابه‌ها نوسانی نیست و وجود گردابه در مسیر حرکت جریان باعث کاهش سریع‌تر انحراف معیار غلظت می‌شود که به‌لحاظ فیزیکی معرف این است که مقدار اختلاط سریع‌تر افزایش یافته است.

**کارایی اختلاط:** مقدار انحراف معیار غلظت‌ها در هر مقطع ( $\sigma_w$ ) معرف میزان ناهمگنی اختلاط در آن مقطع است. در مسئله‌ی مورد بررسی با توجه به توزیع غلظت در ورودی ریزمجرا مقدار  $1 - \sigma_w$  را می‌توان به‌عنوان معیاری از میزان



ع مورد نظر (°)

شکل ۸. میزان کارایی نسبی ریزمجرا و کارایی مطلق ریزمجرا برای چند ریزمجرای ناهمگن ( $Sc = 50$ ).  
در چند ریزمجرای ناهمگن ( $Sc = 50$ ).



phi (rad)

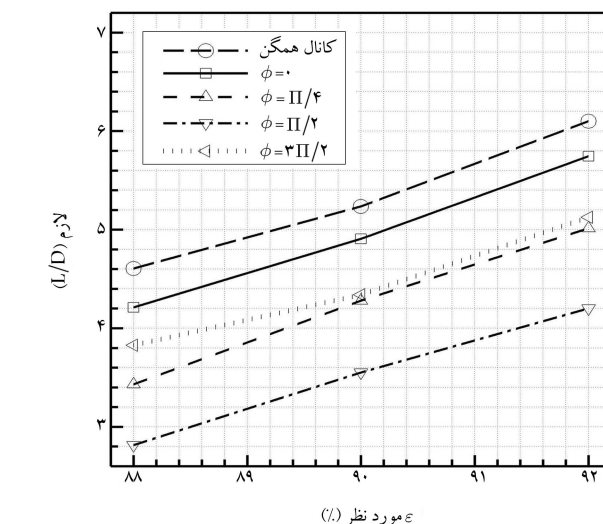
شکل ۹. طول لازم برای رسیدن به راندمان اختلاط دلخواه در چند ریزمجرای ناهمگن ( $Sc = 50$ ).

قسمت آن همگن و قسمت دیگر ناهمگن است. برای نتیجه‌گیری بهتر، در شکل ۱۰ میزان طول مورد نیاز پس از تکه‌ی ناهمگنی مورد بررسی قرار گرفته است؛ یعنی عملکرد خود تکه‌ی ناهمگنی به‌طور صریح‌تری مقایسه شده است؛ به این صورت که پس از گذر جریان از تکه‌ی ناهمگن، چه میزان طول اضافه ( $L_a$ ) لازم است تا راندمان دلخواه برای اختلاط به دست آید. در برخی ریزمجراها برای طول مورد نیاز اعداد منفی مشاهده می‌شود که نشان می‌دهد راندمان مورد نظر درون تکه‌ی ناهمگن ایجاد شده و نیازی به طول اضافی بعد از تکه‌ی ناهمگن نیست.

در اغلب مطالعات صورت گرفته برای مدل‌سازی جریان الکترواستاتیک درون ریزمجراهای ناهمگن با یک تکه‌ی ناهمگن، توزیع زتاپتانسیل به‌صورت یک تابع ناپیوسته فرض شده و در نتیجه طبق مدل هلمهولتز-اسمولوچوفسکی، سرعت لغزشی اعمالی بر دیواره به‌صورت یک توزیع ناپیوسته محاسبه شده است، و به‌عنوان شرط مرزی لغزش وارد معادله‌ی ناویر-استوکس شده است. گفتنی است به‌دلیل محدودیت‌های موجود در فرایند ساخت ریزبازارها، ایجاد چنین توزیع ناپیوسته و منقطع از زتاپتانسیل در مسائل عملی به‌ندرت به وجود می‌آید، و نیز پس از ساخت چنین ریزمجراهای ناهمگنی تعیین دقیق توزیع زتاپتانسیل در آن‌ها هنوز مسئله‌ی چالش‌برانگیز است.

با توجه به موارد یادشده، در این پژوهش مدل‌سازی قطعه‌ی ناهمگنی به دو روش صورت گرفت. روش اول مشابه با مطالعات پیشین توزیع سرعت لغزشی به‌صورت ناپیوسته در نظر گرفته شده، و در روش دوم یک پروفیل پیوسته برای سرعت در نظر گرفته شده که بسیار شبیه به توزیع ناپیوسته است. از آنجا که وجود چنین پروفیل‌هایی در کاربردهای مهندسی محتمل‌تر است، توجه بیشتر در تحلیل این ناهمگنی‌ها ضروری است. از جنبه‌ی عددی شرایط مرزی ناپیوسته نیازمند توجه بیشتر و استفاده از شبکه‌های محاسباتی متراکم‌تر در محل ناپیوستگی هستند.

فرض کنید یک ریزمجرای ناهمگن دارای سه ناحیه با زتاپتانسیل‌های متفاوت باشد. پروفیل‌های ناپیوسته و پیوسته‌ی زتاپتانسیل در شکل ۱۱ نشان داده شده‌اند. در حالت ایده‌آل توزیع زتاپتانسیل (و همچنین توزیع سرعت لغزشی) در همسایگی نواحی مختلف به‌صورت ناپیوسته و مطابق با منحنی نقطه-خط چین است. در این شکل پروفیل‌های پیوسته‌ی دیگری (پروفیل خط‌چین و خط پیوسته) نیز معرفی شده‌اند که تقریباً شبیه به پروفیل ناپیوسته‌اند، اما بازه شامل نقاط ناپیوستگی آن‌ها با یک منحنی



ع مورد نظر (°)

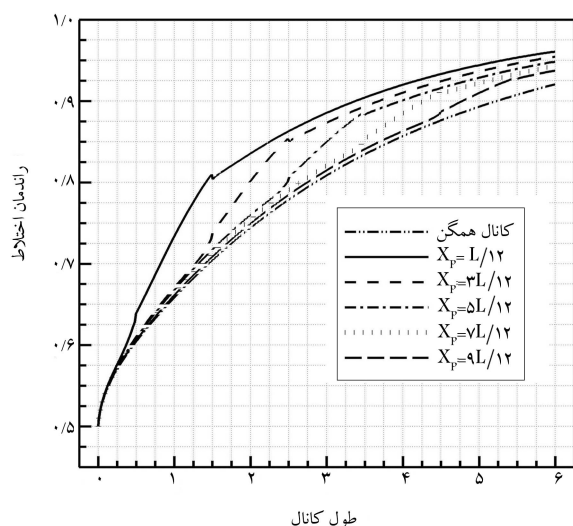
شکل ۱۰. طول لازم برای رسیدن به راندمان اختلاط دلخواه در چند ریزمجرای ناهمگن ( $Sc = 50$ ).

میزان اختلاط ریزمجرا را بهبود دهد. نتیجه‌ی مهمی که از این مطلب دریافت می‌شود این است که برای بهینه‌سازی اختلاط، علاوه بر موقعیت و اندازه‌ی تکه‌ی ناهمگنی، نحوه‌ی توزیع زتاپتانسیل روی ناهمگن نیز حائز اهمیت است. لازم است دوباره اشاره کنیم که این بهبود ظاهراً اندک در راندمان اختلاط ریزمجرا ممکن است منجر به کاهش چشمگیر طول ریزمجرا شود و از این رو نباید بی‌اهمیت تلقی شود.

در نمودار شکل ۹ ارتباط راندمان ریزمجرا و طول آن به‌نحو آشکارتری نشان داده شده است. در این شکل بررسی شده است که برای رسیدن به یک راندمان مشخص برای اختلاط، چه طولی از ریزمجرا مورد نیاز است. به‌عنوان مثالی عددی، برای رسیدن به راندمان اختلاط ۹۰ درصد در یک ریزمجرای همگن نیازمند طولی برابر با  $5/3H$  هستیم، در حالی که در ریزمجرای بهینه این میزان اختلاط در طولی برابر با  $3/5H$  تأمین می‌شود. یعنی طول ریزمجرا در این حالت می‌تواند ۳۴ درصد کاهش یابد.

در شکل ۹ طول مورد نیاز برای اختلاط متشکل از دو بخش است، که یک





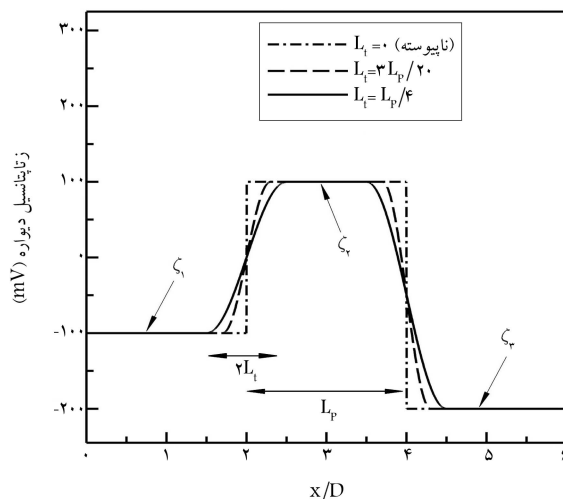
شکل ۱۳. اثر تغییر موقعیت تکه‌ی ناهمگنی بر عملکرد اختلاط (طول تکه‌ی ناهمگنی  $L_p = L/6$ ).

پروفیل کاملاً ناپیوسته به پروفیل‌های پیوسته، مقدار اختلاط در طول ریزمجرای تفاوت محسوسی نمی‌کند. به علاوه، پروفیل‌های مختلف تأثیر ناچیزی بر میزان دبی عبوری از ریزمجرای دارند. عدم حساسیت اختلاط محاسبه‌شده با استفاده از پروفیل‌های ناپیوسته و پیوسته نشان می‌دهد که حل نکردن معادله‌ی بواسان مربوط به میدان الکتریکی و فرض تناسب سرعت لغزشی روی دیوار با زتانتانسیل آن در مدل هلمهولتز-اسمولوچوفسکی در محاسبه‌ی اختلاط درون ریزمجرای منجر به خطای قابل توجهی نمی‌شود.

به بیان دیگر در شبیه‌سازی کاملی از جریان الکترواسموتیک درون یک ریزمجرای با توزیع زتانتانسیل منقطع روی دیواره، ابتدا میدان پتانسیل الکتریکی حل می‌شود که بنا به ماهیت بیضوی معادله‌ی حاکم بر آن، درون حوزه‌ی حل، به غیر از دیواره‌ها به صورت پیوسته خواهد بود. لذا سرعت لغزشی ناشی از این میدان الکتریکی ماهیت پیوسته خواهد داشت؛ در حالی که مدل هلمهولتز-اسمولوچوفسکی این توزیع سرعت لغزشی را متناسب با زتانتانسیل فرض می‌کند. شکل ۱۲ مشخص می‌کند که استفاده از این فرض تفاوت محسوسی در محاسبه‌ی میزان اختلاط نخواهد داشت.

**اثر موقعیت تکه‌ی ناهمگن:** مقادیر محاسبه‌شده برای میزان اختلاط در طول ریزمجرای (شکل ۱۳) نشان می‌دهد که برای یک تکه‌ی ناهمگن با طول مشخص، هر قدر تکه‌ی ناهمگنی به ورودی ریزمجرای نزدیک‌تر باشد، عملکرد ریزمجرای برای اختلاط بهتر خواهد بود. بنابراین در مواردی که هدف از طراحی ریزمجرای دستیابی به مقدار اختلاط مشخصی باشد، قراردادن تکه‌ی ناهمگنی در ابتدای ریزمجرای باعث می‌شود طول مورد نیاز برای ریزمجرای به‌طور چشمگیری کاهش یابد. البته قراردادن تکه‌ی ناهمگنی در ابتدای ریزمجرای باعث می‌شود گرده‌ای حاصل بر جریان ورودی ریزمجرای اثر بگذارد، به نحوی که در ورودی جریان‌های برگشتی ایجاد شود.

**اثر اندازه‌ی تکه‌ی ناهمگن:** در شکل ۱۴ بهبود اختلاط از راه تغییر اندازه‌ی تکه‌ی ناهمگنی درون یک ریزمجرای دارای یک تکه‌ی ناهمگنی در دیواره‌ی پایین مورد بررسی قرار گرفته است. چنان که مشاهده می‌شود، افزایش طول تکه‌ی ناهمگنی باعث بهبود در راندان اختلاط تا حدود ۴ درصد می‌شود. نکته‌ی مهمی که از این شکل دریافت می‌شود این است که تکه‌های ناهمگنی کوچک‌تر به‌نحو مؤثرتری اختلاط را بهبود می‌دهند. وجود یک تکه‌ی ناهمگنی با طول  $L_p = H$  (ارتفاع ریزمجرای) میزان اختلاط را در مقایسه با ریزمجرای کاملاً همگن ۲/۵ درصد

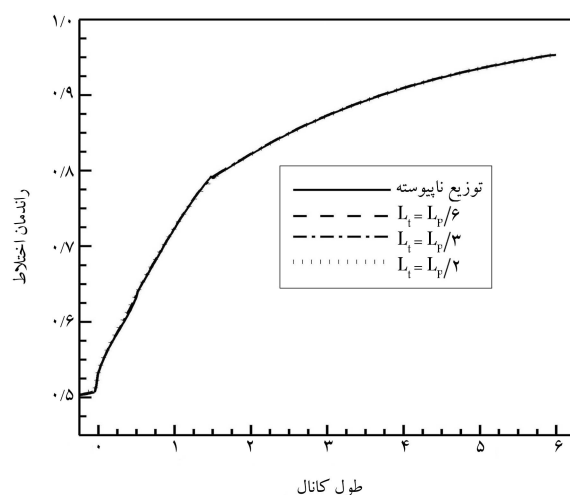


شکل ۱۴. پروفیل ناپیوسته و پروفیل‌های پیوسته‌ی پیشنهادی برای زتانتانسیل.

پیوسته جایگزین شده است. این منحنی پیوسته به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$\zeta(x) = \begin{cases} \zeta_1, & 0 < x \leq x_1 - L_t \\ A_{1r}^+ + A_{1r}^- \sin \omega(x - x_1) & |x - x_1| < L_t \\ \zeta_2, & x_1 + L_t < x \leq x_2 - L_t \\ A_{2r}^+ + A_{2r}^- \sin \omega(x - x_2) & |x - x_2| < L_t \\ \zeta_3, & x_2 + L_t < x \leq L \end{cases} \quad (14)$$

در  $A_{ij}^\pm = (\zeta_i \pm \zeta_j)/2$  و  $\omega = \pi/2L_t$  است. پارامترهای هندسی  $L_p$  و  $L_t$  در شکل ۱ نشان داده شده‌اند.  $2L_t$  معرف طولی است که طی آن مقدار زتانتانسیل (یا سرعت لغزشی) در یک ناحیه با مقدار آن در ناحیه‌ی مجاور متفاوت است. در شکل ۱۲ حل عددی جریان درون ریزمجرای به همراه یک تکه‌ی ناهمگن با استفاده از پروفیل منقطع و پروفیل‌های پیوسته‌ی معادل نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود، با تغییر پروفیل مربوط به بخش ناهمگنی از یک



شکل ۱۵. میزان اختلاط در طول ریزمجرای برای پروفیل‌های منقطع و پیوسته از سرعت لغزشی در دیواره.

از طریق انحراف معیار غلظت با تابع وزنی سرعت صورت پذیرد. با استفاده از این معیار عملکرد یک تکه ناهمگنی واقع بر دیواره ریزمجرای در ایجاد اختلاط ارزیابی شده است. نتایج عددی نشان داد که برای رسیدن به اختلاط بهتر درون ریزمجرای مناسب است که به جای استفاده از یک تکه ناهمگنی بزرگ از چند تکه ناهمگنی با اندازه‌های کوچک‌تر استفاده شود. به علاوه هرچه موقعیت تکه ناهمگنی به ورودی ریزمجرای نزدیک‌تر باشد، عملکرد اختلاطی آن بهتر خواهد شد. با استفاده از این نتایج می‌توان طول لازم برای اختلاط درون ریزمجرای را بهینه کرد.

## فهرست علائم

$C$ : غلظت، ( $\text{mol/m}^3$ )

$E_x$ : میدان پتانسیل اعمالی در جهت طولی ریزمجرای، ( $\text{V/m}$ )

$L_p$ : طول قطعه ناهمگنی، (m)

$L_t$ : طول منحنی گذار بین دو مقدار زتاپتانسیل، (m)

Re: عدد رینولدز

Sc: عدد اشتروال

$u_s$ : سرعت لغزش در دیواره، (m/s)

$x$ : مختصات در جهت طول ریزمجرای، (m)

$y$ : مختصات در جهت ارتفاع ریزمجرای، (m)

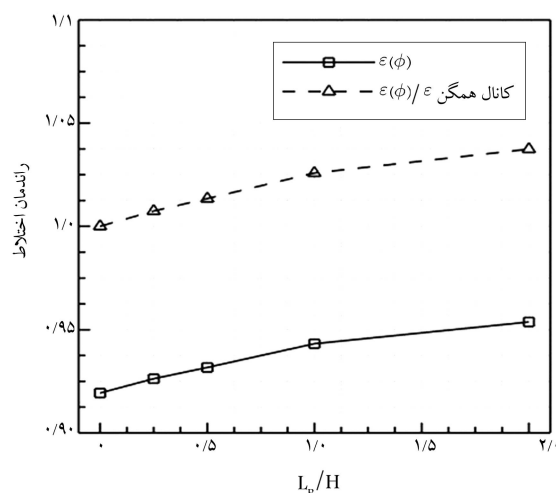
## نشانه‌های یونانی

$\varepsilon$ : عبوردهی خلاء، ( $\text{C/Vm}$ )  $\varepsilon = 8.854 \times 10^{-12}$

$\varepsilon_r$ : ضریب عبوردهی نسبی سیال،  $\varepsilon_r = 78.5$

$\mu$ : لزجت سیال، ( $\text{Ns/m}^2$ )

$\zeta$ : زتاپتانسیل دیواره، (V)



شکل ۱۴. اثر اندازه‌ی تکه ناهمگنی بر عملکرد اختلاط.

افزایش می‌دهد، در حالی که افزایش راندمان برای تکه ناهمگن با طول  $L_p = 2H$  برابر با ۴ درصد است. لذا مناسب است به جای استفاده از تکه‌های ناهمگنی بزرگ، از چند تکه ناهمگنی کوچک‌تر استفاده شود.

## نتیجه‌گیری

در این مقاله اختلاط جریان الکترواسموتیک درون ریزمجرای ناهمگن به صورت کمی مورد مطالعه قرار گرفته است. بررسی جریان درون ریزمجرای ناهمگن که در آن‌ها یک تکه ناهمگنی با بار مخالف سایر نقاط ریزمجرای وجود دارد، نشان می‌دهد که در مجاورت تکه ناهمگنی، گردابه‌ی چسبیده به دیواره ایجاد می‌شود که میزان اختلاط را افزایش می‌دهد. با بررسی معیارهای رایج برای ارزیابی اختلاط مشخص شد که سنجش اختلاط درون جریان‌های پیچیده شامل گردابه می‌تواند به خوبی

## پانوشته‌ها

1. Electro-osmotic
2. microchannels
3. heterogeneous patch
4. micro-mixers
5. micro-devices
6. micro-flows
7. passive
8. active
9. lab-on-a-chip
10. lamination
11. hydrodynamic focusing
12. pressure-driven
13. chaotic mixing
14. Electrokinetic
15. Helmholtz-Smoluchowski
16. Zeta-potential
17. coating
18. Overbeek

## منابع (References)

1. Chen, J.K., Luo, W.J. and Yang, R.J. "Electroosmotic flow driven by DC and AC electric fields in curved microchannels", *Jap. J. Appl Phys*, **45**, pp. 7983-7990 (2006).
2. Chang, C.C. and Yang, R.J. "Electrokinetic mixing in Microfluidic systems", *Microfluid Nanofluid*, **3**, pp. 501-525 (2007).
3. Chung, Y.C., Hsu, Y.L., Jen, C.P., Lu, M.C. and Lin, Y.C. "Design of passive mixers utilizing microfluidic self-circulation in the mixing chamber", *Lab on a Chip*, **4**, pp. 70-77 (2004).
4. Wong, S.H., Ward, M.C.L. and Wharton, C.W. "Micro T-mixer as a rapid mixing micromixer", *Sensors Actuators B*, **100**, pp. 365-385 (2004).
5. Knight, J.B., Vishwanath, A., Brody, J.P. and Austin, R.H. "Hydrodynamic focusing on a silicon chip: mixing



- nanoliters in microseconds", *Phys Rev Lett*, **80**, pp. 3863-3866 (1998).
6. Yang, R.J., Chang, C.C., Huang, S.B. and Lee, G.B. "A new focusing model and switching approach for electrokinetic flow inside microchannels", *Micromech Microeng*, **15**, pp. 2141-2148 (2005).
7. Hardt, S., Pennemann, H. and Schönfeld, F. "Theoretical and experimental characterization of a low-Reynolds number split and-recombine mixer", *Microfluid Nanofluid*, **2**, pp. 237-248 (2006).
8. Aref, H. "Stirring by chaotic advection", *J. of Fluid Mechanics*, **143**, pp. 1-21 (1984).
9. Erickson, D. and Li, D. "Influence of surface heterogeneity on electrokinetically driven microfluidic mixing", *Langmuir*, **18**, pp. 1883-1892 (2002).
10. Fushinobu, K. and Nakata, M. "An experimental and numerical study of a liquid mixing device for Microsystems", *Trans. ASME J Electronic Packaging*, **127**, pp. 141-146 (2005).
11. Lee, L.M., Hau, W.L.W., Lee, Y.K. and Zohar, Y. "In-plane vortex flow in microchannels generated by electroosmosis with patterned surface charge", *Micromech. Microeng*, **16**, pp. 17-26 (2006).
12. Zhang, J., He, G. and Liu, F. "Electro-osmotic flow and mixing in heterogeneous microchannels", *Phys. Rev. E*, **73**, 056305 pp. 1-8 (2006).
13. Lee, Y.K., Lee, L.M., Hau, W.L.W. and Zohar, Y. "Two-dimensional analysis of electrokinetically driven out-of-plane vortices in a microchannel liquid flow using patterned surface charge", *MEMS*, **16**, pp. 58-67 (2007).
14. Horiuchi, K., Dutta, P. and Ivory, C.F. "Electroosmosis with step changes in zeta potential in microchannels", *AIChE*, **53**, pp. 2521-2533 (2007).
15. Qian, S. and Bau, H.H. "A chaotic electroosmotic stirrer", *Anal Chem*, **74**, pp. 3616-3625 (2002).
16. Chen, C.K. and Cho, C.C. "Electrokinetically driven flow mixing utilizing chaotic electric fields", *Microfluid Nanofluid*, **5**, pp. 785-793 (2008).
17. Chang, C.C. and Yang, R.J. "A particle tracking method for analyzing chaotic electroosmotic flow mixing in 3-D microchannels with patterned charged surfaces", *J. Micromech Microeng*, **16**, pp. 1453-1462 (2006).
18. Wu, Z. and Li, D. "Mixing and flow regulating by induced-charge electrokinetic flow in a microchannel with a pair of conducting triangle hurdles", *Microfluidics and Nanofluidics*, **5**(1), pp. 65-76 (2008).
19. Wang, D., Summers, J.L. and Gaskell, P.H. "Modelling of electrokinetically driven mixing flow in microchannels with patterned blocks", *Computers and Mathematics with Applications*, **55**(7), pp. 1601-1610 (2008).
20. Chang, C.C. and Yang, R.J. "Computational analysis of electrokinetically driven flow mixing in microchannels with patterned blocks", *J. of Micromechanics and Microengineering*, **14**(4), pp. 550-558 (2004).
21. Stroock, A.D., Weck, M., Chiu, D.T., Huck, W.T.S., Kenis, P.J.A., Ismagilov, R.F. and Whitesides, G.M. "Patterning electro-osmotic flow with patterned surface charge", *Physical Review Letters*, **84**(15), pp. 3314 (2000).
22. Hau, W.L.W., Trau, D.W., Sucher, N.J., Wong, M. and Zohar, Y. "Surface-chemistry technology for microfluidics", *J. of Micromechanics and Microengineering*, **13**(2), pp. 272-278 (2003).
23. Schasfoort, R.B.M., Schlautmann, S., Hendrikse, J. and van den Berg, A. "Field-effect flow control for microfabricated fluidic networks", *Science*, **286**(5441), pp. 942-945 (1999).
24. Erickson, D. and Li, D. "Influence of surface heterogeneity on electrokinetically driven microfluidic mixing", *Langmuir*, **18**(5), pp. 1883-1892 (2002).
25. Chen, C.K. and Cho, C.C. "Electrokinetically driven flow mixing utilizing chaotic electric fields", *Microfluidics and Nanofluidics*, **5**(6), pp. 785-793 (2008).
26. Yoon, M.S., Kim, B.J. and Sung, H.J., "Pumping and mixing in a microchannel using AC asymmetric electrode arrays", *Int. J. of Heat and Fluid Flow*, **29**(1), pp. 269-280 (2008).
27. Mirbozorgi, S.A., Niazmand, H. and Renksizbulut, M. "Electro-osmotic flow in reservoir-connected flat microchannel with non-uniform zeta potential", *J. Fluids Eng., Transactions of the ASME*, **128**(6), pp. 1133-1143 (2006).
28. Ramirez, J.C. and Conlisk, A.T. "Formation of vortices near abrupt nano-channel height changes in electroosmotic flow of aqueous solutions", *Biomed Microdevices*, **8**, pp. 235-330 (2006).
29. Cummings, E.B., Griffiths, S.K., Nilson, R.H. and Paul, P.H. "Conditions for similitude between the fluid velocity and electric field in electroosmotic flow", *Anal. Chem.*, **72**, pp. 2526-2532 (2000).
30. Santiago, J.G. "Electroosmotic flows in microchannels with finite inertial and pressure forces", *Anal. Chem.*, **73**, pp. 2353-2365 (2001).