

شناسایی پارامترهای سینماتیکی و دینامیکی یک بازوی ماهر رباتیکی صفحه‌یی با چهار درجه آزادی

سیده‌مژنی صادقی* (دانشیار)

سید محمدرضا سیدنورانی (دانشجوی دکتری)

احمد قنبری (دانشیار)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز

مهندسی مکانیک شریف
دربی ۳-۴۹، شماری ۱، ص. ۱۰۹۳ (پادداشت‌نشی)

پیمچیدگی معادلات حاکم بر بازوهای ماهر رباتیکی سبب شده است روش‌های متنوعی برای کنترل آن‌ها ارائه شود. مشخصه‌های دینامیکی بازوها در طراحی این روش‌ها معلوم و معین در نظر گرفته می‌شوند. این در حالی است که مشخصه‌های یادشده در بیشتر موارد به دلایلی چون نواقص ساخت، استهلاک یا طبیعت خود موضوع (مثلاً اصطکاک) به‌طور دقیق در دست نیستند. از این رو در این نوشتار برآنیم تا ضمن ارائه‌ی یک مدل دینامیکی ساده برای ربات و شبیه‌سازی آن توسط نرم‌افزار MATLAB، روشی مبتنی بر کم‌ترین مربعات برای شناسایی پارامترهای یک بازوی ماهر^۱ صفحه‌یی با چهار درجه‌ی آزادی به دست آوریم. مدل دینامیکی ارائه‌شده شامل کم‌ترین پارامترهای مستقل در معادلات حاکم بر حرکت خواهد بود. روش ارائه‌شده برای شناسایی صحیح پارامترهای مجهول، کمینه‌کردن مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس هم‌پراش^۲ خروجی‌های آلوده به اغتشاش است. نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی تخمین بسیار خوبی از مقادیر مجهول برآورد می‌کند.

واژگان کلیدی: بازوهای ماهر رباتیکی، شناسایی سیستم، کم‌ترین مربعات خطا، دینامیک چندبندی‌ها، دینامیک معکوس، واسنجی.

مقدمه

در دو دهه‌ی اخیر توجه روزافزون پژوهش‌گران به بازوهای ماهر رباتیکی چشم‌گیر بوده است. تحلیل‌های سینماتیکی، دینامیکی و به‌ویژه کنترلی بازوهای ماهر از فعال‌ترین حوزه‌های تحقیقاتی رباتیک و مکاترونیک (تلفیق مکانیک و الکترونیک) محسوب می‌شود؛ چرا که رفتار این ابزارهای مکانیکی برنامه‌پذیر به‌صورت معادلاتی غیرخطی و کاملاً جفت‌شده با هم ظاهر می‌شود.^[۴-۱] در این میان ربات‌های مکانیکی دارای درجات آزادی اضافی^۳ نیز موضوع جالب دیگری است که توجه علاقه‌مندان به زمینه‌ی رباتیک و کنترل را بیش از پیش به خود جلب کرده است.^[۵-۱۰] پیمچیدگی معادلات حاکم سبب ارائه‌ی روش‌هایی متنوع برای کنترل و هوشمند کردن بازوهای رباتیکی شده است. از سوی دیگر الگوهای کنترلی ارائه‌شده با این پیش‌فرض طراحی می‌شوند که مشخصه‌های سینماتیکی و دینامیکی بازوهای ربات — مانند طول، جرم، مرکز جرم، لنگرهای اینرسی و ضریب اصطکاک — معلوم و معین‌اند. این در حالی است که پیش‌فرض یادشده در بیشتر موارد به دلایلی چون نواقص ساخت، استهلاک، یا طبیعت خود موضوع (مثلاً اصطکاک) امکان‌پذیر نیست. گفتنی است که در اغلب موارد تمایل بر این است که مشخصه‌های بازوها و مفصل ربات، پس از سرهم‌بندی آن‌ها، در مجموعه‌یی واحد در اختیار باشد یا به عبارت دیگر، دستگاه برای یک مدل کنترلی معین واسنجی^۴ شود.^[۱۱، ۱۲]

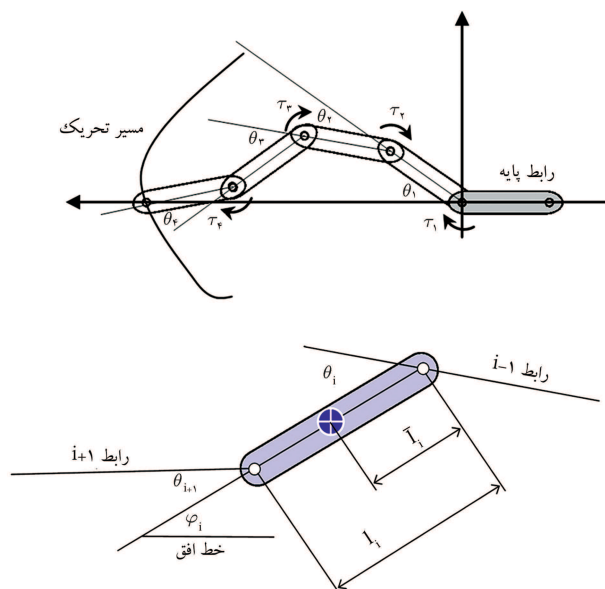
* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۰/۶/۱۹، اصلاحیه ۱۳۹۰/۱۰/۷، پذیرش ۱۳۹۱/۲/۱۰.

morteza@tabrizu.ac.ir
smrs.noorani@tabrizu.ac.ir
a-ghanbari@tabrizu.ac.ir

بازوهای ماهر رباتیکی به‌طور کلی به دو گروه موازی و سری تقسیم‌بندی می‌شوند. در بازوهای موازی مجری نهایی^۵ توسط تعدادی رابط‌هایی که مستقیماً به پایه متصل شده‌اند هدایت می‌شود و در نتیجه چالاکی^۶ آن‌ها محدود است اگرچه دقت بالایی در حرکت دارند. در مقابل، بازوهای سری دنباله‌یی از رابط‌های پشت سر هم را شامل می‌شوند که در آن تنها رابط اول به پایه متصل است و مجری نهایی در انتهای رابط آخر قرار می‌گیرد؛ و به همین دلیل چالاکی بالایی دارد، اگرچه با انباشتگی خطا در حرکت مجری نهایی مواجه است؛ زیرا اندک خطایی در یکی از بازوهای ابتدایی به دینامیک بازوی بعد آن وارد شده و موجب خطایی مضاعف بر حرکت آن می‌شود. به این ترتیب در هر مرحله خطا انباشته شده و به بازوی جلویی وارد می‌شود و این روند تا مجری نهایی ادامه می‌یابد. در اختیار نبودن پارامترهای دقیق در مدل دینامیکی یک ربات، خود می‌تواند به‌عنوان عامل اصلی خطا مطرح باشد.^[۱۳]

با یافتن مشخصه‌های سینماتیکی و دینامیکی بازوها براساس پاسخ ربات به یک ورودی غنی، می‌توان دقیق‌ترین مدل دینامیکی را برای آن به دست آورد. از این رو مبحث شناسایی مشخصه‌های سینماتیکی و دینامیکی بازوهای رباتیکی موضوع نسبتاً جدیدی است که در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. چنانچه مدل دینامیکی ربات در دست باشد، شیوه‌ی معمول در شناسایی پارامترهای آن کمینه‌کردن خطای خروجی‌های اندازه‌گیری شده از نمونه‌ی واقعی و محاسبه‌شده از



شکل ۱. مدل بازوی ماهر صفحه‌یی با چهار درجه آزادی.

دیدگاه نیوتنی دارد آن است که نیروهای قیدی و داخلی، که مجموع کار آن‌ها روی سیستم صفر است، در تحلیل مسئله وارد نشده و از این رو معادلات حرکت مستقیماً به دست می‌آیند.^[۱۸] لذا در این مبحث نیز از روش لاگرانژی برای استخراج معادلات استفاده خواهیم کرد.

در شکل ۱ یک بازوی رباتیکی سری، شامل چهار مفصل لولایی که چهار درجه‌ی آزادی برای یک سازوکار صفحه‌یی فراهم می‌آورد نشان داده شده است. پایه‌ی ربات رابط صفر و رابط‌های بعدی به ترتیب از ۱ تا ۴ شماره‌گذاری می‌شوند. زوایای نسبی بین هر دو رابط مجاور نیز با θ_i ها نشان داده شده است. بنابراین زاویه‌ی مطلق هر رابط نسبت به محور افق برابر خواهد بود با:

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_i = \varphi_{i-1} + \theta_i = \sum_{r=1}^i \theta_r \quad (1)$$

اگر فرض کنیم مرکز جرم هر رابط در فاصله‌ی $\rho_i l_i$ از $\bar{l}_i$ ($0 < \rho_i < 1$) از ابتدای رابط باشد، آنگاه سرعت مرکز جرم رابط p ام چنین محاسبه خواهد شد:

$$\dot{\mathbf{v}}_p = \sum_{i=1}^{p-1} l_i \dot{\varphi}_i \Upsilon \mathbf{e}_i + \rho_p l_p \dot{\varphi}_p \Upsilon \mathbf{e}_p \quad (2)$$

که در آن، $\mathbf{e}_i$ بردار یگانه در امتداد طولی رابط i ام است و ماتریس دوران $\mathbf{r} = [0 \quad -1 \quad 0]$ آن را 90° در خلاف جهت عقربه‌های ساعت خواهد چرخاند.^[۲۱] مجذور سرعت نقطه‌ی مرکز جرم رابط p ام نیز برابر خواهد شد با:

$$\dot{\mathbf{v}}_p^T = \dot{\mathbf{v}}_p \cdot \dot{\mathbf{v}}_p = \rho_p l_p \dot{\varphi}_p \left(\rho_p l_p \dot{\varphi}_p + 2 \sum_{j=1}^{p-1} l_j \dot{\varphi}_j c_{pj} \right) + \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^{p-1} l_i l_j \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j c_{ij} \quad (3)$$

که در آن، $c_{ij} \equiv \cos \varphi_{ij} \equiv \cos(\varphi_i - \varphi_j)$ است. بنابراین انرژی جنبشی

مدل ریاضی، به‌ازای ورودی یکسان است.^[۱۵، ۱۶] از سنتی‌ترین و در عین حال متداول‌ترین معیارها برای کمینه‌کردن خطا، می‌توان به معیار کم‌ترین مربعات (LS) یا کم‌ترین مربعات بازگشتی (RLS) اشاره کرد که در انواع سیستم‌هایی که نسبت به پارامترهای مجهول خطی‌اند کاربرد دارند.^[۱۶] شایان ذکر است که روش‌های دیگری مانند روش پیش‌بینی خطای تک‌گامی^۷ یا روش بیشترین احتمال^۸ در شناسایی سیستم‌هایی که مدلی خطی نسبت به پارامترهای مجهول مسئله دارند و توزیع خطای آن‌ها نیز گاوس‌گونه باشد، در نهایت به معادله‌ی رگرسیون خطی کم‌ترین مربعات خطا منتهی خواهند شد.^[۱۶]

در این نوشتار بر آنیم تا پارامترهای مدل دینامیکی یک بازوی ماهر سری با چهار درجه‌ی آزادی در صفحه را شناسایی کنیم. یادآور می‌شود که در ادبیات فن مدل دینامیکی رایجی برای بازوهای رباتیکی براساس پارامترهای دناویت-هارتنگ استفاده می‌شود که جملات متناظر با شتاب‌های کریولیس صریحاً در آن ظاهر شده‌اند.^[۱۸، ۱۷] این موضوع سبب بروز پارامترهای متعدد در معادلات حرکت می‌شود، پارامترهایی که شناسایی آن‌ها در یک مدل مجهول به افزایش چشم‌گیر محاسبات می‌انجامد. از این رو در این نوشتار ابتدا با انتخاب زوایای مطلق رابط‌ها (به‌جای زوایای نسبی بین آن‌ها) به‌عنوان مختصه‌های تعمیم‌یافته‌ی سیستم، مدل دینامیکی بازوی مکانیکی را استخراج می‌کنیم تا از این راه جملات مربوط به شتاب‌های کریولیس در بطن شتاب‌های جانب مرکزی پنهان شوند و معادلات حرکت به‌شکلی ساده، متقارن و با کم‌ترین پارامترهای مستقل به دست آیند.^[۲۰، ۱۹] سپس با شبیه‌سازی بازوی ماهر در نرم‌افزار MATLAB، گشتاورهای مورد نیاز در مفاصل ربات براساس یک مجموعه مسیر^۹ معین در فضای مفصلی محاسبه می‌شوند. این مسیرهای معین مسیرهای تحریک برای شناسایی خواهند بود؛ به‌عبارت دیگر از دینامیک معکوس به‌منظور شبیه‌سازی و داده‌گیری استفاده خواهیم کرد.^[۱۸] در ادامه با اضافه‌کردن اغتشاش به گشتاورهای محاسبه‌شده، که به‌عنوان خروجی‌های اندازه‌گیری شده در نظر گرفته می‌شوند، پارامترهای مجهول در مدل دینامیکی سیستم را شناسایی خواهیم کرد. برای شناسایی هرچه بهتر پارامترهای مجهول باید مسیر تحریکی غنی برای داده‌گیری انتخاب کنیم. براین اساس از دو مسیر متفاوت برای تحریک سیستم استفاده شده و نتایج به دست آمده مؤید اهمیت تحریک غنی هستند.

در آخرین نکته را نیز اشاره می‌کنیم که سیستم رباتیکی مورد بحث، سیستمی با چند ورودی و چند خروجی است که به‌دلیل غیرخطی بودن و جفت‌بودن معادلات حاکم بر آن، خروجی‌های اندازه‌گیری شده داده‌هایی مستقل از هم نخواهند بود. بنابراین نمی‌توان معیار کم‌ترین مربعات خطا را برای هریک از اندازه‌گیری‌ها به‌طور مستقل به کار گرفت. روش ارائه‌شده برای شناسایی صحیح پارامترهای مجهول، کمینه‌کردن مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس هم‌پراش خروجی‌های آلوده به اغتشاش است. در این روش انتشار خطا از طریق زنجیره‌ی سینماتیکی ربات در مفاصل جلویی مورد توجه قرار می‌گیرد.

تحلیل دینامیکی

برای استخراج معادلات حرکت هر سیستم دینامیکی دو روش با دیدگاه‌های متفاوت ارائه شده است: ۱. دیدگاه نیوتنی که مبتنی است بر تساوی برداری بین برآیند نیروهای وارد بر سیستم و نیروهای اینرسی؛ ۲. دیدگاه لاگرانژی که مبتنی است بر توازن انرژی و کار انجام‌شده توسط نیروهای فعال در سیستم. عمده مزیتی که دیدگاه لاگرانژی بر

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} c_{12} & \alpha_{13} c_{13} & \alpha_{14} c_{14} \\ \alpha_{12} c_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} c_{23} & \alpha_{24} c_{24} \\ \alpha_{13} c_{13} & \alpha_{23} c_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} c_{34} \\ \alpha_{14} c_{14} & \alpha_{24} c_{24} & \alpha_{34} c_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \\ \ddot{\varphi}_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} s_{12} & \alpha_{13} s_{13} & \alpha_{14} s_{14} \\ -\alpha_{12} s_{12} & 0 & \alpha_{23} s_{23} & \alpha_{24} s_{24} \\ -\alpha_{13} s_{13} & -\alpha_{23} s_{23} & 0 & \alpha_{34} s_{34} \\ -\alpha_{14} s_{14} & -\alpha_{24} s_{24} & -\alpha_{34} s_{34} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1^2 \\ \dot{\varphi}_2^2 \\ \dot{\varphi}_3^2 \\ \dot{\varphi}_4^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \cos \varphi_1 \\ \beta_2 \cos \varphi_2 \\ \beta_3 \cos \varphi_3 \\ \beta_4 \cos \varphi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{pmatrix} \quad (9)$$

یا به‌طور فشرده:

$$M(\Phi) \ddot{\Phi} + N(\Phi) \dot{\Phi}^2 + G(\Phi) = D\tau \quad (10)$$

چنان‌که ملاحظه می‌شود معادلات ۹ و ۱۰ تعادل بین مجموع گشتاورهای اینرسی و گرانشی، و برآیند گشتاورهای ورودی از محرک‌های متصل به هریک از رابط‌ها را توصیف می‌کنند. به‌علاوه گشتاورهای اینرسی به‌صورت حاصل ضرب یک ماتریس متقارن (ماتریس جرم $M(\Phi)$) در بردار عامل شتاب‌های مماسی، و حاصل ضرب یک ماتریس پادمتقارن $N(\Phi)$ در بردار عامل شتاب‌های جانب مرکزی ظاهر شده است. همچنین جملات مربوط به شتاب‌های کربولیس در این معادلات آشکارا ظاهر نشده‌اند. این موضوع سبب شده است که ضرایب مجهول در عناصر مشابه دو ماتریس $M(\Phi)$ و $N(\Phi)$ ، یعنی α_{ij} ها، یکسان باشند و بتوان به معادلاتی ساده‌تر دست یافت:

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} A_{11} + \alpha_{12} A_{21} + \alpha_{13} A_{31} + \alpha_{14} A_{41} \\ \alpha_{12} A_{12} + \alpha_{22} A_{22} + \alpha_{23} A_{32} + \alpha_{24} A_{42} \\ \alpha_{13} A_{13} + \alpha_{23} A_{23} + \alpha_{33} A_{33} + \alpha_{34} A_{43} \\ \alpha_{14} A_{14} + \alpha_{24} A_{24} + \alpha_{34} A_{34} + \alpha_{44} A_{44} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 G_1 \\ \beta_2 G_2 \\ \beta_3 G_3 \\ \beta_4 G_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{pmatrix} \quad (11)$$

در این رابطه، G_i نماینده‌ی توابع متناظر با ضرایب مجهول در نیروهای گرانشی و L_i مجموع عناصر سطر i ام از معادلات حرکت بوده و تابع A_{ij} نیز به‌صورت رابطه‌ی ۱۲ تعریف می‌شود:

$$A_{ij} = \dot{\varphi}_i \cos \varphi_{ij} - \dot{\varphi}_i^2 \sin \varphi_{ij} \quad (12)$$

یادآور می‌شود معادلات ارائه‌شده در رابطه‌ی ۱۱ ساده‌ترین شکل معادلات حرکت برای یک بازوی ماهر صفحه‌یی است که دارای کم‌ترین پارامترهای مستقل از هم β_i ها و α_{ij} ها است.

$$T = \frac{1}{\dot{\varphi}} \sum_{p=1}^4 \left(m_p \bar{v}_p^2 + \bar{I}_p \omega_p^2 \right) = \frac{1}{\dot{\varphi}} \sum_{p=1}^4 m_p \left(\bar{v}_p^2 + \kappa_p^2 \dot{\varphi}_p^2 \right) \equiv \frac{1}{\dot{\varphi}} \dot{\Phi}^T M(\Phi) \dot{\Phi} = \frac{1}{\dot{\varphi}} \alpha_{11} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{\dot{\varphi}} \alpha_{22} \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{\dot{\varphi}} \alpha_{33} \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{\dot{\varphi}} \alpha_{44} \dot{\varphi}_4^2 + \dot{\varphi}_1 \alpha_{12} c_{12} \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_1 \alpha_{13} c_{13} \dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_1 \alpha_{14} c_{14} \dot{\varphi}_4 + \dot{\varphi}_2 \alpha_{23} c_{23} \dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_2 \alpha_{24} c_{24} \dot{\varphi}_4 + \dot{\varphi}_3 \alpha_{34} c_{34} \dot{\varphi}_4 \quad (4)$$

که در آن، Φ بردار شامل زوایای مطلق رابط‌ها و $M(\Phi)$ ماتریسی متقارن و مثبت معین است که به ماتریس جرم شناخته می‌شود و عناصر آن عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= l_1^2 \left[m_1 (\rho_1^2 + \sigma_1^2) + m_2 + m_3 + m_4 \right], \\ \alpha_{22} &= l_2^2 \left[m_2 (\rho_2^2 + \sigma_2^2) + m_3 + m_4 \right], \\ \alpha_{33} &= l_3^2 \left[m_3 (\rho_3^2 + \sigma_3^2) + m_4 \right], \\ \alpha_{44} &= l_4^2 \left[m_4 (\rho_4^2 + \sigma_4^2) \right], \\ \alpha_{12} &= l_1 l_2 [\rho_2 m_2 + m_3 + m_4], \\ \alpha_{13} &= l_1 l_3 [\rho_3 m_3 + m_4], \\ \alpha_{23} &= l_2 l_3 [\rho_3 m_3 + m_4], \\ \alpha_{24} &= l_2 l_4 [\rho_4 m_4 + m_4], \\ \alpha_{34} &= l_3 l_4 [\rho_4 m_4] \end{aligned} \quad (5)$$

در این ضرایب $\rho_i = \bar{l}_i / l_i$ شاخص محل تمرکز جرم و $\sigma_i = \kappa_i / l_i$ شاخص بخش جرم حول آن در رابط i ام هستند. $\bar{l}_i$ ، l_i ، m_i و κ_i نیز به‌ترتیب جرم، طول، ممان اینرسی حول مرکز جرم، و شعاع چرخش آن برای رابط i ام هستند. انرژی پتانسیل گرانشی بازوها نیز برابر خواهد بود با: [۱۹]

$$V = \sum_{p=1}^4 m_p g \bar{h}_p = g \sum_{p=1}^4 m_p \left(\sum_{i=1}^{p-1} l_i \sin \varphi_i + \rho_p l_p \sin \varphi_p \right) = \beta_1 \sin \varphi_1 + \beta_2 \sin \varphi_2 + \beta_3 \sin \varphi_3 + \beta_4 \sin \varphi_4 \quad (6)$$

که در آن، $\bar{h}_p$ ارتفاع مرکز جرم رابط p ام از سطح مبنا و g شتاب ثقل است. ضرایب β_i نیز برابرند با:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= g l_1 [m_1 \rho_1 + m_2 + m_3 + m_4], \\ \beta_2 &= g l_2 [m_2 \rho_2 + m_3 + m_4], \\ \beta_3 &= g l_3 [m_3 \rho_3 + m_4], \\ \beta_4 &= g l_4 m_4 \rho_4 \end{aligned} \quad (7)$$

اکنون با جایگذاری رابطه‌های ۴ و ۶ در معادله‌ی اویلر-لاگرانژ، یعنی:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_k} = Q_k \quad (8)$$

معادلات حرکت نسبت به هریک از مختصه‌های تعمیم‌یافته به دست می‌آیند. با

شناسایی به روش کم‌ترین مربعات خطا

مسئله‌ی شناسایی سیستم، یافتن یک مدل ریاضی برای یک سیستم دینامیکی براساس مجموعه‌ی داده‌های اندازه‌گیری شده تعریف می‌شود. در حقیقت مطلوب آن است که با تنظیم پارامترهای یک مدل داده شده، تا حد ممکن خروجی‌های مدل بر خروجی‌های اندازه‌گیری شده منطبق شوند.^[۱۵]

در این بخش هدف ما نیز تخمین پارامترهای α_{ij} ها و β_i ها به عنوان مجهولات مدل ۱۱ است که براساس مجموعه‌ی از تاریخچه‌های زمانی^{۱۰} معلوم و گشتاورهای اندازه‌گیری شده حاوی اغتشاش، برآورد خواهد شد. بدین منظور ابتدا خروجی‌های مدل را نسبت به پارامترهای مجهول خطی کرده و معادله‌ی ۱۱ را چنین بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \\ L_2 + L_3 + L_4 \\ L_3 + L_4 \\ L_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \quad (۱۳)$$

این رابطه تصریح می‌کند که خروجی‌های سیستم، گشتاورهای اندازه‌گیری شده در مفاصل بازو هستند. با ساده‌کردن معادله‌ی ۱۳ خواهیم داشت:

$$y_1 = [A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}, B_{12}, B_{13}, B_{14}, B_{23}, B_{24}, B_{34}; G_1, G_2, G_3, G_4] \cdot \Theta \equiv \mathbf{V}_1 \cdot \Theta \quad (۱۴الف)$$

$$y_2 = [0, A_{22}, A_{33}, A_{44}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, B_{23}, B_{24}, B_{34}; 0, G_2, G_3, G_4] \cdot \Theta \equiv \mathbf{V}_2 \cdot \Theta \quad (۱۴ب)$$

$$y_3 = [0, 0, A_{33}, A_{44}, 0, A_{13}, A_{14}, A_{23}, A_{24}, B_{34}; 0, 0, G_3, G_4] \cdot \Theta \equiv \mathbf{V}_3 \cdot \Theta \quad (۱۴پ)$$

$$y_4 = [0, 0, 0, A_{44}, 0, 0, A_{14}, A_{24}, A_{34}; 0, 0, 0, G_4] \cdot \Theta \equiv \mathbf{V}_4 \cdot \Theta \quad (۱۴ت)$$

در رابطه‌های ۱۴، Θ بردار پارامترهای مجهول است:

$$\Theta = \left\{ \alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \alpha_{44}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}, \alpha_{23}, \alpha_{24}, \alpha_{34}; \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \right\} \quad (۱۵)$$

و تابع B_{ij} چنین تعریف شده است:

$$B_{ij} = A_{ij} + A_{ji} = 2 \cos \varphi_{ij} \quad (۱۶)$$

همچنین در تعریف بردارهای یادشده، درایه‌های مرتبط با تأثیرات اینرسی از درایه‌های مرتبط با اثرات گرانشی با نماد $\cdot$ از هم تفکیک شده‌اند. بدین صورت رابطه‌های ۱۴

نسبت به پارامترهای مجهول Θ خطی شده و می‌توانند به شکل فشرده‌ی زیر بیان شوند:

$$\mathbf{Y}(t) = \Psi(t) \cdot \Theta \quad (۱۷)$$

که در آن:

$$\mathbf{Y}(t) = [y_1(t) \ y_2(t) \ y_3(t) \ y_4(t)]^T \quad (۱۸)$$

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T(t) \\ \mathbf{V}_2^T(t) \\ \mathbf{V}_3^T(t) \\ \mathbf{V}_4^T(t) \end{bmatrix} \quad (۱۹)$$

برای مفصل i ام، خطا در هر لحظه اختلاف بین مقدار واقعی گشتاور (τ_i) و داده‌ی اندازه‌گیری شده در آن لحظه ($\hat{\tau}_i$) است. در این شبیه‌سازی که داده‌ها براساس کدنویسی مدل ربات در نرم‌افزار MATLAB به دست می‌آید، منظور از مقدار واقعی گشتاور درحقیقت گشتاور محاسبه شده از معادلات حاکم بر سیستم به‌ازای یک مسیر حرکت معین است، بدون آن که به اغتشاشات آلوده شده باشد و منظور از گشتاور اندازه‌گیری شده، مقدار گشتاور جمع‌شده با یک مقدار تصادفی است که به‌منزله‌ی اغتشاش وارد در اندازه‌گیری‌های یک سیستم واقعی، یا معادل با خطای اندازه‌گیری در نظر گرفته می‌شود. بنابراین:

$$e_i(t) = \hat{\tau}_i(t) - \tau_i(t) = \hat{\tau}_i(t) - y_i(t) = \hat{\tau}_i(t) - \mathbf{V}_i \cdot \Theta \quad (۲۰)$$

ماتریس هم‌پراش خطا معرف وابستگی اغتشاشات خروجی i ام به اغتشاشات احتمالی در خروجی j ام است و عناصر آن چنین تعریف می‌شود:^[۲۲]

$$R_{ij}(\eta) = E[e_i(t) \cdot e_j(t + \eta)] = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e_i(t) \cdot e_j(t + \eta), \quad i, j = 1, 2, 3, 4. \quad (۲۱)$$

در این رابطه، $E(x)$ تابع امید ریاضی از متغیر تصادفی x است و فرض می‌شود که میانگین اغتشاشات در هر سنجه صفر باشد:

$$\mu_i = E[e_i(t)] = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e_i(t) = 0 \quad (۲۲)$$

چنانچه اغتشاش وارد روی مفصل i ام در هر لحظه مقداری کاملاً تصادفی و مستقل از لحظات دیگر داشته باشد، آن را اغتشاش سفید^{۱۱} می‌نامیم و خواهیم داشت:

$$R_{ii}(\eta) = E[e_i(t) \cdot e_i(t + \eta)] = \sigma_i^2 \delta_{t,\eta} \quad (۲۳)$$

بنابراین پراش خطا در سنجه‌ی i ام برابر است با درایه‌ی واقع بر قطر اصلی ماتریس هم‌پراش در سطر i ام به‌ازای $\eta = 0$:

$$\sigma_i^2 = R_{ii}(0) = E[e_i \cdot e_i] = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [e_i(t)]^2 \quad (۲۴)$$

بدیهی است چنانچه خطای حرکت در هر مفصل مستقل از اغتشاشات احتمالی در مفاصل دیگر باشد، آنگاه ماتریس هم‌پراش خطاها باید صفر شود؛ مگر روی قطر اصلی و به‌ازای $\eta = 0$. اما براساس معادلات ۱۱ بیان می‌دارند، دینامیک بازوهای

$$(۱۰): \frac{\partial W}{\partial \alpha_{1r}} = \sum_{t=1}^N A_{r1}(t) \cdot e_1(t) + A_{1r}(t) \cdot \{e_1(t) + e_r(t) + e_r(t)\} = 0$$

$$(۱۱): \frac{\partial W}{\partial \alpha_{1r}} = \sum_{t=1}^N A_{r1}(t) \cdot e_1(t) + A_{1r}(t) \cdot \{e_1(t) + e_r(t) + e_r(t) + e_r(t)\} = 0$$

$$(۱۲): \frac{\partial W}{\partial \alpha_{rr}} = \sum_{t=1}^N A_{rr}(t) \cdot \{e_1(t) + e_r(t)\} + A_{rr}(t) \cdot \{e_1(t) + e_r(t) + e_r(t)\} = 0$$

$$(۱۳): \frac{\partial W}{\partial \alpha_{rr}} = \sum_{t=1}^N A_{rr}(t) \cdot \{e_1(t) + e_r(t)\} + A_{rr}(t) \cdot \{e_1(t) + e_r(t) + e_r(t) + e_r(t)\} = 0$$

$$(۱۴): \frac{\partial W}{\partial \alpha_{rr}} = \sum_{t=1}^N A_{rr}(t) \cdot \{e_1(t) + e_r(t) + e_r(t)\} + A_{rr}(t) \cdot \{e_1(t) + e_r(t) + e_r(t) + e_r(t)\} = 0 \quad (۲۸)$$

با جایگزینی مجدد رابطه‌ی ۲۰ در معادلات فوق و ساده‌کردن رابطه‌ها، به معادله‌ی رابج در کم‌ترین مربعات خواهیم رسید: [۲۳]

$$\hat{\Theta} = \left[\sum_{t=1}^N \Psi^t(t) \Psi(t) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \Psi^t(t) Y(t) \right] \quad (۲۹)$$

مطابق انتظار، روش به‌کار گرفته‌شده منتهی به حل مسئله‌ی کم‌ترین مربعات شد، چرا که معادله‌ی ۱۷ رابطه‌ی خطی بین مجهولات و اندازه‌گیری‌های معلوم برقرار می‌کرد. شرط وجود جواب در رابطه‌ی فوق معکوس‌پذیری یا به عبارتی تمام‌مرتبه‌بودن ماتریس $Q_N = \sum_{t=1}^N \Psi^t(t) \Psi(t)$ است. از این رو برای اجتناب از نزدیکی به شرایط نامناسب تکیه‌ی باید تا حد امکان دترمینان ماتریس یادشده دور از صفر به‌دست آید. یادآور می‌شویم که هر اندازه $\det(Q_N)$ به صفر نزدیک‌تر باشد خطای تخمین بزرگ‌تر خواهد شد. این موضوع را می‌توان با محاسبه‌ی ماتریس هم‌پراش خطای تخمین تحقیق کرد. بدین‌منظور فرض کنیم مقادیر صحیح مجهولات Θ_0 و تخمینی از آن، که به‌روش کم‌ترین مربعات به‌دست می‌آید $\hat{\Theta}_N$ باشد، آنگاه خطای تخمین به‌صورت $\tilde{\Theta} = \hat{\Theta}_N - \Theta_0$ تعریف می‌شود و عبارت است از:

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_N &= \hat{\Theta}_N - \Theta_0 \\ &= \left[\sum_{t=1}^N \Psi^t(t) \cdot \Psi(t) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \Psi^t(t) Y(t) \right] - \Theta_0 \\ &= \left[\sum_{t=1}^N \Psi^t(t) \cdot \Psi(t) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \Psi^t(t) Y(t) - \left(\sum_{t=1}^N \Psi^t(t) \Psi(t) \right) \Theta_0 \right] \\ &= \left[\sum_{t=1}^N \Psi^t(t) \cdot \Psi(t) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \Psi^t(t) (Y(t) - \Psi(t) \Theta_0) \right] \\ &= \left[\sum_{t=1}^N \Psi^t(t) \cdot \Psi(t) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \Psi^t(t) e(t) \right] \\ &= Q_N^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \Psi^t(t) e(t) \right] \end{aligned} \quad (۳۰)$$

رباط کاملاً به هم جفت شده است و انحراف در مسیر یکی از آن‌ها بر مسیر سایرین اثر خواهد گذاشت. از این رو بهترین روش برای تخمین پارامترهای مجهول در مدل ریاضی ۱۱ آن است که انحراف خطا از مقدار میانگین صفر برای تمامی سنججه‌ها به‌طور هم‌زمان کمینه شود. این موضوع معادل است با کمینه‌سازی مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس هم‌پراش خطا. [۲۳] با توجه به این موضوع تابع هزینه‌ی را چنین تعریف می‌کنیم:

$$W(\Theta) = \frac{N}{2} tr(\mathbf{R}(\Theta)) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \left\{ [e_1(t)]^2 + [e_r(t)]^2 + [e_r(t)]^2 + [e_r(t)]^2 \right\} \quad (۲۵)$$

که در آن، N تعداد نمونه‌ها از هر سیگنال است. بهترین تخمین برای پارامترهای مجهول پاسخی است که تابع هزینه را کمینه کند: [۲۳]

$$\hat{\Theta} = \arg \min W(\Theta) \quad (۲۶)$$

برای یافتن $\hat{\Theta}$ کافی است مشتق تابع هزینه نسبت به پارامترهای مجهول را صفر قرار دهیم:

$$\frac{\partial W(\Theta)}{\partial p} = \sum_{t=1}^N \left\{ \frac{\partial e_1(t)}{\partial p} e_1(t) + \frac{\partial e_r(t)}{\partial p} e_r(t) + \frac{\partial e_r(t)}{\partial p} e_r(t) + \frac{\partial e_r(t)}{\partial p} e_r(t) \right\} = 0, \quad p \in \Theta \quad (۲۷)$$

با جایگذاری رابطه‌های ۲۰، ۱۷ و ۱۴ در رابطه‌ی ۲۷، به ۱۴ معادله‌ی مستقل برحسب ۱۴ پارامتر مجهول -- یعنی β_i ها و α_{ij} ها -- خواهیم رسید که با حل هم‌زمان دستگاه معادلات حاصله بهترین تخمین برای پارامترهای یادشده به دست خواهد آمد.

$$(۱): \frac{\partial W}{\partial \beta_1} = \sum_{t=1}^N G_1(t) \cdot e_1(t) = 0$$

$$(۲): \frac{\partial W}{\partial \beta_r} = \sum_{t=1}^N G_r(t) \cdot \{e_1(t) + e_r(t)\} = 0$$

$$(۳): \frac{\partial W}{\partial \beta_r} = \sum_{t=1}^N G_r(t) \cdot \{e_1(t) + e_r(t) + e_r(t)\} = 0$$

$$(۴): \frac{\partial W}{\partial \beta_r} = \sum_{t=1}^N G_r(t) \cdot \{e_1(t) + e_r(t) + e_r(t) + e_r(t)\} = 0$$

$$(۵): \frac{\partial W}{\partial \alpha_{11}} = \sum_{t=1}^N A_{11}(t) \cdot e_1(t) = 0$$

$$(۶): \frac{\partial W}{\partial \alpha_{rr}} = \sum_{t=1}^N A_{rr}(t) \cdot \{e_1(t) + e_r(t)\} = 0$$

$$(۷): \frac{\partial W}{\partial \alpha_{rr}} = \sum_{t=1}^N A_{rr}(t) \cdot \{e_1(t) + e_r(t) + e_r(t)\} = 0$$

$$(۸): \frac{\partial W}{\partial \alpha_{rr}} = \sum_{t=1}^N A_{rr}(t) \cdot \{e_1(t) + e_r(t) + e_r(t) + e_r(t)\} = 0$$

$$(۹): \frac{\partial W}{\partial \alpha_{1r}} = \sum_{t=1}^N A_{r1}(t) \cdot e_1(t) + A_{1r}(t) \cdot \{e_1(t) + e_r(t)\} = 0 \quad (۳۰)$$

جدول ۱. زوایای نسبی هر مفصل در شروع و خاتمه‌ی حرکت.

θ_4	θ_3	θ_2	θ_1	
-45°	-45°	45°	0°	θ_i
45°	-45°	-45°	45°	θ_f

جدول ۲. کمیت‌ها و مقادیر استفاده شده در شبیه‌سازی.

۴	۳	۲	۱	i
0.2°	0.17°	0.15°	0.1°	l_i (m)
0.1°	0.1°	0.15°	0.2°	m_i (kg)
2°	1°	3°	15°	ε_i

می‌رسانند.

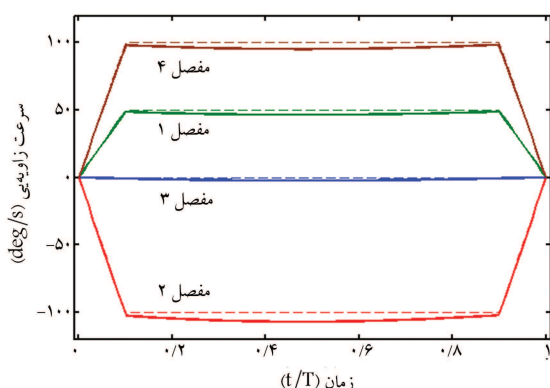
$$\theta(t^*) = \begin{cases} \omega t^{*2} + \theta_i + \varepsilon f(t) & 0 \leq t^* \leq 0.1 \\ \omega(t^* - 0.1) + \theta_i + \varepsilon f(t) & 0.1 \leq t^* \leq 0.9 \\ -\omega(t^{*2} - 2t^* + 1) + \theta_f + \varepsilon f(t) & 0.9 \leq t^* \leq 1 \end{cases} \quad (31)$$

در رابطه‌ی ۳۱، $\omega = (\theta_f - \theta_i)/(1 - 0.1)$ ، θ_i و θ_f به ترتیب زوایای نسبی بین بندها در شروع و خاتمه‌ی حرکت هستند. این زوایا در جدول ۱ برای مسیر مقید داده شده‌اند. همچنین زمان نسبت به بازه حرکت بی‌بعد شده است: $t^* = t/T$.

در مقابل، در مسیر دوم برای حرکت مجری نهایی در صفحه آزادی کامل قائل می‌شویم. بدین‌منظور در معادلات ۳۱ به‌ازای $\varepsilon \neq 0$ یک جمله‌ی انحراف‌دهنده مانند $f(t)$ به همان مسیرهای قبلی اضافه می‌کنیم تا قید مسیر اول از بین برود. تابع $f(t)$ برای تمام لولاهای یکسان و به‌گونه‌ی انتخاب شده که سرعت در ابتدا و انتهای حرکت به صفر برسد:

$$f(t^*) = (1 - t^*) \cos t^* + \sin t^* \quad (32)$$

ضریب ε برای هر مفصل جداگانه و به‌صورت تصادفی انتخاب شده است. این مقادیر به‌همراه طول و جرم هر بازو در شبیه‌سازی در جدول ۲ آورده شده‌اند. همچنین در شکل‌های ۲ و ۳ نمودارهای سرعت-زمان، و شتاب-زمان که برای تحریک هر



شکل ۲. سرعت‌های زاویه‌ی هر مفصل در مسیر تحریک (خط‌چین: مقید، خط‌پر: آزاد).

در این رابطه به‌وضوح دیده می‌شود که هرچه $det(Q_N)$ بزرگ‌تر باشد خطای تخمین $\tilde{\theta}_N$ کوچک‌تر خواهد شد. همچنین با افزایش میزان داده‌برداری و با فرض استقلال ورودی‌های تحریک سیستم از اغتشاشات آلوده شده به داده‌های اندازه‌گیری، امید ریاضی (میانگین) خطای تخمین به صفر میل خواهد کرد؛ به‌عبارت دیگر $E[\tilde{\theta}_N] = 0$. در چنین شرایطی روش کم‌ترین مربعات بهترین تخمین نااریب خطی^{۱۲} را ارائه خواهد داد.^[۲۳]

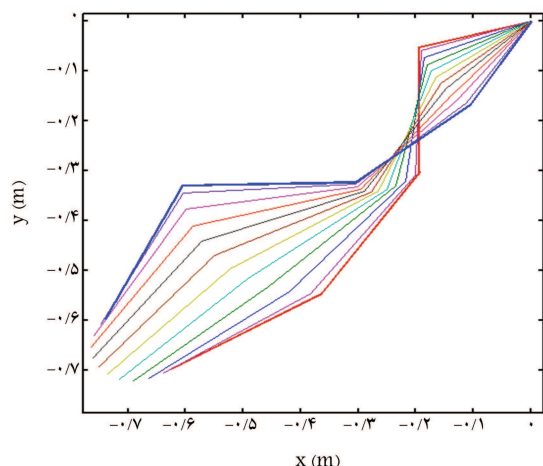
در پایان بر این نکته تأکید می‌کنیم که خطای ناشی از اندازه‌گیری‌ها، در هر لحظه و روی هر مفصل، وابسته به مفصل دیگر و در عین حال مستقل از لحظات دیگر فرض شده است.

شبیه‌سازی و بیان نتایج

در این بخش با شبیه‌سازی بازوی ماهر مورد بحث در نرم‌افزار MATLAB، ابتدا دینامیک معکوس آن حل شده و گشتاورهای لازم برای حرکت بازوها محاسبه می‌شوند. سپس با افزودن اغتشاشات تصادفی روی مقادیر محاسبه‌شده، سنجه‌های آزمایشی شبیه‌سازی می‌شوند و بر مبنای آن‌ها پارامترهای مدل دینامیکی بازو تخمین زده خواهند شد. این نکته نیز حائز اهمیت است که در این شبیه‌سازی فرض بر آن است که سیستم به‌صورت حلقه‌ی باز به تعقیب مسیر می‌پردازد و حلقه‌ی پس‌خوراند برای کنترل مجری نهایی لحاظ نشده است. بنابراین از داده‌های اندازه‌گیری شده (مقادیر گشتاوری) نه برای کنترل که برای شناسایی سیستم استفاده خواهد شد. توجه داریم که در مواردی که از کنترل پس‌خوراند (حلقه‌ی بسته) برای هدایت سیستم استفاده می‌شود، خروجی سیستم در ورودی دخیل شده و می‌تواند موجب وابستگی سطرها یا ستون‌های ماتریس رگرسیون شود. به‌علاوه در این کار شناسایی پارامترها خارج خط^{۱۳} انجام می‌گیرد، یعنی پس از اتمام داده‌برداری به یک باره از تمام آن‌ها برای تخمین مجهولات استفاده می‌شود.

مسئله‌ی دینامیک معکوس عبارت است از محاسبه‌ی گشتاورهای لازم در مفصل بازوی ماهر به‌منظور تولید یک مسیر داده شده، مرکب از منحنی‌های جابه‌جایی، سرعت و شتاب برحسب زمان.^[۱۸] در بحث شناسایی، ورودی‌های سیستم، همان مسیرهای تحریک خواهند بود که به‌صورت معین در نظر گرفته می‌شوند. البته انتخاب مسیر تحریک^{۱۴} مناسب حائز اهمیت است. در واقع یک ورودی (تحریک) غنی قادر است تمام پارامترهای سیستم را در خروجی سیستم سهیم کند. به‌عبارت دیگر ورودی غنی می‌تواند اجزای بیشتری از سیستم را تحریک، و اطلاعات بیشتری از سیستم در خروجی تولید کند. این موضوع، به‌ویژه در سیستم دینامیکی دارای درجات آزادی مازاد اهمیت مضاعف دارد، زیرا چنانچه ورودی نتواند تمام روابط را به‌خوبی در صفحه حرکت دهد، یعنی مشخصه‌های سینماتیکی آن‌ها -- شامل موقعیت، سرعت و شتاب -- را در بازه‌ی معین تغییر دهد، آنگاه نخواهد توانست پارامترهای دینامیکی متناظر با آن‌ها را نیز به‌خوبی تخمین بزند.

از این رو در این شبیه‌سازی از دو مسیر تحریک متفاوت، یکی مقید و دیگری آزاد، برای شناسایی استفاده می‌کنیم. مسیر اول مقید خواهد بود تا مجری نهایی را روی محور افقی جابه‌جا کند؛ بنابراین وابستگی حرکتی در بازوها ایجاد خواهد کرد و از درجات آزادی بازوها یک درجه می‌کاهد. معادله‌ی مسیر اول از رابطه‌ی ۳۱ و به‌ازای $\varepsilon = 0$ به دست می‌آید. در این معادلات جابه‌جایی زاویه‌ی هر مفصل به‌صورت تابعی خطی با زمان در نظر گرفته شده است که در ابتدا و انتهای حرکت با متصل‌شدن به تکه‌های سهموی، سرعت را با آهنگ ثابت به صفر



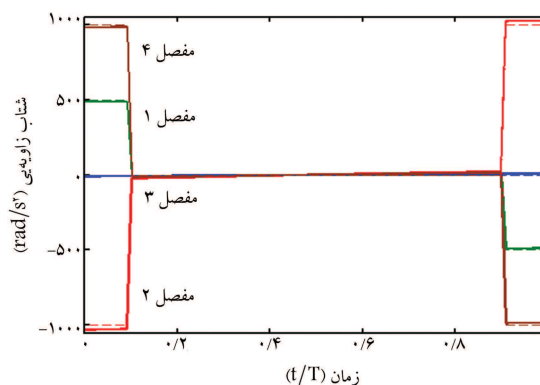
شکل ۵. مسیر حرکت بازوها مطابق با مسیر آزاد (مجری نهایی از راست به چپ حرکت کرده است).

جدول ۳. تخمین‌ها و خطای نسبی آن‌ها براساس مسیرهای تحریک.

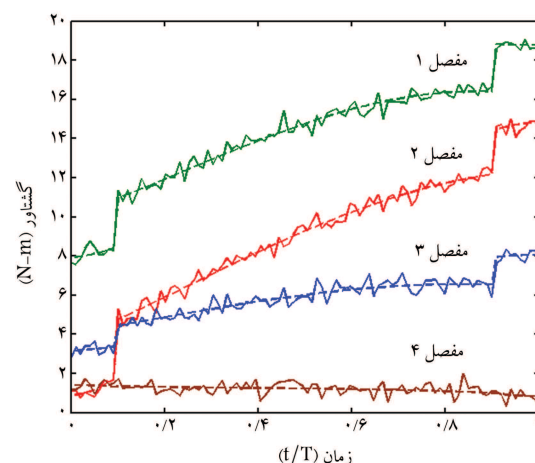
Θ_c	$\hat{\Theta}_c$	$\varepsilon_c(\%)$	$\hat{\Theta}$	Θ	
1.1878°	1.1524°	0.7158	1.1562°	1.1573°	α_{11}
1.1654°	1.1575°	3.5480	1.1708°	1.1771°	α_{22}
4.4425°	1.1390°	4.8952	1.1384°	1.1455°	α_{33}
28.9017°	0.464°	8.9007	0.392°	0.360°	α_{44}
3.7739°	1.1456°	0.2924	1.1517°	1.1513°	α_{12}
1.3841°	1.1080°	3.7146	1.1054°	1.1095°	α_{13}
7.9171°	0.331°	5.2969	0.341°	0.360°	α_{14}
15.1634°	1.1576°	5.2877	1.1441°	1.1369°	α_{23}
1.18182°	0.442°	1.9458	0.441°	0.450°	α_{24}
20.9110°	0.653°	2.8055	0.555°	0.540°	α_{34}
0.105°	6.8677°	0.184	6.8657°	6.8670°	β_1
0.1559°	7.399°	0.1237	7.422°	7.509°	β_2
0.1971°	5.5290°	0.873	5.5229°	5.5181°	β_3
0.353°	1.7652°	0.366	1.7664°	1.7658°	β_4

مسیر مقید است که آلوده به اغتشاش شده‌اند. همچنین ε و ε_c به ترتیب خطاهای نسبی متناظر با هر یک از تخمین‌ها هستند.

مطابق انتظار، خطای مقادیر تخمین زده شده از مسیر تحریک آزاد کم‌تر از خطای مقادیری است که براساس تخمین مسیر مقید به دست آمده‌اند. بیشترین خطا از مسیر آزاد حدود ۹٪ و از مسیر مقید حدود ۲۹٪ است. به علاوه، مقادیر پارامترهای مربوط به گشتاورهای استاتیکی، β_i (ناشی از وزن بازوها)، در مقایسه با مقادیر گشتاورهای اینرسی، α_i (ناشی از حرکت بازوها) بین ۱۰ تا ۱۰۰ برابر بزرگ‌ترند. همچنین خطای تخمین آن‌ها نیز تقریباً به همین نسبت کم‌تر است. باید به این موضوع اساسی توجه داشت که، چنان‌که پیش از این نیز اشاره شد، خطای ناشی از اندازه‌گیری‌ها در هر لحظه و روی هر مفصل، وابسته به مفاصل دیگر



شکل ۳. شتاب‌های زاویه‌ای هر مفصل در مسیر تحریک (خط‌چین: مقید، خط‌پر: آزاد).



شکل ۴. گشتاورهای محاسبه شده از دینامیک معکوس طبق مسیر آزاد (خط‌چین بدون اغتشاش، خط‌پر: با اغتشاش).

مفصل استفاده شده برای هر یک از دو مسیر مقید و آزاد نشان داده شده است. محاسبات براساس ۵۰۰ نمونه در بازه‌ی زمانی انجام گرفته است.

چنان‌که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، اغتشاش به صورت مقادیر تصادفی با میانگین صفر به گشتاورهای محاسبه شده از حل مسئله دینامیک معکوس اضافه می‌شود که بیشینه اندازه‌ی آن دهمی از گشتاور استاتیکی هر بازو در نظر گرفته شده است:

$$n_i(t^*) = 0.1(g m_i l_i / 2) random_i(t^*) \quad (33)$$

در شکل ۵ نیز مسیر حرکت رابط‌ها مطابق با مسیر تحریک دوم (به‌ازای $\varepsilon \neq 0$) نشان داده شده است. به خوبی دیده می‌شود که در صفحه‌ی حرکت، رابط‌ها در بازه‌ی گسترده‌ی تغییر مکان و موقعیت داشته‌اند. افزون بر این، با اضافه شدن جملات مثلثاتی به تابع، مسیر حرکت مفاصل ورودی‌های سرعت و شتاب نیز دارای تغییراتی غیرخطی شده و بدین ترتیب از وابستگی بین آن کمیت‌ها در طول بازه زمانی حرکت اجتناب شده است. از این رو می‌توان انتظار داشت که ورودی تحریک (به‌ازای $\varepsilon \neq 0$) غنی بوده و توانسته تمام مودهای سیستم را تحریک کند.

نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی و شناسایی براساس روش کم‌ترین مربعات که در رابطه‌ی ۲۹ آورده شد، برای هر یک از مسیرهای تحریک در جدول ۳ ارائه شده است. در این جدول Θ بردار مقادیر واقعی پارامترهای مدل ۱۱، $\hat{\Theta}$ بردار مقادیر تخمین زده شده براساس مسیر آزاد، و $\hat{\Theta}_c$ بردار مقادیر تخمین زده شده براساس

بازوی ماهر چهاربندی را به طور عملی به دست آوریم. در حقیقت مقادیر به دست آمده به این روش برای ربات مورد نظر کاملاً واسنجی شده‌اند.

نتیجه‌گیری

در این مقاله به مدل‌سازی، شبیه‌سازی و شناسایی پارامترهای سینماتیکی-دینامیکی مدل کنترلی برای یک بازوی ماهر چهاربندی پرداختیم. ابتدا معادلات حرکت بازوها استخراج شدند و براساس آن یک مدل کنترلی با کم‌ترین پارامترهای فیزیکی به دست آمد. در مرحله‌ی بعد سعی شد تا براساس مدل به دست آمده و اندازه‌گیری‌های آزمایشی، این پارامترها برای نمونه‌ی واقعی واسنجی شوند. به عبارت دیگر فرض بر این شد که بازوها براساس یک مسیر تحریک معین حرکت داده شوند و هم‌زمان مقدار گشتاور مصرفی در هر مفصل اندازه‌گیری شود. سپس براساس مدل کنترلی، مسیر تحریک و گشتاورهای اندازه‌گیری شده، پارامترهای مدل موجود شناسایی شوند. از آنجا که مدل ارائه شده نسبت به پارامترهای مجهول به شکل خطی ظاهر شد، روش شناسایی منجر به معادله‌ی کم‌ترین مربعات شد. همچنین شناسایی با دو مسیر تحریک متفاوت صورت گرفت که نتایج به دست آمده گویای آن بودند که دقت تخمین توسط تحریک غنی بالاتر خواهد بود.

وجود اصطکاک در لولاهای یکی از مهم‌ترین مسائلی است که در مدل‌سازی بازوهای ماهر مورد توجه قرار می‌گیرد. از این رو شناسایی پارامترهای اصطکاک با به‌عنوان موضوعی برای ادامه‌ی این کار پیشنهاد می‌شود. همچنین روش کم‌ترین مربعات وزن‌دار رهیافت مناسب‌تری برای تخمین پارامترهای مجهول در این مسئله است که باید در توسعه‌ی این کار مورد توجه قرار گیرد.

است. در مسئله‌ی شناسایی مطرح شده، گشتاورهای کنترلی که به‌عنوان سنج‌های خروجی اندازه‌گیری می‌شوند، در واقع عامل تغییر زاویه‌ی نسبی بین دو رابط -- یعنی θ_i -- هستند. از سوی دیگر در تشکیل ماتریس رگرسیون خطی Q_N از سنجش‌های به‌عمل آمده از زوایای مطلق رابط‌ها (φ_i) استفاده می‌شود. مطابق رابطه‌ی ۱ چنانچه انحرافی در دوران مفصل i ام رخ دهد -- یعنی $\theta_i(t) = \theta_i^*(t) + \delta_i(t)$ -- تمامی φ_i های بالادست آن در این انحراف سهمیم خواهند شد. بنابراین روشن است که باید وزن خطای گشتاوری که روی مفاصل ابتدایی وارد می‌شود بیش از وزن خطایی باشد که روی مفصلی در انتهای زنجیره وارد می‌شود. از این رو منطقی است خطاهای محاسبه شده در رابطه‌ی ۲۰ با وزن‌های متفاوت در رابطه‌ی ۲۵ جایگزین شوند. برای اساس، روش کم‌ترین مربعات وزن‌دار رهیافت مناسب‌تری برای تخمین پارامترهای مجهول در این مسئله خواهد بود که قصد است در توسعه‌ی این کار مورد توجه قرار گیرد. به‌علاوه، این نکته می‌تواند همچنین توجیه‌گر بزرگی خطاهای حاصل در تخمین ضرایب قطری -- به‌علت همبستگی وزن خطاها در عناصر قطری -- نیز باشد. به‌ویژه مشاهده می‌شود که در بین آن‌ها، خطا در رابط‌هایی که به انتهای زنجیره نزدیک می‌شوند بزرگ‌تر شده است. موضوع قابل توجه دیگر، بزرگی نامقبول خطا در تخمین‌های حاصل از مسیر تحریک مقید (به‌ازای $\varepsilon = 0$) است که در ضرایب $\alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{24}$ و α_{34} دیده می‌شود. چنان که اشاره شد، مسیر تحریک مقید نتوانسته به‌خوبی تمام مودهای سیستم را تحریک کند و از این رو خطای تخمین در این موارد نسبت به گستره‌ی متوسط خطا در ضرایب دیگر بزرگ است.

بدین طریق توانسته‌ایم پارامترهای سینماتیکی و دینامیکی در مدل کنترلی یک

پانوشته‌ها

1. manipulator
2. covariance matrix
3. redundancy
4. calibration
5. end effector
6. dexterity
7. one step prediction error
8. maximum likelihood
9. trajectory
10. time history
11. white noise
12. best linear unbiased estimation (BLUE)
13. off line
14. excitation trajectory

منابع (References)

1. Žlajpah, L. "Simulation of n-R planar manipulators", *Simulation Practice and Theory*, **6**(3), PP. 305-321 (1998).

2. Yuru Zhang, W.A. and Gruver, F.G. "Dynamic simplification of three degree of freedom manipulators with closed chains", *Robotics and Autonomous Systems*, **28**, PP. 261-269 (1999).
3. Mampetta, A.K. "A lie group formulation of kinematics and dynamics of serial manipulators", Course Project Report in the Robotics Institute of Carnegie Mellon University (2006).
4. Nikoobin, A. and Haghighi, R. "Lyapunov-based nonlinear disturbance observer for serial n-link robot manipulators", *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, **55**, PP. 135-153 (2009).
5. Fahimi, F. "Autonomous robots – Ch 2: redundant manipulators", Springer, PP. 15-50 (2009).
6. Konietzschke, R. and Hirzinger, G. "Inverse kinematics with closed form solutions for highly redundant robotic systems", *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Japan, PP. 2945- 2950 (2009).
7. Dasgupta, B., Gupta, A. and Singla, E. "A variational approach to path planning for hyper-redundant manipulators", *Robotics and Autonomous Systems*, **57**, PP. 194-201 (2009).

8. Lin, C.J. "Motion planning of redundant robots by perturbation method", *Mechatronics*, **14**, PP. 281-297 (2004).
9. Daachi, B. and Benallegue, A. "A neural network adaptive controller for end-effector tracking of redundant robot manipulators", *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, **46**, PP. 245-262 (2006).
10. Zhang, Y.X., Cong, S., Shang, W.W., Li, Z.X. and Jiang, S.L. "Modeling, identification and control of a redundant planar 2-dof parallel manipulator", *Int. J. of Control, Automation, and Systems*, **5**(5), PP. 559-569 (2007).
11. Craig, J.J. "Introduction to robotics: Mechanics and control", 3th Ed., Sec. 4.10, Pearson Education (2005).
12. Bompos, N.A., Artemiadis, P.K., Oikonomopoulos, A.S. and Kyriakopoulos, K.J. "Modeling, full identification and control of the mitsubishi PA-10 robot arm", *IEEE/ASME Int. Conf. on Advanced intelligent mechatronics*, Zurich, Switzerland, PP. 1-6 (2007).
13. Wernholt, E. "On multivariable and nonlinear identification of industrial robots", Linköping studies in science and technology, Thesis No. 1131 (2004).
14. Yan, H., Zhuang, J. and Masory, O. "Calibration of Stewart platforms and other parallel manipulators by minimizing inverse kinematic residuals", *Journal of Robotic Systems*, **15**(7), PP. 395-405 (1998).
15. Durango, S., Restrepo, D., Ruiz, O., Restrepo-Giraldo, J. and Achiche, S. "Kinematic identification of parallel mechanisms by a divide and conquer strategy", *Int. Conf. on Informatics in Control, Automation and Robotics*, Portugal, PP. 167-173 (2010).
16. Ljung, L., *System Identification: Theory for the User*, Chp. 10, Prentice-Hall (1987).
17. Mulero-Martínez, J.I. "Uniform bounds of the coriolis/centripetal matrix of serial robot manipulators", *IEEE Transactions on Robotics*, **23**(5), PP. 1083-1089 (2007).
18. Balafoutis, C.A. "A survey of efficient computational methods for manipulator inverse dynamics", *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, **9**, PP. 45-71 (1994).
19. Noorani, S.M.R.S. and Ghanbari, A. "Manipulator simulation and its application to model a crawling gait locomotion", *Int. J. of Vehicle Autonomous Systems*, **9**(3-4), PP. 240-252 (2011).
20. Noorani, S.M.R.S. and Ghanbari, A. "Explicit dynamic formulation for n-R planar manipulators with frictional interaction between end-effector and environment", *Int. J. Advanced Robotic Systems*, **8**(2), PP. 1-10 (2011).
21. Mohammadi Daniali, H.R. "Planar vector equations in engineering", *Int. J. of Engineering Education*, **22**(2), PP. 402-406 (2006).
22. Gatti, P.L. and Ferrari, V., *Applied Structural and Mechanical Vibrations: Theory, Methods, and Measuring Instrumentation*, Chp. 12, Taylor & Francis (1999).
23. Soderstrom, T. and Stoica, P., *System Identification*, Chp. 7, Prentice-Hall (1994).