

الگوریتم روش خط جریان برای شبیه‌سازی جریان تک‌فاز و دوفاز غیرقابل تراکم در مخازن هیدروکربنی دوبعدی با شبکه‌بندی با سازمان

صلاح‌الدین فاروقی (دانشجوی کارشناسی ارشد)

مهرداد تقی‌زاده منظری* (استاد)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

مهندسی مکانیک شریف
دوری ۳-۲۹، شماری ۱، ص. ۱۲۵-۱۳۴، (پادداشت شریف)

در این نوشتار جزئیات الگوریتم روش خط جریان برای حل صریح معادله‌ی انتقال حاکم بر جریان سیال در محیط‌های متخلخل در شبکه‌بندی دوبعدی با سازمان بیان می‌شود. با توجه به تبدیل معادله‌ی انتقال از حالت دوبعدی به چند معادله‌ی یک‌بعدی و غیروابسته به گسسته‌سازی مکانی در روش خط جریان، هزینه‌ی محاسباتی آن به مراتب کم‌تر از روش‌های استاندارد — نظیر اختلاف محدود و حجم محدود — است. با توجه به این که هر بار یک مسئله‌ی یک‌بعدی ذخیره و حل می‌شود، این روش در مقایسه با روش‌های استاندارد به حافظه‌ی کم‌تری نیاز دارد. براساس نتایج شبیه‌سازی نشان داده می‌شود که این روش برای شبیه‌سازی یک مدل با ۹۰۰۰۰ سلول محاسباتی، تقریباً ۲۶ برابر سریع‌تر از روش‌های استاندارد خواهد بود. همچنین نشان داده می‌شود که ضریب افزایش سرعت شبیه‌سازی با افزایش تعداد سلول‌های فعال و ناهمگونی در مخازن افزایش خواهد یافت.

faroughisalah@gmail.com
mtmanzari@sharif.edu

واژگان کلیدی: روش خط جریان، جریان دوفازی، زمان پرواز، الگوریتم پولاک.

۱. مقدمه

هدف اصلی شبیه‌سازی مخازن، پیش‌بینی رفتار جریان و انجام مدیریت صحیح بر مخازن برای افزایش بازدهی آن‌هاست. استفاده از روش‌های سریع برای حل معادلات مربوط به شبیه‌سازی و سرعت بخشیدن به جمع‌آوری نتایج نقش مهمی در انجام هرچه بهتر مدیریت بر مخازن ایفا می‌کند.

تمامی فرمول‌بندی‌های عددی در زمینه‌ی محیط‌های متخلخل با ترکیب قوانین حاکم بر فیزیک آن به دو معادله — معادله‌ی فشار و معادله‌ی انتقال — دست پیدا می‌کنند. معادله‌ی انتقال در این فرمولاسیون‌ها از نوع معادلات بقای هذلولوی است. معمولاً روش‌های سنتی برای حل این‌گونه معادلات نیازمند استفاده از شبکه‌های بسیار ریز است. از طرف دیگر کوچک‌تر شدن شبکه‌ی محاسباتی برای حل این معادلات، به دلیل وجود شرط پایداری به کوچک‌شدن اندازه گام زمانی منجر می‌شود. با توجه به مشکلات موجود در روش‌های سنتی، استفاده از روش‌های سریع و کم‌هزینه برای حل معادله‌ی انتقال — به‌گونه‌ی که در زمان بسیار کوتاه‌تر به نتایجی با دقت قابل قبول دست یابند — همیشه مورد توجه بوده است.

برای این منظور در دو دهه‌ی اخیر روش خط جریان^۱، که سریع‌تر و خوش‌رفتارتر از روش‌های عادی حجم محدود، اختلاف محدود و غیره است،^[۱] برای حل معادلات انتقال (بقاء) توسعه داده شده است.

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۰/۰۶/۲۶، اصلاحیه ۱۳۹۰/۱۱/۲۴، پذیرش ۱۳۹۰/۱۲/۲۸.

روش خط جریان بعد از حل معادله‌ی فشار و محاسبه‌کردن میدان سرعت روی مرزهای سلول‌های محاسباتی، صریحاً اقدام به حل معادله‌ی انتقال می‌کند. برای حل عددی معادله‌ی فشار می‌توان از روش اختلاف محدود یا حجم محدود استفاده کرد. در سناریوی حل مسائل با روش خط جریان، دو گام و در کل چهار مرحله‌ی اصلی وجود دارد (شکل ۱).

اولین مرحله به برپاسازی روش خط جریان، استفاده از تعریف ریاضی خط جریان برای تبدیل معادلات بقای حاکم بر جریان از حالت دوبعدی به چند معادله‌ی یک‌بعدی مربوط است. این تبدیل براساس متغیر زمانی جدید به‌اسم زمان پرواز^۲ خطوط جریان صورت می‌گیرد.

دومین مرحله به ردیابی مسیر خط جریان و تعیین زمان پرواز برای هر خط جریان در داخل مخزن می‌پردازد. در صورتی که سنگ و سیال داخل مخزن غیرقابل تراکم باشند، هر خط جریان از مرز چاه تزریق تا مرز چاه برداشت ردیابی خواهد شد. اما اگر سنگ و سیال داخل مخزن تراکم‌پذیر باشند، هیچ قیدی بر مسیر خط جریان‌ها وجود نخواهد داشت و احتمال دارد یک خط جریان از چاه تزریق آغاز شود و به سلولی غیر از چاه برداشت منتهی شود.^[۲]

سومین مرحله در روش خط جریان، حل معادلات یک‌بعدی به وجود آمده از مرحله‌ی اول در راستای هرکدام از خطوط جریان است. معادله‌های یک‌بعدی روش خط جریان را می‌توان به‌صورت تحلیلی و نیز به‌صورت عددی حل کرد. انتخاب راه حل برای معادله‌ی یک‌بعدی، متأثر از خواص فیزیکی سنگ و سیال



شکل ۱. مراحل اصلی روش خط جریان.

مسائل دوبعدی با شبکه‌بندی با سازمان به صورت کامل بیان شده است. سپس میزان دقت و هزینه محاسباتی روش خط جریان با به کارگیری آن در شبیه‌سازی جریان در مخازن دوبعدی همگن و غیرهمگن با تعداد سلول‌های محاسباتی مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین با استفاده از نتایج حاصل از شبیه‌سازی با این روش، توانایی بسیار بالای آن در کاهش هزینه محاسباتی برای شبیه‌سازی جریان در مخازن نشان داده شده است.

در ادامه، بعد از ارائه معادلات حاکم بر جریان تراکم‌ناپذیر تک‌فاز و دوفاز امتزاج‌ناپذیر^۷ در محیط‌های متخلخل، الگوریتم برپاسازی روش خط جریان به صورت کامل توضیح داده خواهد شد. سپس توانایی این روش در کاهش هزینه محاسباتی بیان می‌شود، و نتایج مربوط به شبیه‌سازی با استفاده از روش خط جریان نشان داده خواهد شد. در نهایت نتیجه‌گیری از کار حاضر بیان می‌شود.

۲. معادلات حاکم

معادلات حاکم بر جریان در محیط‌های متخلخل عبارت‌اند از معادله‌ی بقای جرم و معادله‌ی دارسی^۸. برای جریان تراکم‌ناپذیر تک‌فاز در داخل یک محیط متخلخل صلب، با جایگذاری معادله‌ی دارسی:

$$\mathbf{u} = -\frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla p \quad (1)$$

در معادله‌ی بقای جرم:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = q \quad (2)$$

معادله‌ی برای محاسبه‌ی فشار p در داخل میدان ایجاد می‌شود:^[۱۲]

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla p \right) = -q \quad (3)$$

که در آن $\mathbf{k}$ تانسور نفوذپذیری مطلق، μ لزجت سیال، q دبی حجمی در چاه تزریق یا برداشت، و $\mathbf{u}$ بردار میدان سرعت را نشان می‌دهند. همچنین با نوشتن معادله‌ی بقای جرم برای جزء جرمی ρC معادله‌ی انتقال یا معادله‌ی غلظت برای جریان تک‌فاز به صورت:

$$\phi \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C = -q \quad (4)$$

نوشته خواهد شد که در آن ϕ بیان‌گر درجه‌ی تخلخل سازند و C نشان‌دهنده‌ی درجه غلظت سیال است. برای جریان امتزاج‌ناپذیر و تراکم‌ناپذیر دوفازی -- مثل آب (w) و نفت (o) -- در داخل یک محیط متخلخل صلب، همانند جریان تک‌فاز، معادلات فشار و انتقال از ترکیب معادلات بقای جرم و دارسی برای هر فاز به دست خواهد آمد. در اینجا با فرض ناچیز بودن نیروهای موینگی و گرانش و استفاده از فرمولاسیون جریان کسری^۹، معادله‌ی فشار و معادله‌ی بقای جزء آبی چنین بیان می‌شود:^[۱۳]

$$\nabla \cdot (\lambda_t \nabla p) = -q_w - q_o \quad (5)$$

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f_w = -q_w \quad (6)$$

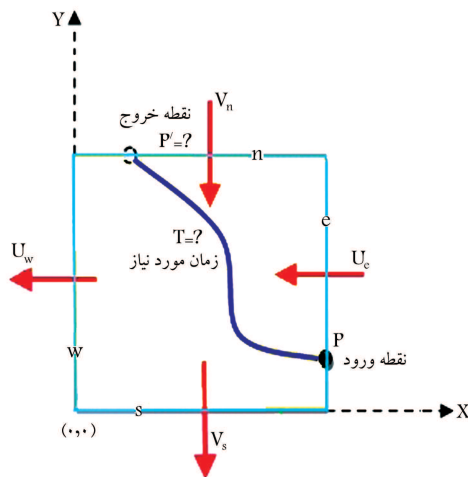
که در آن $\lambda_t = \lambda_w + \lambda_o$ ضریب تحرک کلی است. ضریب تحرک برای هر فاز به صورت $\lambda_\alpha = \mathbf{K} \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha}$ تعریف می‌شود که در آن $k_{r\alpha}$ و μ_α به ترتیب بیان‌گر نفوذپذیری نسبی و لزجت فاز α هستند. همچنین در رابطه‌ی ۶، f_w بیان‌گر جریان

داخل مخزن و شرایط مرزی اعمال شده برای به دست آوردن میدان سرعت است.

آخرین مرحله (مرحله‌ی چهارم) در روش خط جریان، نحوه‌ی انجام انتقال و تبدیل اطلاعات از مختصات خط جریانی (زمان پرواز) به مختصات سلول‌هایی است که در آن‌ها فشار مشخص می‌شود (شبکه‌بندی فشار). در روش خط جریان از روش ردیابی ذره‌ی^۳ (نحوه‌ی حرکت یک ذره ساکن در میدان سرعت اعمالی بر آن) برای ردیابی مسیر خط جریان در داخل مخزن استفاده می‌شود. ردیابی ذره‌ی در سال ۱۹۸۷ توسط شافر^۴ براساس روش رنگ-کوتا بیان شد.^[۲]

در سال ۱۹۸۸ پولاک روش ردیابی ذره‌ی شافر را با فرض خطی بودن تغییرات سرعت در داخل هر سلول تصحیح کرد.^[۲] در سال ۱۹۹۳ با تعریف مختصات زمان پرواز برای هر خط جریان و تبدیل معادلات انتقال از یک معادله‌ی دوبعدی به چند معادله‌ی یک‌بعدی در داخل مخزن^[۲] شبیه‌سازی براساس خط جریان برای مخزن دوبعدی همگن انجام شد. در همان سال محاسبات مشابهی برای یک مخزن دوبعدی غیر همگن انجام گرفت.^[۵] در سال ۱۹۹۷، روش خط جریان برای شبیه‌سازی مخازن به صورت سه‌بعدی و کاربرد آن در جریان چندفازی توسعه یافت.^[۷،۶] پس از آن در سال ۲۰۰۳، تایل و همکارانش از روش خط جریان برای بهینه‌سازی نحوه‌ی تزریق و مکان چاه‌های تزریق و برداشت استفاده کردند. در همان سال روش خط جریان برای شبیه‌سازی جریان با مدل‌های نفت سیاه و ترکیبی توسعه داده شد.^[۸] همچنین این روش برای استفاده در شبکه‌بندی بی‌سازمان^[۹] و در سال ۲۰۰۹ برای شبیه‌سازی مخازن ترک‌دار توسعه داده شد.^[۱۰] در سال ۲۰۰۵ نیز محققین روش چندمقیاسی ترکیبی المان محدود^۵ را با روش خط جریان ترکیب کردند تا به یک شبیه‌ساز بسیار سریع دست یافتند.^[۱۱] مطالعات زیادی درخصوص روش خط جریان در رابطه با دقت و کیفیت آن نیز انجام شده که از آن جمله می‌توان به کوشش انجام‌شده در سال ۲۰۰۴ برای بهبود دقت روش‌های ردیابی خط جریان^[۱۲] و تحقیقات به عمل آمده در سال ۲۰۰۶ برای بهبود خطای بقای جرم^۶ در روش خط جریان^[۱۳] اشاره کرد.

در تمامی کارهای بیان‌شده، جزئیات الگوریتم روش خط جریان برای حل معادلات انتقال به طور کامل ذکر نشده است. بنابراین در مطالعه‌ی حاضر جزئیات الگوریتم و فرمولاسیون روش خط جریان و نحوه‌ی ردیابی خطوط جریان برای



شکل ۲. میدان سرعت برای یک سلول دوبعدی و استفاده از آن برای نوشتن فرضیات پولاک و همچنین معلومات و مجهولات در روش ردیابی پیشرو.

۱.۳. ردیابی خطوط جریان

برای ردیابی خطوط جریان در داخل مخزن می توان از ردیابی پیشرو^{۱۱}، ردیابی پسرو^{۱۲} و ترکیبی از این دو استفاده کرد.^[۱۰،۹] استفاده از هر کدام از روش های بالا تأثیری بر دقت ردیابی خطوط جریان ندارد.^[۱۰] در کار حاضر از ردیابی پیشرو برای ردیابی خطوط جریان استفاده شده است.

در این روش، ردیابی خطوط جریان از مرز سلول چاه تزریق شروع می شود و با رسیدن به مرز سلول چاه برداشت تمام می شود. در این حالت مانند شکل ۲ در هر سلول محاسباتی (سلول های مربوط به شبکه بندی ایجاد شده در محاسبه میدان فشار) محل ورود به سلول معلوم و محل خروج از آن و زمان حرکت ذره در داخل آن مجهول است.

ردیابی خطوط جریان بر این اساس در داخل هر سلول با استفاده از الگوریتم شبه تحلیلی پولاک^{۱۳}، که منطبق بر قانون بقای جرم است، انجام می شود.^[۱۳،۷،۳] در الگوریتم پولاک برای یک سلول، فرض بر این است که تغییرات میدان سرعت در هر راستا به صورت خطی است و از تغییرات سرعت در راستاهای دیگر تأثیر نمی پذیرد.^[۳] در هنگام استفاده از الگوریتم پولاک برای ردیابی مسیر حرکت ذره (خط جریان) به صورت پیشرو، باید به ترتیب زمان حرکت ذره در سلول، وجه و مکان نقطه ی خروج از سلول محاسبه شوند. براساس فرض پولاک می توان روابط ۱۰ و ۱۱ را، که در داخل سلول شکل ۲ به ترتیب بیانگر تغییرات سرعت در راستاهای x و y هستند، چنین نوشت:

$$U_x = U_w + M_x(x - x_w) \quad (10)$$

$$V_y = V_s + M_y(y - y_s) \quad (11)$$

که در آن ها:

$$M_x = \frac{U_e - U_w}{\Delta x} \quad (12)$$

$$M_y = \frac{V_n - V_s}{\Delta y} \quad (13)$$

با قرار دادن عبارات $U_x = \frac{dx}{dt}$ در رابطه ی ۱۰، $V_y = \frac{dy}{dt}$ در رابطه ی ۱۱ و نیز با در نظر گرفتن یک سلول همانند شکل ۳ که سرعت بر روی مرزهای آن با U_w

کسری فاز آب است که به صورت $f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_t}$ تعریف می شود. در دسته معادلات همبسته ی ۵ و ۶، مجهولات اصلی فشار کل (p) و درجه اشباع فاز آب (S_w) هستند.

در این نوشتار در مرزهای خارجی ناحیه ی حل، شرایط مرزی نفوذناپذیر برای حل معادلات فشار در نظر گرفته می شود. همچنین معادلات فشار براساس دیدگاه حجم محدود گسسته شده و در یک شبکه بندی دوبعدی متعامد با سازمان حل می شوند.^[۱۳-۱۶] پس از حل معادله ی فشار و به دست آوردن میدان سرعت از طریق رابطه ی داریسی، می توان معادلات انتقال ۴ و ۶ را حل کرد. در ادامه ی مطلب روش خط جریان برای حل این معادلات ارائه می شود.

۳. روش خط جریان

روش خط جریان صریحاً برای حل معادلات انتقال به کار گرفته می شود و دارای چهار مرحله ی اصلی است. در مرحله ی اول با استفاده از تعریف ریاضی خط جریان ($u \times dr = 0$)، معادله ی انتقال از حالت دوبعدی به چند معادله ی یک بعدی تبدیل می شود. برای این کار متغیر زمانی جدیدی در راستای خط جریان به نام زمان پرواز تعریف می شود و رابطه ی آن با بردار مکانی (r) از رابطه ی انتگرالی ۷ به دست می آید:

$$\tau = \int_0^R \frac{\phi}{|u(r)|} dr \quad (7)$$

که در آن ϕ نشانگر تخلخل سازند است. در رابطه ی ۷ τ برابر مدت زمانی است که طول می کشد تا یک ذره ی ساکن مشخص، فاصله ی مکانی R را بر روی خط جریان طی کند.^[۱۷] معادله ی انتگرالی ۷ را می توان با توجه به مطالعات انجام شده توسط محققین^[۱۷،۱۸] به صورت رابطه ی دیفرانسیلی ۸ نیز نوشت:

$$u \cdot \nabla = \phi \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (8)$$

با اعمال تغییر متغیر رابطه ی ۸ روی رابطه ی ۶ -- یعنی با ادغام میدان دوبعدی سرعت در داخل عبارت زمان پرواز -- معادله ی انتقال غیرهمگن دوبعدی به چندین معادله ی یک بعدی همگن^[۱] تبدیل می شود:

$$\frac{\partial S_w^z}{\partial t} + \frac{\partial f_w^z}{\partial \tau} = 0 \quad (9)$$

که در آن z (عدد انتخابی) نشان دهنده ی تعداد معادلات یک بعدی ایجاد شده در راستای خط جریان ردیابی شده است. همچنین S_w^z و f_w^z به ترتیب درجه ی اشباع و تابع جریان کسری فاز آب در راستای خط جریان نام هستند. علاوه بر این فرض می شود دبی حجمی انتقالی برای هر معادله ی یک بعدی ثابت و برابر $q_z = \frac{q_w}{z}$ باشد که در آن q_w دبی حجمی سیال تزریقی در چاه تزریق است.

علت اصلی کاهش زمان مورد نیاز در شبیه سازی به روش خط جریان این است که در روش خط جریان با تبدیل معادله ی انتقال از حالت دوبعدی به چند معادله ی یک بعدی و غیروابسته کردن معادلات انتقال از اندازه شبکه بندی فشار (شبکه بندی اصلی)، دیگر شرط پایداری^{۱۰} مطرح نیست. در نتیجه می توان هر مقدار دلخواه را برای گام زمانی با توجه به نوع مسئله انتخاب کرد.

برای حل معادلات یک بعدی موجود در رابطه ی ۹، باید تمامی خطوط جریان برای محاسبه ی زمان پرواز مربوط به آن ها در داخل مخزن ردیابی شود (مرحله ی دوم).

امکان دارد، در ادامه بیان شده است.

$$T_{fx} = \infty, \text{ if } \begin{cases} M_x \neq 0, U_f = 0 \\ M_x = 0, U_w = 0 \\ M_x \neq 0, \frac{M_x x(P) + U_w}{U_f} \leq 0 \\ M_x = 0, U_w = 0, \frac{x(P) - x(f)}{U_w} < 0 \end{cases} \quad (18)$$

$$T_{fy} = \infty, \text{ if } \begin{cases} M_y \neq 0, V_f = 0 \\ M_y = 0, V_s = 0 \\ M_y \neq 0, \frac{M_y y(P) + V_s}{V_f} \leq 0 \\ M_y = 0, V_s = 0, \frac{y(P) - y(f)}{V_s} < 0 \end{cases} \quad (19)$$

با مشخص شدن نحوه محاسبه‌ی زمان پرواز در دو راستای x و y ، می‌توان به سلول محاسباتی مورد نظر (شکل ۳) رجوع کرد. چنان که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، هنگامی که خط جریان (یا ذره) از نقطه‌ی P وارد سلول می‌شود باید طبق میدان سرعت داخل آن سلول، از یکی از مرزهای سلول خارج شود. برای مشخص کردن مرز خروجی ذره باید برای هر کدام از مرزها، زمان مورد نیاز برای عبور خط جریان از آن‌ها محاسبه شود. سپس کم‌ترین زمان به‌عنوان زمان حرکت ذره در داخل سلول انتخاب می‌شود و متعاقباً مرز مربوط به آن نیز به‌عنوان مرز خروجی شناخته خواهد شد. پس ابتدا برای ذره‌ی که در سلول نشان داده شده در شکل ۳ در نقطه‌ی P است، مقادیر T_{wx} ، T_{wy} ، T_{ex} و T_{ey} محاسبه می‌شود. با انتخاب مقدار f از داخل مجموعه‌ی $\{w, e, s, n\}$ و قرار دادن در رابطه‌های ۱۵ و ۱۶ زمان رسیدن خط جریان به هر وجه براساس رابطه‌های ۲۰ تا ۲۳ محاسبه می‌شود:

$$T_{wx} = \begin{cases} M_x^{-1} \ln \left| \frac{U_P}{U_w} \right| & \text{if } M_x \neq 0 \\ \frac{x(P)}{U_w} & \text{if } M_x = 0, U_w \neq 0 \\ \infty & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (20)$$

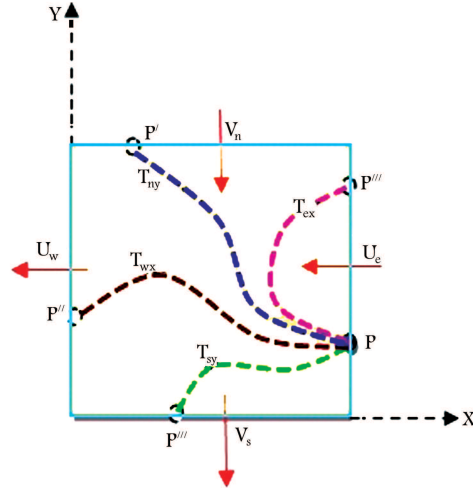
$$T_{ex} = \begin{cases} M_x^{-1} \ln \left| \frac{U_P}{U_e} \right| & \text{if } M_x \neq 0 \\ \frac{x(P) - x(e)}{U_w} & \text{if } M_x = 0, U_w \neq 0 \\ \infty & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (21)$$

$$T_{sy} = \begin{cases} M_y^{-1} \ln \left| \frac{V_P}{V_s} \right| & \text{if } M_y \neq 0 \\ \frac{y(P)}{V_s} & \text{if } M_y = 0, V_s \neq 0 \\ \infty & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (22)$$

$$T_{ny} = \begin{cases} M_y^{-1} \ln \left| \frac{V_P}{V_n} \right| & \text{if } M_y \neq 0 \\ \frac{y(P) - y(n)}{V_s} & \text{if } M_y = 0, V_s \neq 0 \\ \infty & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (23)$$

که در آن‌ها $U_P = M_x x(P) + U_w$ و $V_P = M_y y(P) + V_s$ هستند. پس از محاسبه‌ی زمان‌های مورد نیاز برای رسیدن ذره به هر کدام از مرزها، کم‌ترین زمان به‌عنوان مدت زمان حرکت ذره در داخل سلول، و وجه مربوط به آن به‌عنوان وجه خروجی (که EF نام‌گذاری می‌شود) تعیین می‌شود:

$$\Delta \tau_{i,j,z} = T = \min(T_{ex}, T_{wx}, T_{sy}, T_{ny}) \quad (24)$$



شکل ۳. مکان‌های احتمالی خروج خط جریان از سلول و محاسبه‌ی زمان‌ها برای همگی وجه‌ها و معین کردن وجه خروجی.

U_e ، V_s و V_n نشان داده شده، یک سری معادله‌ی دیفرانسیل معمولی برای $x(t)$ و $y(t)$ به صورت:

$$dx = \begin{cases} M_x x(t) + U_w & \text{if } M_x \neq 0 \\ U_w dt & \text{if } M_x = 0, U_w \neq 0 \\ dt & \text{if } M_x = 0, U_w = 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$dy = \begin{cases} M_y y(t) + V_s & \text{if } M_y \neq 0 \\ V_s dt & \text{if } M_y = 0, V_s \neq 0 \\ dt & \text{if } M_y = 0, V_s = 0 \end{cases} \quad (15)$$

ایجاد می‌شود. اکنون می‌توان از معادلات دیفرانسیل ۱۴ و ۱۵ به ترتیب از زمان $t = 0$ تا $t = T_{fx}$ و $t = T_{fy}$ به صورت تحلیلی انتگرال گرفت. $t = T_{fx}$ و $t = T_{fy}$ زمان‌های مورد نیاز برای عبور ذره یا به عبارتی خط جریان از سلول در وجه‌های موجود در راستای x و y هستند. با انتگرال‌گیری از روابط ۱۴ و ۱۵ می‌توان زمان پرواز خط جریان در دو راستای x و y را محاسبه کرد:

$$T_{fx} = \begin{cases} M_x^{-1} \ln \left| \frac{M_x x(P) + U_w}{M_x x(f) + U_w} \right| & \text{if } M_x \neq 0 \\ \frac{x(P) - x(f)}{U_w} & \text{if } M_x = 0, U_w \neq 0 \\ \infty & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (16)$$

$$T_{fy} = \begin{cases} M_y^{-1} \ln \left| \frac{M_y y(P) + V_s}{M_y y(f) + V_s} \right| & \text{if } M_y \neq 0 \\ \frac{y(P) - y(f)}{V_s} & \text{if } M_y = 0, V_s \neq 0 \\ \infty & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (17)$$

که در اینجا $(x(P), y(P))$ مختصات نقطه‌ی ورود و $(x(f), y(f))$ مختصات نقطه‌ی احتمالی خروج هستند (شکل ۳).

در حالتی که مقدار زمان پرواز در هر راستا منفی می‌شود (که از نظر فیزیکی بی‌معنی است) مقدار آن با ∞ جایگزین می‌شود. به دلیل اهمیت این موضوع، چند حالتی که در آن احتمال منفی شدن زمان در راستای x و y برای هر وجه از سلول

به این که در این مقاله از نیروی گرانش و مویینگی صرف نظر شده است، استفاده از حل عددی معادلات یک بعدی مزیتی بر روش تحلیلی ندارد. همچنین استفاده از روش های عددی علاوه بر وارد شدن بخش عددی در نتایج، با وارد کردن شرط پایداری (شرط CFL^{۱۶}) و ایجاد محدودیت بر گام زمانی، هزینه محاسباتی را نیز افزایش می دهند.

پس از حل معادلات یک بعدی، مقادیر درجهی اشباع یا غلظت در شبکه بندی زمان پرواز مشخص خواهند شد. پس آخرین مرحله در روش خط جریان، تبادل اطلاعات بین شبکه بندی خط جریان (زمان پرواز) و شبکه بندی اصلی (مورد استفاده در محاسبه فشار) است. برای مشخص کردن مقدار درجهی اشباع در هر سلول از شبکه بندی اصلی از میانگین گیری حجمی درجهی اشباع خطوط جریان داخل آن سلول مانند شکل ۵ استفاده می شود. بنابراین رابطه ی ۲۷ برای محاسبه ی درجه اشباع یا غلظت در هر سلول برقرار است:

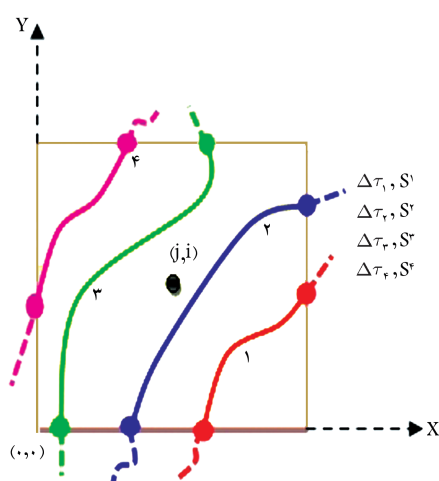
$$(S_w)_{i,j} = \frac{\sum_{z=1}^{nl} V_{i,j,z} (S_w^z)_{i,j}}{\sum_{z=1}^{nl} V_{i,j,z}} \quad (27)$$

که در آن nl تعداد خط جریان های واقع در سلول (i, j) است (شکل ۵).

حجم هر خط جریان در داخل سلول (i, j) به صورت $V_{i,j,z} = \Delta \tau_{i,j,z} q_z$ به تعریف می شود که با توجه به ثابت بودن مقدار دبی انتقالی (q_z) توسط همه ی خطوط جریان، رابطه ی ۲۸ برای تبادل مقادیر درجهی اشباع یا غلظت از شبکه بندی زمان پرواز به شبکه بندی فشار به دست خواهد آمد:

$$(S_w)_{i,j} = \frac{\sum_{z=1}^{nl} \Delta \tau_{i,j,z} (S_w^z)_{i,j}}{\sum_{z=1}^{nl} \Delta \tau_{i,j,z}} \quad (28)$$

پس از محاسبه ی درجهی اشباع در داخل هر سلول با استفاده از رابطه ی ۲۸، شبیه سازی در یک گام زمانی به پایان خواهد رسید و به این ترتیب مراحل الگوریتم روش خط جریان برای حل معادله ی انتقال برای یک گام زمانی نیز به پایان می رسد. در ادامه، میزان دقت و هزینه محاسباتی مورد نیاز در روش خط جریانی و نتایج حاصل از شبیه سازی با استفاده از روش مذکور مورد بررسی قرار می گیرد.



شکل ۵. تبادل اطلاعات از شبکه بندی خط جریان به شبکه بندی فشار با استفاده از میانگین گیری حجمی خط جریان های داخل یک سلول.

در رابطه ی ۲۴، $\Delta \tau_{i,j,z}$ نشانگر زمان پرواز خط جریان در داخل سلول حاضر است که در آن i و j نماینده ی شماره سلول و z شماره خط جریان گذرنده از این سلول است. با مشخص شدن مقدار زمان پرواز خط جریان در داخل سلول (T) و وجه خروج خط جریان از سلول (EF) ، معادلات ۱۶ و ۱۷ را می توان برای محاسبه ی مکان دقیق نقطه ی خروج روی وجه خروجی EF نسبت به متغیر T معکوس کرد. پس از آن با قرار دادن مقدار T از رابطه ی ۱۴ به جای T_{fx} و T_{fy} می توان مکان خروج ذره از سلول -- یعنی $(x(P'), y(P'))$ -- را از روابط ۲۵ و ۲۶ به دست آورد:

$$x(P') = \begin{cases} M_x^{-1}(e^{M_x T} U_P - U_w) & \text{if } M_x \neq 0 \\ x(P) - U_w T & \text{if } M_x = 0 \end{cases} \quad (25)$$

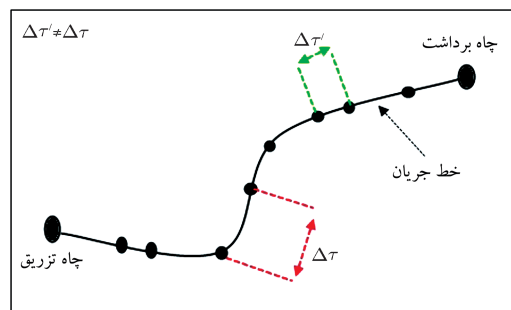
$$y(P') = \begin{cases} M_y^{-1}(e^{M_y T} V_P - V_s) & \text{if } M_y \neq 0 \\ y(P) - V_s T & \text{if } M_y = 0 \end{cases} \quad (26)$$

با مشخص شدن مکان خروج خط جریان، الگوریتم پولاک برای ردیابی مسیر خط جریان برای یک سلول کامل خواهد شد. برای سلول بعدی که خط جریان وارد آن می شود به ترتیب یاد شده عمل می شود، اما این بار مکان نقطه ی خروج سلول قبل -- یعنی $(x(P'), y(P'))$ -- به عنوان مکان ورودی در به کار بردن روش پیشرو برای سلول جدید به الگوریتم پولاک داده می شود.

تمامی مراحل ذکر شده تا رسیدن همه ی خطوط جریان از چاه تزریق تا چاه برداشت و محاسبه ی τ برای کل خطوط جریان، به ترتیب انجام خواهد شد. بعد از پایان این مرحله برای هر خط جریان یک مسئله ی یک بعدی با شبکه بندی غیر یکنواخت زمان پرواز (مانند شکل ۴) به وجود می آید که باید حل شود.

۲.۳. حل معادلات یک بعدی

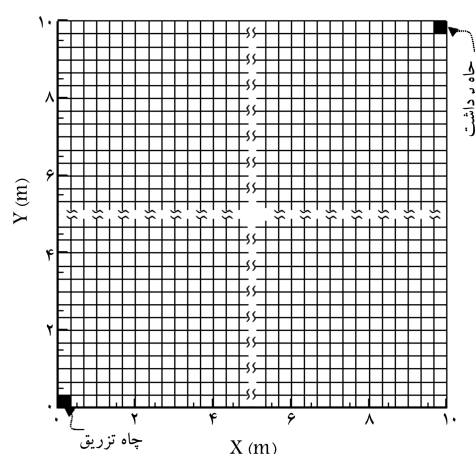
برای حل معادله های یک بعدی ۹ می توان از حل تحلیلی یا حل های عددی استفاده کرد (مرحله ی سوم). هنگام استفاده از حل تحلیلی، شرایط مرزی چاه ها (نظیر نحوه ی چیدمان، بازو بسته بودن در گام های زمانی مختلف، و مقدار جریان جرمی) نباید تغییر کند. در نتیجه در کل فرایند شبیه سازی خطوط جریان ثابت اند. در کار حاضر به علت ثابت بودن تمامی شرایط مرزی در طول فرایند شبیه سازی، از حل تحلیلی برای حل معادلات انتقال یک بعدی در جریان تک فاز و دوفاز استفاده شده است. جزئیات روش حل تحلیلی برای معادلات انتقال تک فاز (معروف به جابه جایی پیستونی^{۱۴}) و جریان دوفاز (معروف به جابه جایی باکلی - لورت^{۱۵}) در دسترس است.^[۱۷] با توجه



شکل ۴. مسئله یک بعدی در راستای هر خط جریان با شبکه بندی غیر یکنواخت زمان پرواز.

۴. نتایج

در این بخش ابتدا میزان دقت و هزینه‌ی محاسباتی مورد نیاز روش خط جریان مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس با استفاده از آن به بررسی نتایج مربوط به شبیه‌سازی جریان تراکم‌ناپذیر تک‌فاز و دوفاز پرداخته می‌شود. هندسه‌ی مخزن صلب در نظر گرفته شده برای شبیه‌سازی در شکل ۶ نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود این مخزن دارای ابعاد $10\text{ m} \times 10\text{ m}$ است. برای مخزن مذکور ضریب تخلخل 0.2 در نظر گرفته شده، و در مثال‌های گوناگون تعداد سلول‌های محاسباتی به‌کار گرفته شده و توزیع نفوذپذیری برای آن متفاوت است. سایر خواص سنگ و سیال داخل مخزن در جدول ۱ برای جریان تک‌فاز و دوفاز خلاصه شده است. برای مشخص‌کردن هزینه و دقت روش خط جریان، حل معادله‌ی انتقال در



شکل ۶. هندسه‌ی مخزن مورد بررسی برای شبیه‌سازی جریان تک‌فاز و دوفاز در آن. جدول ۱. خواص سنگ و سیال داخل مخزن برای جریان تک‌فاز و دوفاز تراکم‌ناپذیر.

جریان تک‌فاز	جریان دوفاز
$\phi = 0.2$	$\phi = 0.2$
$\mu = 1\text{ (cp)}$	$M = \frac{\mu_o}{\mu_w} = 1$
—	$S_{or} = 0, S_{wc} = 0$
—	$k_{rw} = \frac{S_w^2}{S_w^2 + M(1-S_w)^2}$
$C_{\text{initial}} = 0$	$(S_w)_{\text{initial}} = 0$
$C_{\text{injection}} = 1$	$(S_w)_{\text{injection}} = 1$
$q_{\text{injection}} = -1\text{ (s}^{-1}\text{)}, q_{\text{product}} = 1\text{ (s}^{-1}\text{)}$	

جدول ۲. مقایسه‌ی زمان‌های محاسباتی (ثانیه) و ضریب افزایش سرعت در حل معادله‌ی غلظت با استفاده از روش‌های خط جریان و بادسوی مرتبه ۲.

مدل	زمان در روش خط جریان (ثانیه)	زمان در روش LUD (ثانیه)	ضریب افزایش سرعت
مخزن همگن* با 50×50 سلول	۹٫۲	۹۳	۱۰٫۱
مخزن همگن با 80×80 سلول	۲۴٫۸	۳۲۷٫۴	۱۳٫۲
مخزن همگن با 300×300 سلول	۳۵۷٫۵	۸۱۱۵	۲۲٫۷۳
مخزن غیرهمگن** با 80×80 سلول	۳۵	۴۹۰	۱۴
مخزن غیرهمگن با 300×300 سلول	۳۹۸	۱۰۴۵۵	۲۶٫۲۶

* با توزیع نفوذپذیری $K(i, j) = 100\text{ md}$

** با توزیع نفوذپذیری $K(i, j) = i(\tan(0.1j + 0.1)) + j(\tan(0.1i + 0.1))\text{ md}$

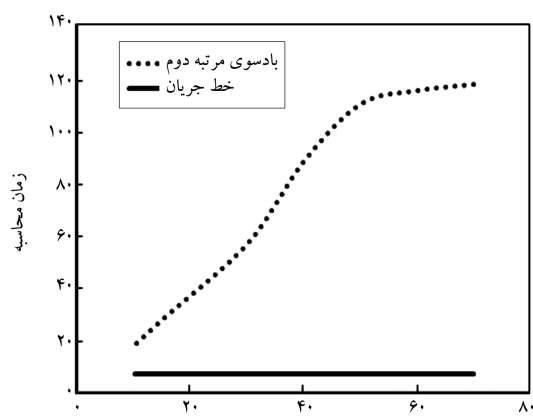
روش خط جریان با $\Delta t = 15$	زمان	روش خط جریان با $\Delta t = 0.5$	زمان	روش LUD با $\Delta = 0.0005$	زمان
.....	$t = 5\text{ s}$	$t = 5\text{ s}$	$t = 5\text{ s}$	$t = 5\text{ s}$	$t = 5\text{ s}$
.....	$t = 10\text{ s}$	$t = 10\text{ s}$	$t = 10\text{ s}$	$t = 10\text{ s}$	$t = 10\text{ s}$
	$t = 15\text{ s}$	$t = 15\text{ s}$	$t = 15\text{ s}$	$t = 15\text{ s}$	$t = 15\text{ s}$
۲۴/۸ (S)	CPUtime	۷۴/۴ (S)	CPUtime	۳۲۷/۴۰ (S)	CPUtime

شکل ۷. مقایسه‌ی کیفیت حل و زمان محاسباتی مورد نیاز در دو روش خط جریانی و روش بادسوی مرتبه دوم در شبیه‌سازی جریان تک‌فاز، در مخزنی با 80×80 سلول محاسباتی به ازای گام‌های زمانی مختلف.

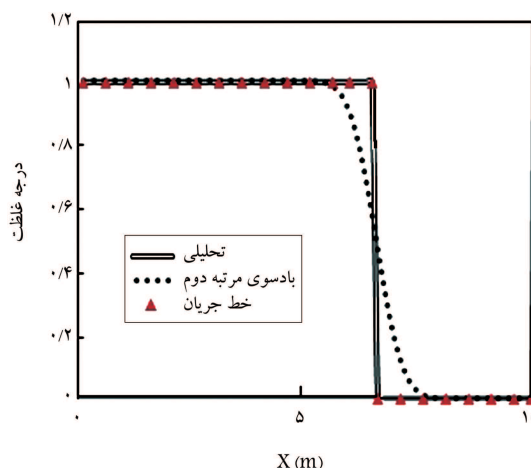
جریان تک‌فاز در داخل مخزن مذکور با توزیع نفوذپذیری همگن $K = 10\text{ md}$ با تعداد سلول‌های محاسباتی مختلف در نظر گرفته شده است. این معادله یک‌بار به روش خط جریان و یک‌بار به روش بادسوی مرتبه دوم (یا تفاضل خطی بادسو^{۱۷}) به‌عنوان یک روش استاندارد حل شده است.

مقایسه‌ی نتایج مربوط به هزینه (زمان) مورد نیاز در جدول ۲، و نتایج مربوط به دقت حل معادله‌ی غلظت برای مخزن همگن با 80×80 سلول محاسباتی تا زمان شبیه‌سازی $t = 15\text{ s}$ در شکل ۷ نشان داده شده است. در جدول ۲ کاهش زمان محاسباتی توسط روش خط جریان برای مخزنی با تعداد سلول‌های محاسباتی متفاوت آورده شده است. براساس جدول مذکور می‌توان دید که هرچه تعداد سلول‌های محاسباتی مورد استفاده یا غیرهمگونی مدل افزایش می‌یابد، قدرت روش خط جریان در کاهش هزینه‌ی محاسباتی بهتر نمایان می‌شود. گفتنی است در جدول ۲ ضریب افزایش سرعت با نسبت هزینه‌ی محاسباتی روش بادسو مرتبه دوم به هزینه‌ی محاسباتی در روش خط جریان تعریف می‌شود.

در شکل ۷ توزیع درجه‌ی غلظت C در زمان‌های مختلف شبیه‌سازی، و زمان محاسباتی مورد نیاز آن‌ها با استفاده از گام‌های زمانی مختلف برای دو روش خط جریان و بادسوی مرتبه دوم نشان داده شده است. طبق نتایج نشان داده شده در شکل ۷ می‌توان گفت در این اندازه شبکه، سرعت روش خط جریان تقریباً ۱۳ برابر روش بادسو است. همچنین با توجه به توزیع درجه غلظت‌های نشان داده شده در شکل یادشده می‌توان دقت خوب روش خط جریان و نداشتن پخش عددی



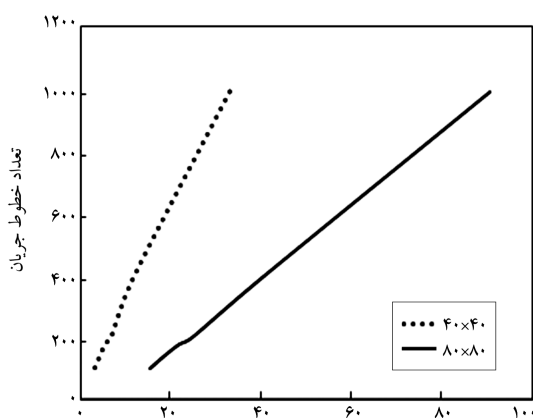
زمان شبیه سازی (S)



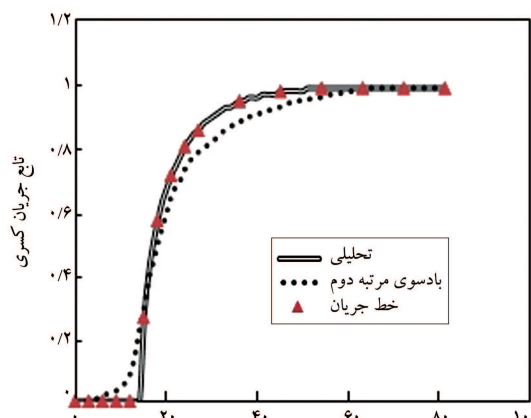
X (m)

شکل ۸. مقایسه دقت روش خط جریان با حل تحلیلی در نشان دادن ناپیوستگی در یک مخزن همگن.

شکل ۹. مقایسه دقت روش خط جریانی با حل تحلیلی در نشان دادن تابع جریان کسری در چاه تولید.



زمان محاسبه



زمان شبیه سازی (S)

شکل ۱۰. نحوه تغییرات زمان محاسباتی مورد نیاز در روش خط جریانی با تعداد مختلف خط جریان برحسب اندازه شبکه بندی برای یک گام زمانی.

شکل ۱۱. مقایسه دقت روش خط جریانی با حل تحلیلی در نشان دادن تابع جریان کسری در چاه تولید.

شکل ۱۱ نحوه تغییر هزینه محاسباتی در روش خط جریان با افزایش تعداد خطوط جریان برای دو شبکه برای یک مخزن نشان داده شده است.

بر اساس شکل مذکور این تغییرات به صورت خطی است. بنابراین هزینه محاسباتی در این روش از مرتبه است $O(n)$ که در آن n بیانگر تعداد خطوط جریان است. علاوه بر این نشان داده شده است که هزینه محاسباتی روش خط جریان نسبت به تعداد سلول های محاسباتی نیز به صورت خطی تغییر می کند.^[۱]

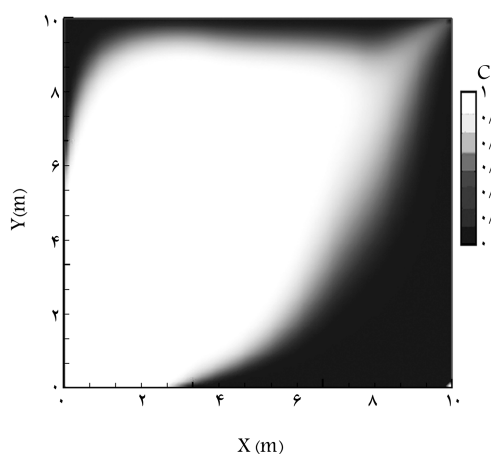
حال در این قسمت نتایج به دست آمده از شبیه سازی جریان در داخل مخزن با دو مدل توزیع نفوذپذیری 80×80 سلول که در شکل های ۱۲ و ۱۳ آمده اند، مورد بررسی قرار می گیرند. مدل شکل ۱۲ برای شبیه سازی جریان تک فاز و مدل شکل ۱۳ برای شبیه سازی جریان دو فاز در نظر گرفته شده است.

در شکل های ۱۴ و ۱۵ به ترتیب توزیع درجه غلظت در جریان تک فاز داخل مخزن با مدل نفوذپذیری شکل ۱۲ با استفاده از روش خط جریان و روش بادسوی مرتبه دوم تا نزدیکی 0.65 تزریق حجمی روزنه (PVI)^{۱۸} نشان داده شده است. این شکل ها نشان دهنده دقت روش خط جریان (عدم پخش عددی و نشان دادن محل دقیق ناپیوستگی) هستند. باید توجه داشت که در جریان تک فاز معادله فشار یک بار برای کل فرایند شبیه سازی حل می شود و لذا خطوط جریان نیز یک بار برای کل

در این روش را نیز مشاهده کرد. برای بهتر نشان دادن خواص یاد شده در روش خط جریان نسبت به روش های استاندارد، در مقطعی از مخزن ($x = 5 \text{ m}$) میدان درجه غلظت به صورت یک بعدی در شکل ۸ نشان داده شده است.

چنان که مشاهده می شود روش خط جریان توانایی نشان دادن محل دقیق ناپیوستگی را دارد و این نشان دهنده عدم وجود پخش عددی در این روش است. همچنین در شکل ۹ تابع جریان کسری در چاه برداشت برای زمان های مختلف در مخزن مذکور نشان داده شده است. بر اساس این شکل می توان دید که روش خط جریان به صورت دقیق زمان برش آبی ($t = 18 \text{ s}$) را معین می کند و کاملاً منطبق بر حل تحلیلی موجود است.^[۱۷]

در شکل های ۱۰ و ۱۱ به طور کلی هزینه محاسباتی در روش خط جریان نشان داده شده است. شکل ۱۰ نشان می دهد که هزینه محاسباتی مورد نیاز برای روش خط جریان در جریان تک فاز وابسته به زمان شبیه سازی نیست. یعنی این روش هر زمانی را با هزینه یکسان شبیه سازی می کند. این در حالی است که روش های معمولی (مانند بادسو) به علت داشتن شرط پایداری و وجود محدودیت روی گام زمانی در آنها، با افزایش زمان شبیه سازی هزینه محاسباتی آنها نیز مانند آنچه که در شکل ۱۰ نشان داده شده است، افزایش می یابد. همچنین در

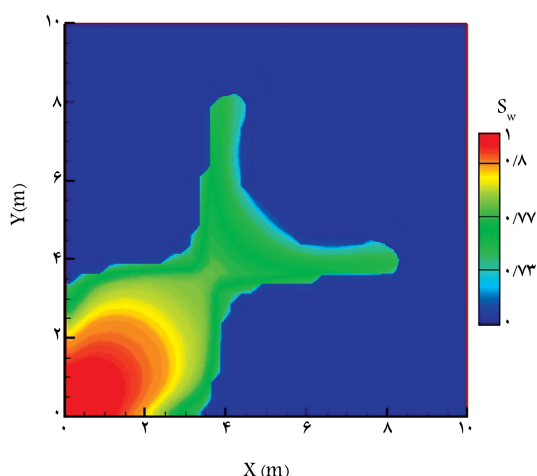


شکل ۱۵. توزیع درجه‌ی غلظت در جریان تک‌فاز تا نزدیکی ۰/۶۵ تزریق حجمی روزنه با استفاده از روش بادسوی مرتبه دوم.

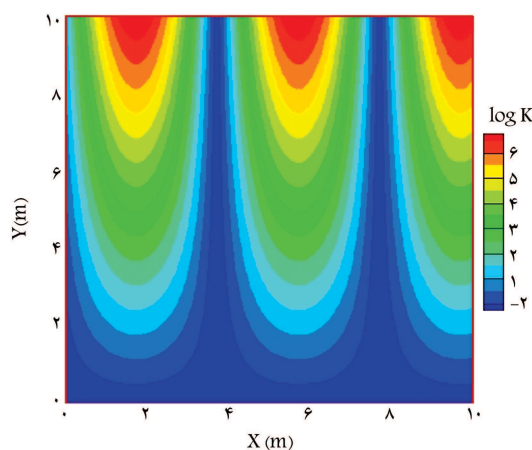
است که توزیع درجه‌ی غلظت با روش بادسوی مرتبه دوم در ۱۰۰۰ گام زمانی (گام زمانی به علت شرط پایداری توسط روش عددی حل معادله‌ی انتقال تعیین می‌شود) و با زمان محاسباتی ۴۲۰ ثانیه به دست آمده است. پس می‌توان گفت در این مسئله روش خط جریانی تقریباً ۱۴ برابر سریع‌تر از روش بادسوی مرتبه‌ی دوم است.

در شکل‌های ۱۶ و ۱۷ توزیع درجه‌ی اشباع فاز آب در جریان دوفازی آب و نفت در داخل مخزن شکل ۱۳ به ترتیب با استفاده از روش خط جریان و روش بادسوی مرتبه‌ی دوم با ۲۵ بار حل معادله‌ی فشار تا نزدیکی ۰/۷۵ تزریق حجمی روزنه نشان داده شده است. در جریان دوفازی یا چندفازی، به دلیل تابعیت ضرایب معادله‌ی فشار از درجه‌ی اشباع (از طریق نفوذپذیری نسبی)، معادله‌ی فشار باید به صورت دوره‌یی حل شود.

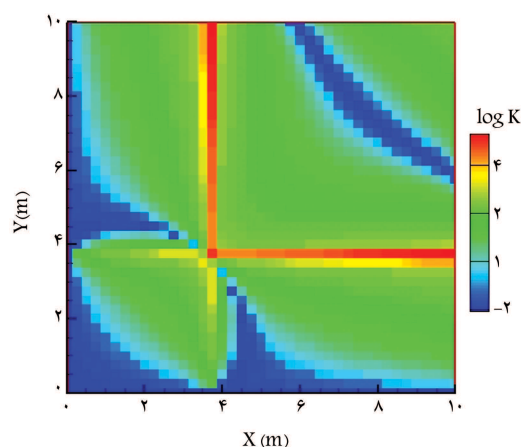
تعیین دفعات حل معادله‌ی فشار بستگی به فیزیک جریان و میزان همبستگی معادلات اشباع و فشار دارد. مثلاً در جریان دوفازی در نظر گرفته شده در این نوشتار (سیلاب‌زنی آبی^[۱۹])، در منابع موجود نشان داده شده^[۱] که با حل چند بار (تعداد کم) معادله‌ی فشار می‌توان مشکل غیرخطی بودن ضرایب معادله‌ی فشار را حل کرد. بنابراین در به‌کارگیری روش خط جریان در این جریان‌ها گام زمانی توسط معادله‌ی



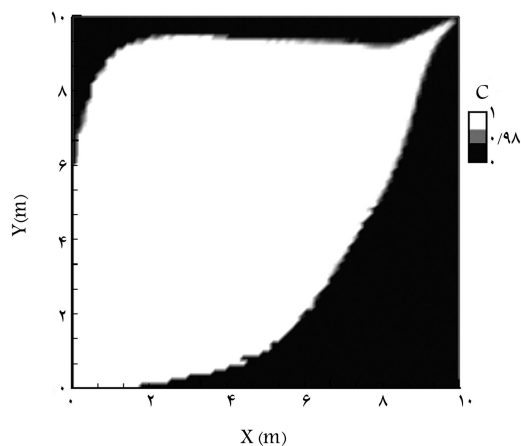
شکل ۱۶. توزیع درجه اشباع آب در جریان دوفاز آب و نفت تا نزدیکی ۰/۷۵ تزریق حجمی روزنه با استفاده از روش خط جریان.



شکل ۱۲. لگاریتم توزیع نفوذپذیری برای مخزن در نظر گرفته شده برای شبیه‌سازی جریان تک‌فاز.



شکل ۱۳. لگاریتم توزیع نفوذپذیری برای مخزن در نظر گرفته شده برای شبیه‌سازی جریان دوفاز.



شکل ۱۴. توزیع درجه‌ی غلظت در جریان تک‌فاز تا نزدیکی ۰/۶۵ تزریق حجمی روزنه با استفاده از روش خط جریان.

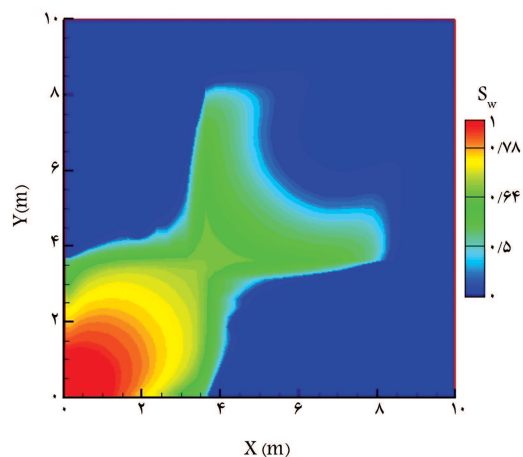
زمان شبیه‌سازی ردیابی می‌شود. بنابراین در استفاده از روش خط جریان در جریان تک‌فاز، می‌توان گام زمانی را برابر کل زمان شبیه‌سازی انتخاب کرد و شبیه‌سازی در یک گام زمانی تمام شود. بر همین اساس، توزیع درجه‌ی غلظت به روش خط جریانی در یک گام زمانی و با زمان محاسباتی ۳۰ ثانیه به دست آمده است. این در حالی

بالا در تعیین محل ناپیوستگی، تقریباً ۱۲ برابر سریع‌تر از روش استاندارد بادسوی مرتبه دوم است.

۵. نتیجه‌گیری

در این مطالعه الگوریتم شبیه‌سازی براساس روش خط جریان برای مسائل دوبعدی با شبکه‌بندی باسازمان توضیح داده شد. در این روش براساس دیدگاه IMPES پس از حل معادله‌ی فشار و محاسبه‌ی میدان سرعت، از روش خط جریان برای حل صریح معادلات انتقال استفاده شد. کاربرد این روش در جریان تک‌فاز به علت برابر بودن گام زمانی با کل زمان شبیه‌سازی، و در جریان دوفاز به علت برابر بودن گام زمانی با گام زمانی حل دوره‌ی معادله‌ی فشار که معمولاً عدد بزرگی است، باعث کاهش زمان محاسباتی شد.

نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی براساس روش خط جریان، علاوه بر تأیید دقت بالای جواب‌های حاصله، نشان‌دهنده‌ی توانمندی روش در کاهش هزینه‌ی محاسباتی با ضریب ۱۰ تا ۲۶ برابر نسبت به روش‌های سنتی برای مسئله‌ی با مدل زمین‌شناسی ۲۵۰۰ تا ۹۰۰۰۰ سلول است. هرچه اندازه مدل مخزن بزرگ‌تر باشد، ضریب افزایش سرعت شبیه‌سازی با روش خط جریان نیز بالاتر خواهد بود. برای بررسی‌های آینده می‌توان روش خط جریان را با روشی سریع برای حل معادله‌ی فشار -- مانند روش چندمقیاسی حجم کنترل -- ترکیب کرد. با انجام این کار می‌توان زمان مورد نیاز کل فرایند شبیه‌سازی را به صورت چشمگیری کاهش داد.



شکل ۱۷. توزیع درجه اشباع آب در جریان دوفاز آب و نفت تا نزدیکی ۰/۷۵ تزریق حجمی روزنه با استفاده از روش بادسوی مرتبه دوم.

فشار تعیین می‌شود، که معمولاً هم گام زمانی بزرگی است. اما به‌هنگام استفاده از روش‌های سنتی برای شبیه‌سازی، گام زمانی را روش حل عددی مورد استفاده برای حل معادله‌ی انتقال (به‌خاطر شرط پایداری) تعیین می‌کند.

برهمین اساس، توزیع درجه‌ی اشباع فاز آب در روش خط جریان با زمان محاسباتی ۳۳۱ ثانیه و در روش بادسوی مرتبه دوم با زمان ۳۹۱۰ ثانیه به دست آمده، و این نشان می‌دهد که در این مسئله روش خط جریان علاوه بر داشتن دقت

پانویس‌ها

1. streamline method
2. time of flight
3. particle tracking
4. Shafer
5. mixed multi-scale finite elements
6. mass balance error
7. immiscible
8. Darcy's law
9. fractional flow
10. CFL condition
11. forward
12. backward
13. Pollock
14. piston-like displacement
15. buckley-leverett displacement
16. courant-friedrich-levy condition
17. linear upwind differencing (LUD)
18. pore volume injection
19. water-flooding

منابع (References)

1. Thiele, M.R. "Streamline simulation", 6nd Int. Forum on Reservoir Simulation (2001).

2. Shafer, J.M. "Reverse path-line calculation of time related capture zones in non-uniform flow", *Ground Water*, **25**(3), pp. 283-289 (1987).
3. Pollock, D.W. "Semi-analytical computation of path-lines for finite difference models", *Ground Water*, **26**(6), pp. 743-750 (1988).
4. Datta-Gupta, A. and King, M.J. "A semi-analytical approach to tracer flow modeling in heterogeneous permeable media", *Advances in Water Resources*, **18**(1), pp. 9-24 (1995).
5. King, M.J., Blunt, M.J., Mansfield, M.M. and Christie, M.A. "Rapid evaluation of the impact of heterogeneity on miscible gas injection", *In SPE Western Regional Meeting*, pp. 495-504 (1993).
6. Thiele, M.R., Batycky, R.P., Blunt, M.J. and Orr Jr, F.M. "Simulating flow in heterogeneous systems using stream-tubes and streamlines", *SPE Reservoir Engineering*, **11**(1), pp. 5-12 (1996).
7. Batycky, R.P. "A Three-dimensional two-phase field scale streamline simulator", PhD Thesis, Stanford University (January 1997).
8. Jessen, K. and Berenblyum, R.A. "Black oil streamline simulator with capillary effects", *The SPE Annual Technical Conference and Exhibition held in Denver, Colorado, USA* (2003).

9. Haegland, H. "Streamline tracing on irregular grids", PhD thesis, University of Bergen (December 2003).
10. Haegland, H. "Streamline methods with application to flow and transport in fractured media", PhD Thesis, University of Bergen (2009).
11. Aarnes, J.E., Kippe, V. and Lie, K.A. "Mixed multi-scale finite element and streamline methods for reservoir simulation of large geo-models", *Advances in Water Resources*, **28**, pp. 257-271 (2005).
12. Matringe, S.F. "Accurate streamline tracking and coverage", Master's thesis, Stanford University (June 2004).
13. Chen, Z., Huan, G. and Ma, Y., *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*, Society for Industrial Mathematics (2006).
14. Kippe, V., Haegland, H. and Knut-Andreas, L. "A method to improve the mass balance in streamline methods", SPE, 106250, SPE Reservoir Simulation Symposium, Houston, Texas U.S.A., pp. 233-244 (February 2007).
15. Ahmed, T.H. and McKinney, P.D. *Advanced Reservoir Engineering*, Gulf Professional Publish (2004).
16. Rozon, B. "A generalized finite volume discretization method for reservoir simulation", In SPE Symposium on Reservoir Simulation, Texas (1989).
17. Stenerud, V.R. "Multi-scale-streamline inversion for high-resolution reservoir models", PhD Thesis, Norwegian University of Science and Technology (October 2007).
18. Blunt, M.J., Liu, K. and Thiele, M.R. "A generalized streamline method to predict reservoir flow", *Petroleum Geosciences*, **2**(3), pp. 259 (1996).