

# شناسایی حوزه‌ی فرکانس یک سازوکار سروویی در حضور اصطکاک و لقی

مهدی نیکوسخن لامع (کارشناس ارشد)

افشین بنازاده\* (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف

مهندسی مکانیک شریف، بهار ۱۳۹۳ (۳۰-۳۱ ص. ۱، شماره ۱، ص. ۳۰-۳۱)

سیستم‌های سروو به‌عنوان بخشی از سازوکار کنترل، نقش تعیین‌کننده‌ی در طراحی سیستم‌ها و عملکرد دینامیکی آنها دارند. تحلیل این سیستم‌ها به‌دلیل غیرخطی بودن و وجود اصطکاک و لقی دارای پیچیدگی‌هایی است. در نوشتار حاضر شناسایی حوزه‌ی فرکانس سیستم سروو غیرخطی، در حضور لقی و اصطکاک، ارائه شده است. دینامیک خطی مسئله با استفاده از تکنیک موجود شناسایی به‌ارزی ورودی و خروجی‌های تفاضلی، ضریب لقی براساس تأخیر فاز تابع تبدیل، و بالاخره ضریب اصطکاک لغزشی با استفاده از بهینه‌سازی به دست آمده است. به‌علاوه، در این نوشتار عملکرد سیگنال تحریک جاری فرکانسی، در شناسایی سیستم‌های سروو ارزیابی شده که نتایج حاصل از آن بیان‌گر توانایی کامل این سیگنال در شناسایی سیستم‌های سروو غیرخطی است. شناسایی انجام‌شده در این نوشتار بر پایه‌ی به کارگیری نرم‌افزار کاربردی CIFER، با الگوریتم‌های ریاضی قوی و مقاوم در مقابل نویز انجام شده که برای اولین بار در شناسایی سیستم‌های سروو مورد استفاده قرار گرفته است.

واژگان کلیدی: شناسایی حوزه‌ی فرکانس، سیستم سرو، اصطکاک، لقی، CIFER.

## ۱. مقدمه

شناسایی فرایندی است که طی آن مدل دینامیکی دقیقی از پرنده با کمک آنالیز پاسخ‌های آن به ورودی‌های معین کنترلی به دست می‌آید. مدل دینامیکی که ابتدائاً بر مبنای فیزیک جسم و از طریق شبیه‌سازی تولید می‌شود هیچ‌گاه کامل نیست و قابلیت پیش‌گویی برخی از پدیده‌های ظریف غیرخطی را ندارد. هدف از شناسایی سیستم‌های سروو، افزایش دقت مدل‌سازی به‌منظور کنترل فرایندهای خیلی دقیق -- نظیر ماشین‌کاری المان‌های نیمه‌هادی یا به کارگیری حافظه‌های مغناطیسی -- است. از دیگر انگیزه‌های شناسایی سیستم‌های سروو عدم دسترسی به اطلاعات زیرسیستم‌ها، نظیر مدل موتور الکتریکی یا ممان اینرسی‌های بار یا مدهای سازه‌یی آن است. سازوکار سروویی شامل یک موتور DC و بار متصل به آن است که توسط یک شفت به موتور متصل شده و در اینجا، از مدل شبیه‌سازی غیرخطی تمام عیار آن در فرایند شناسایی استفاده شده است. از دهه‌ی ۵۰ میلادی تاکنون روش‌های متنوعی برای شناسایی و تخمین پارامترهای یک سیستم ارائه شده است. با افزایش قدرت محاسباتی و توسعه‌ی الگوریتم‌های شناسایی، «حوزه‌ی فرکانس» به‌لحاظ مرابای فراوانش با اقبال بیشتری مواجه شده است. همچنین با توجه به سهولت تحلیل سیستم‌های خطی و طراحی کنترل‌کننده برای آنها، تهیه‌ی یک مدل خطی

تاکنون عمده مطالعات صورت گرفته در شناسایی غیرخطی در زمینه‌ی اصطکاک بوده که در بیشتر سیستم‌های مکانیکی وجود دارد. در مطالعات انجام شده به‌منظور شناسایی اصطکاک، با در نظر گرفتن یک قطب، از یک تقریب ساده بهره گرفته شده است.<sup>[۱]</sup> همچنین از روش شناسایی برخط در حوزه‌ی زمان با استفاده از الگوریتم‌های تطبیقی برای شناسایی ضریب اصطکاک استفاده شده است.<sup>[۲]</sup> محققین با تعریف مسئله به‌عنوان یک مسئله‌ی بهینه‌سازی، از الگوریتم‌های بهینه‌سازی تکاملی استفاده کرده‌اند.<sup>[۳]</sup> در مطالعه‌ی که به شناسایی حوزه‌ی فرکانس سازوکار سروویی در حضور

\* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۲/۴، اصلاحیه ۱۳۹۱/۱۱/۸، پذیرش ۱۳۹۱/۱۱/۱۴.

nikusokhan@ae.sharif.edu  
banazadeh@sharif.edu



جدول ۱. پارامترهای سیستم سرو.

| پارامتر                      | علامت    | مقدار                                 |
|------------------------------|----------|---------------------------------------|
| ثابت گشتاور                  | $k_t$    | $^{\circ} / \wedge \text{ N.m/A}$     |
| ضریب القایی آرمیچر           | $L_a$    | $^{\circ} / ^{\circ} \text{ H}$       |
| مقاومت آرمیچر                | $R_a$    | $\text{ohm}$                          |
| ثابت نیروی ضد محرکه          | $k_b$    | $^{\circ} / ^{\circ} \text{ V/rad/s}$ |
| بهره تقویت کننده امواج       | $k_{ii}$ | $\text{}$                             |
| بهره فرمان                   | $k_u$    | $\text{}$                             |
| اینرسی موتور                 | $J_m$    | $^{\circ} / ^{\circ} \text{ kg.m}^2$  |
| ضریب میرایی موتور            | $B_m$    | $^{\circ} / \text{ N.m/rad/s}$        |
| ضریب سختی سازه               | $K_s$    | $\text{ N.m/rad}$                     |
| ضریب میرایی لغزنده و یاتاقان | $B_s$    | $^{\circ} / \text{ m/rad/s}$          |
| جرم لغزنده                   | $m$      | $\text{ kg}$                          |
| گام جلویر بلبرینگ            | $L$      | $^{\circ} / \wedge \text{ m}$         |
| اصطکاک کلمب                  | $F_c$    | $^{\circ} / \text{ N.m}$              |
| اصطکاک ایستایی               | $F_s$    | $^{\circ} / \text{ N.m}$              |
| عرض لقی                      | $D$      | $^{\circ} / \text{ deg}$              |

جدول ۲. پارامترهای مدل ساده.

| پارامتر        | علامت | مقدار               |
|----------------|-------|---------------------|
| ثابت زمانی     | $T_c$ | $^{\circ} / \wedge$ |
| اصطکاک کلمب    | $F_c$ | $^{\circ} /$        |
| اصطکاک ایستایی | $F_s$ | $^{\circ} /$        |
| عرض لقی        | $D$   | $^{\circ} / \wedge$ |

طیف توان نوز عبارت است از: [۴]

$$PSD_{noise} = \frac{\sigma^2}{f_s} = 5 \times 10^{-8} \text{ volt}^2 \text{ Hz}^{-1} \quad (9)$$

این چگالی طیف توان در مدل ساده به صورت یکسان روی ورودی و خروجی در نظر گرفته شده است. در مدل واقعی به منظور در نظر گرفتن شرایط محتمل تر در واقعیت، چگالی طیف توان ورودی و خروجی با هم متفاوت در نظر گرفته شده است:

$$PSD_{in} = 5 \times 10^{-9} \text{ volt}^2 \text{ Hz}^{-1}$$

$$PSD_{out} = 5 \times 10^{-8} \text{ volt}^2 \text{ Hz}^{-1} \quad (10)$$

### ۳. تفکیک مدل در حضور اصطکاک

در حضور اصطکاک (شکل ۲) بین ورودی ( $u$ ) و خروجی ( $v$ ) یک رابطه غیرخطی وجود دارد. سیگنال ( $w$ ) ورودی قسمت خطی مدل است. برای شناسایی قسمت خطی مدل نیاز به ورودی خطی ( $w$ ) و خروجی ( $v$ ) است. پاسخ مدل ساده و تاریخچه زمانی سیگنال های  $v$  و  $w$  به ازای ورودی سینوسی  $u$  در شکل ۳ نشان داده شده است. چنان که مشاهده می شود سیگنال  $w$  با سیگنال  $u$  به خاطر غیرخطی

که در آن  $J_m$  ممان اینرسی موتور،  $B_m$  ضریب لزجی موتور،  $K_s$  ثابت فنریت شفت،  $\theta_s$  زاویه چرخ دنده ی شفت، و  $T_f$  گشتاور اصطکاکی است. گشتاور اصطکاک نیز مطابق رابطه ی ۶ محاسبه می شود:

$$T_f(\dot{\theta}_m) = T_c \text{sgn}(\dot{\theta}_m) \quad |\dot{\theta}_m| > 0$$

$$T_f(\dot{\theta}_m = 0) = T_m \quad -T_s \leq T_m \leq T_s \quad (6)$$

که در آن  $T_c$  ضریب اصطکاک کلمب و  $T_s$  ضریب اصطکاک ایستایی است. مدل لقی که بین چرخ دنده شفت موتور و چرخ دنده شفت بار است عبارت است از:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_s = 0 & |\theta_m - \theta_s| < D/2 \\ \theta_s = \theta_m - \text{sgn}(\theta_m)D/2 & |\theta_m - \theta_s| \geq D/2 \end{cases} \quad (7)$$

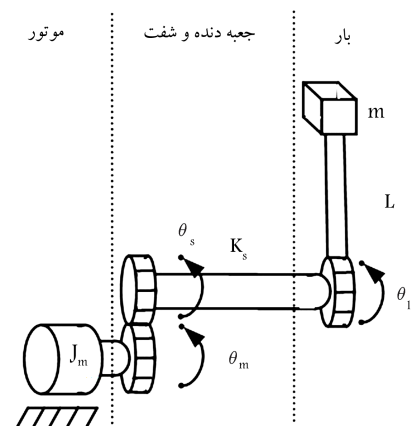
که در آن  $D$  دامنه ی لقی و  $\theta_s$  زاویه چرخ دنده شفت بار است. در این تحقیق مشابه مرجع [۴]، بار، یک میز سرسره ی لغزشی در نظر گرفته شده است. بنابراین شفت بار یک جسم با جرم  $m$  را در فاصله  $L$  حرکت می دهد. اما دینامیک حرکتی بار نیز چنین است:

$$mL^2 \ddot{\theta}_l = K_s(\theta_s - \theta_l) - B_s \dot{\theta}_l \quad (8)$$

که در آن  $\theta_l$  زاویه بار و  $B_s$  ضریب لزجی بار است. تصویر شماتیک این مدل در شکل ۱ نشان داده شده است. نهایتاً به منظور انجام شبیه سازی غیرخطی این مدل، از مقادیر ارائه شده در جدول ۱ برای پارامترها استفاده شده است.

در بررسی های اولیه که به ارزیابی عملکرد تکنیک شناسایی به ازای تفاضل ورودی و خروجی پرداخته می شود از یک تابع تبدیل مرتبه یک با ثابت زمانی  $^{\circ} / 1$  استفاده شده است. در این حالت پارامترهای این مدل ساده به صورت جدول ۲ در نظر گرفته شده است.

یکی از مسائل مهم در فرایند شناسایی، نوز اندازه گیری است. نوز سیگنال ورودی به دلیل نوز داخلی تقویت کننده ی مدار با منشأ حرارتی به وجود می آید، و نوز خروجی ناشی از عبور سیگنال از سیم هاست. نوز اندازه گیری ورودی و خروجی به صورت سفید با میانگین صفر در نظر گرفته شده است. این نوز هم روی ورودی و هم روی خروجی وجود دارد. با توجه به فرکانس نمونه برداری ۲ Khz، چگالی



شکل ۱. نمایش موتور، گیر بکس و بار.

#### ۴. طراحی سیگنال تحریک

برای شناسایی دینامیک یک سیستم در بازه‌ی فرکانسی مناسب، یک راه حل استفاده از سیگنال تحریک سینوسی با فرکانس‌های مختلف برای بارهای متعدد است که نیاز به تحریک سیستم به دفعات مختلف دارد. در مقابل این راه زمان‌بر، استفاده از یک سیگنال چندفرکانسی راه حل بهینه است. محققین استفاده از یک سیگنال باینری را که بین کم‌ترین و بیشترین دامنه تغییر می‌کند و تغییر دامنه براساس طیف فرکانسی مد نظر به صورت تصادفی انجام می‌شود، پیشنهاد کرده‌اند.<sup>[۴]</sup> همچنین اشاره شده است که فرکانس‌های سیگنال ورودی باید ضریب اعداد اول در  $\Delta F$  شود. دلیل این موضوع این است که تحریک یک سیستم غیرخطی با یک فرکانس ورودی باعث تولید هارمونیک‌های دیگر در خروجی می‌شود. اما فرکانس خروجی سیستم خطی دقیقاً همان فرکانس ورودی خواهد بود. بنابراین با مشخص شدن فرکانس خروجی نمی‌توان مشخص کرد که این فرکانس ضریبی از کدام فرکانس ورودی است. بنابراین پیشنهاد شده که فرکانس سیگنال ورودی، ضریبی از اعداد اول باشد. در این صورت ضرایب صحیح هیچ یک از ضرایب فرکانس ورودی نسبت به هم یکسان نخواهند بود.<sup>[۴]</sup> بازه فرکانسی مطلوب در یک سیستم سروو عبارت است از:

$$0.1f_c < f < 1/5f_c \quad (15)$$

برای مدل مرتبه‌ی اول با ثابت زمانی  $0.1$  بازه فرکانسی مطلوب عبارت است از:

$$1 < f < 15 \text{ (Hz)} \quad (16)$$

بنابراین مجموعه فرکانس‌های پایه بدین ترتیب انتخاب شده‌اند:<sup>[۴]</sup>

$$f_{PRBS} = [3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29] \times \Delta F \quad (17)$$

$\Delta F$  رزولوشن فرکانسی ناشی از نمونه‌برداری است و  $0.49^\circ$  در نظر گرفته شده است. در این نوشتار سعی شده است عملکرد سیگنال تحریک جاروی فرکانسی که دارای طیف پیوسته‌ی فرکانسی است و در شناسایی بسیاری از وسایل پرنده مورد استفاده قرار گرفته، ارزیابی شود. سیگنال تحریک جاروی فرکانسی عبارت است از:<sup>[۱۷]</sup>

$$\theta(t) = 2\pi(f_{\min} + c_2(f_{\max} - f_{\min})\frac{T_{rec}}{c_1})(e^{c_1 t/T_{rec}} - 1)$$

$$u(t) = \sin(\theta(t))$$

$$c_2 = 0.187 \quad c_1 = 4 \quad (18)$$

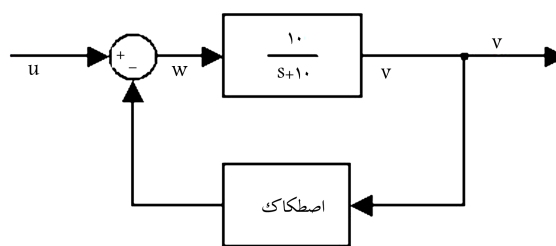
که در آن  $T_{rec}$  زمان نمونه‌برداری است و براساس رابطه‌ی ۱۹ انتخاب می‌شود:

$$T_{rec} = 4/f_{\min} = 4 \text{ sec} \quad (19)$$

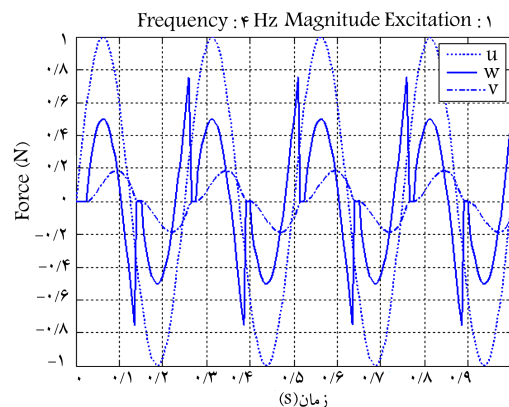
فرکانس کم‌ترین و بیشترین سیگنال جاروی فرکانسی براساس رابطه‌ی ۱۵ انتخاب می‌شود.

#### ۵. الگوریتم‌های ریاضی شناسایی

در این بخش به الگوریتم‌های ریاضی شناسایی شده در این تحقیق، و مقایسه‌ی آن با الگوریتم موجود<sup>[۴]</sup> می‌پردازیم. در برخی از مطالعات<sup>[۴]</sup> برای شناسایی تابع تبدیل از الگوریتم شناسایی حوزه فرکانس با عنوان برآوردکننده‌ی سیستم‌های خطی



شکل ۲. نمودار بلوکی سروو در حضور اصطکاک.



شکل ۳. پاسخ زمانی مدل در حضور اصطکاک با ورودی تحریک سینوسی.

اصطکاک متفاوت است. جهش‌های ایجاد شده در سیگنال  $w$  به دلیل اصطکاک ایستایی است. در مطالعات پیشین<sup>[۴]</sup> نشان داده شده است که اگر سیستمی با دو ورودی  $w_1$  و  $w_2$  که فقط دامنه متفاوت دارند تحریک شود، آنگاه سیگنال  $w_2 - w_1$  شبیه سیگنال  $w_2 - w_1$  خواهد بود با این تفاوت که در سیگنال  $w_2 - w_1$  به علت اصطکاک ایستایی جهش‌هایی وجود دارد که با افزایش دامنه‌ی  $u$  این جهش‌ها نیز حذف می‌شوند. بنابراین با داشتن تفاضل ورودی‌های اصلی، در حقیقت تفاضل ورودی‌های قسمت خطی را نیز داریم. از طرفی رابطه‌ی بین تفاضل  $w$  و  $v$  نیز خطی خواهد بود:

$$\left. \begin{matrix} w_1 \rightarrow v_1 \\ w_2 \rightarrow v_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow w_1 - w_2 \rightarrow v_1 - v_2 \quad (11)$$

علامت  $\rightarrow$  نشان‌گر یک رابطه‌ی خطی است. بنابراین با استفاده از تفاضل ورودی‌های خروجی‌ها می‌توان دینامیک خطی مدل را شناسایی، و سپس ضریب اصطکاک لغزشی را نیز تعیین کرد. برای این منظور یک ورودی پله به سیستم داده می‌شود. در حالت ماندگار رابطه‌ی ۱۲ بین ورودی و خروجی خطی برقرار است:

$$v_{dc} = w_{dc} \cdot k_{dc} \quad (12)$$

که در آن  $k_{dc}$  بهره‌ی حالت ماندگار است که در مرحله‌ی قبل تعیین شده است. از طرفی در حالت ماندگار ضریب اصطکاک ایستایی حذف می‌شود و فقط اصطکاک لغزشی داریم:

$$w_{dc} = u_{dc} - F_c \quad (13)$$

بنابراین، اصطکاک لغزشی عبارت است از:

$$F_c = u_{dc} - \frac{v_{dc}}{k_{dc}} \quad (14)$$

از تابع تبدیل پارامتری است.  $n_{\omega}$  تعداد نقاط فرکانسی،  $\omega_1$  و  $\omega_{n_{\omega}}$  فرکانس‌های شروع و خاتمه‌ی بازه مورد نظر است. وزن‌ها نیز عبارت‌اند از:

$$W_{\gamma}(\omega) = \left[ \gamma_{\gamma} \left( 1 - e^{-\gamma_{xy}} \right) \right]^2$$

$$W_g = 1, \quad W_p = 0.1745 \quad (25)$$

که در آن  $\gamma_{xy}$  تابع همبستگی<sup>۹</sup> است که معیاری قوی برای دقت شناسایی خطی یک سیستم است و به صورت رابطه‌ی ۲۶ تعریف می‌شود:

$$\gamma_{xy} = \frac{|\hat{G}_{xy}(f)|^2}{|\hat{G}_{xx}(f)| |\hat{G}_{yy}(f)|} \quad (26)$$

مقدار مناسب برای این پارامتر عبارت است از:

$$\gamma_{xy} > 0.6 \quad (27)$$

چنان که مشاهده می‌شود تفاوت قابل توجهی در الگوریتم شناسایی استفاده‌شده در این پژوهش و الگوریتم‌های معرفی‌شده پیشین<sup>[۲]</sup> وجود دارد.

## ۶. شناسایی مدل مرتبه‌ی اول در حضور اصطکاک

در اولین حالت ارزیابی به منظور بررسی روش شناسایی به‌ازای تفاضل ورودی و خروجی، مدل ساده‌ی مرتبه اول در حضور اصطکاک بررسی می‌شود. در اولین گام شناسایی مدل بدون نویز بررسی می‌شود. ضریب دامنه‌ی ورودی‌ها ( $k_u$ ) برای تولید دو مجموعه‌ی اندازه‌گیری به منظور ایجاد تفاضل ورودی و خروجی مقدار ۴/۱ و ۴ در نظر گرفته شده است. با توجه به این که در مدل نویز وجود ندارد، فیلتر نویز در نرم‌افزار در نظر گرفته نمی‌شود. انتخاب  $T_{win}$  به منظور انجام تکنیک پنجره‌بندی براساس رابطه‌ی ۱۸ به دست می‌آید:<sup>[۱۶]</sup>

$$T_{win} = 2/f_{min} = 2 \text{ sec} \quad (28)$$

شرط دیگر برای  $T_{win}$  براساس رابطه‌ی ۱۹ برقرار است:<sup>[۱۶]</sup>

$$T_{win} \leq T_{rec}/2 \quad (29)$$

به صورت نمونه تفاضل ورودی و خروجی سیستم سروو برای زمان نمونه‌برداری ۴s و به‌ازای ورودی جابری فرکانسی و ورودی تحریک سیگنال باینری چندفرکانسی (PRBS)<sup>۱۰</sup> در شکل ۴ آورده شده است. در شکل ۵ پاسخ فرکانسی واقعی سیستم و پاسخ‌های فرکانسی به دست آمده از PRBS و جابری فرکانسی نشان داده شده است. در شکل ۶ همبستگی و خطای تخمین به‌ازای دو ورودی آورده شده است. چنان که مشاهده می‌شود همبستگی مدل شناسایی‌شده با ورودی جابری فرکانسی بهتر از حالت با ورودی PRBS است. در ادامه تابع تبدیل برای پاسخ فرکانسی به دست آمده را استخراج می‌کنیم. با در نظر گرفتن تابع تبدیلی با درجه صفر برای صورت و درجه ۱ برای مخرج، با کمک ابزار NAVFIT و حدس اولیه‌ی تابع تبدیل به صورت رابطه‌ی ۳۰، تابع تبدیل برای هر دو ورودی شناسایی شده و در جدول ۳ ارائه شده است:

$$TF_{initial} = \frac{5}{0.5s + 5} \quad (30)$$

(EliS)<sup>۶</sup> -- که پیش‌تر ارائه شده بود<sup>[۱۸]</sup> -- استفاده شده است. این الگوریتم براساس بیشترین شباهت عمل می‌کند. در این روش با فرض تابع تبدیل:

$$v_k = \frac{N(\Omega_k, P)}{D(\Omega_k, P)} \cdot u_k = H(\Omega_k, P) \cdot u_k$$

$$\Omega_k = s_k = j\omega_k \quad k = 1, \dots, F$$

$$P = [a_0, a_1, \dots, a_d, b_0, b_1, \dots, b_n, T_d] \quad (20)$$

و فرض مدل اندازه‌گیری:

$$v_{mk} = H(\Omega_k, P)(u_{mk} - n_{uk}) + n_{vk} \quad (21)$$

با کمینه‌کردن تابع هزینه‌ی ۲۲، پارامترهای تابع تبدیل ( $P$ ) به دست می‌آید:

$$J(P) = \frac{1}{F} \times \sum_{k=1}^F \frac{|e^{-\Omega_k T_d} N(\Omega_k, P) u_{mk} - D(\Omega_k, P) v_{mk}|^2}{\sigma_{vk}^2 |D(\Omega_k, P)|^2 + \sigma_{uk}^2 |N(\Omega_k, P)|^2 - \Re\{CND_k\}}$$

$$CND_k = c_{uvk} e^{-\Omega_k T_d} \overline{N(\Omega_k, P)} D(\Omega_k, P)$$

$$c_{uvk} = 0.5 \text{cov}\{n_{uk}, n_{vk}\} \quad (22)$$

که شامل ضرایب صورت و مخرج و تأخیر زمانی ( $T_d$ ) است. چنان که مشاهده می‌شود، تابع هزینه مبتنی بر اندازه تابع تبدیل است. بدیهی است که برای استخراج  $v_{mk}, u_{mk}$  از داده‌های حوزه‌ی زمان باید از تبدیل فوریه استفاده کرد. از نکات مهم در الگوریتم ELiS ضرورت تعیین مشخصه‌های نویز است:<sup>[۱۸]</sup> این الگوریتم برای SNRهای کوچک نیز جواب قابل قبولی می‌دهد.

اما الگوریتمی که در نرم‌افزار CIPER برای شناسایی وجود دارد و در این تحقیق نیز به کار گرفته شده است، در دو مرحله و توسط زیربرنامه‌های خاصی اجرا می‌شود. در مرحله‌ی اول توسط زیربرنامه‌ی FRESPID با استفاده از الگوریتم CZT<sup>۷</sup> که خیلی سریع‌تر و کم‌هزینه‌تر از الگوریتم FFT است پاسخ فرکانسی به دست می‌آید. در این مرحله با استفاده از تکنیک پنجره‌بندی<sup>۸</sup> یک پاسخ فرکانسی یکنواخت براساس چگالی طیفی ورودی و خروجی استخراج می‌شود. با استفاده از چگالی طیفی برای تخمین مشخصه‌های پاسخ فرکانسی، نویزهای ورودی و خروجی حذف خواهند شد.<sup>[۱۶]</sup> در حقیقت برای تخمین بهینه‌ی پاسخ فرکانسی از رابطه‌ی ۲۳ استفاده می‌شود:

$$\hat{H} = 0.5 \left( \frac{\hat{G}_{xy}(f)}{\hat{G}_{xx}(f)} + \frac{\hat{G}_{yy}(f)}{\hat{G}_{xy}(f)} \right) \quad (23)$$

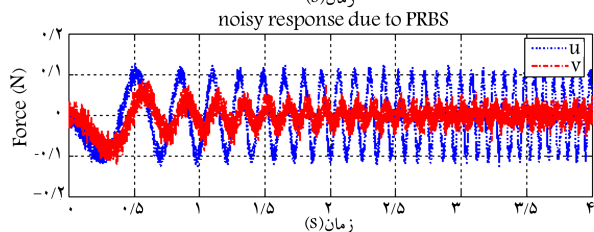
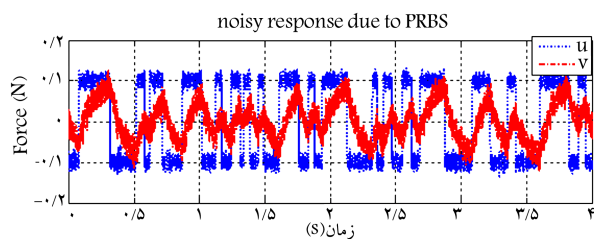
که در آن  $\hat{G}_{xy}(f), \hat{G}_{yy}(f), \hat{G}_{xx}(f)$  به ترتیب چگالی طیفی ورودی، خروجی و متقاطع تخمینی از داده‌های به دست آمده از اندازه‌گیری است. در مرحله‌ی دوم و توسط زیربرنامه NAVFIT تابع تبدیل مناسب برای انطباق با پاسخ فرکانسی به دست آمده در مرحله‌ی قبل به دست می‌آید. تابع هزینه تعریف شده در این زیربرنامه عبارت است از:

$$J = \frac{2}{n_{\omega}} \sum_{\omega_1}^{\omega_{n_{\omega}}} W_{\gamma} (W_g (|\hat{H}| - |H|)^2 + W_p (\angle \hat{H} - \angle H)^2) \quad (24)$$

که در آن  $|\hat{H}|$  و  $\angle \hat{H}$  مشخصه‌های پاسخ فرکانسی به دست آمده از تحلیل فرکانسی داده‌های اندازه‌گیری‌شده، و  $|H|$  و  $\angle H$  مشخصه‌های پاسخ فرکانسی به دست آمده

جدول ۳. مقایسه‌ی تخمین با ورودی‌های مختلف بدون حضور نویز.

| $F_c$ | Dc gain | Constant | Pole   | Case                 |
|-------|---------|----------|--------|----------------------|
| ۰٫۵   | ۱       | ۱۰       | -۱۰    | Ideal                |
| ۰٫۴۷  | ۰٫۹۹۲   | ۱۰٫۵۷    | -۱۰٫۴۸ | Frequency Sweep      |
| ۰٫۵۳  | ۱٫۰۰۸   | ۱۰٫۳۳    | -۱۰٫۲۴ | Pseudo-Random Binary |



شکل ۷. پاسخ زمانی نویزی مدل ساده به‌ازای هر دو ورودی.

جدول ۴. مقایسه‌ی تخمین با ورودی‌های مختلف در حضور نویز.

| $F_c$ | Dc gain | Constant | Pole   | Case                 |
|-------|---------|----------|--------|----------------------|
| ۰٫۵   | ۱       | ۱۰       | -۱۰    | Ideal                |
| ۰٫۴۶  | ۰٫۹۸۹   | ۱۰٫۲۴    | -۱۰٫۳۶ | Frequency Sweep      |
| ۰٫۴۱  | ۰٫۹۷۶   | ۱۰٫۵۶    | -۱۰٫۸۲ | Pseudo-Random Binary |

$$f_{filter} = 5f_{max} = 70 \text{ Hz}$$

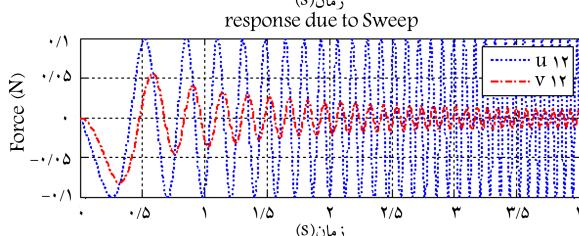
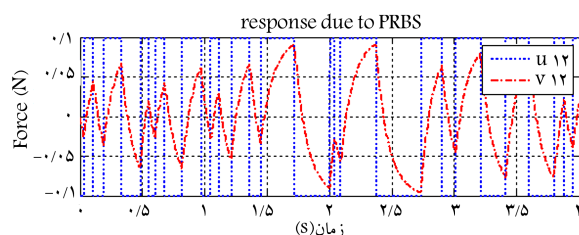
$$f_{sampling} = 5f_{filter} = 350 \text{ Hz} \quad (31)$$

بنابراین با حدس اولیه‌ی تابع تبدیل به‌صورت رابطه‌ی ۳۰، تابع تبدیل برای هر دو ورودی شناسایی، و در جدول ۴ ارائه شده است.

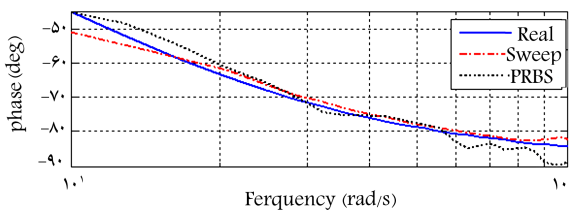
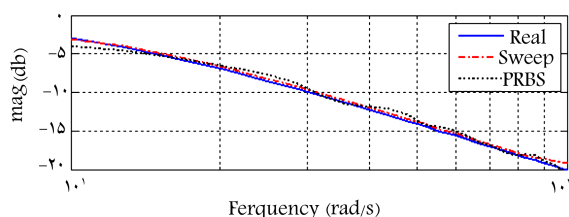
چنان که مشاهده می‌شود، در حضور نویز دقت تخمین‌های با ورودی جاری فرکانسی بهتر از ورودی شبه تصادفی باینری است. بنابراین در حالت کلی پاسخ فرکانسی شناسایی شده برای ورودی جاری فرکانسی بهتر از ورودی PRBS است. بنابراین برخلاف استدلال ارائه شده محققین<sup>[۱]</sup> مبنی بر این که باید سیگنال تحریک PRBS به‌منظور شناسایی سیستم‌های غیرخطی شامل ضرایب اول باشد، استفاده از سیگنال‌های تحریک جاری فرکانسی که شامل فرکانس‌های اعداد حقیقی است تخمین‌های بهتری ارائه می‌دهد. البته چون در موتورهای DC، ایجاد ورودی‌های دلخواه مشکل است و با استفاده از تکنیک «مدوله سازی پهنای پالس (PWM)»<sup>[۱۱]</sup> ورودی‌های دلخواه تولید می‌شود، پیاده‌سازی ورودی PRBS کمی ساده‌تر است.

## ۷. شناسایی در حضور لقی

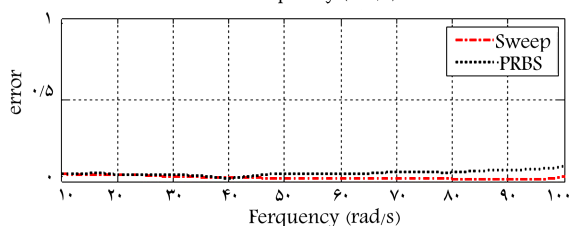
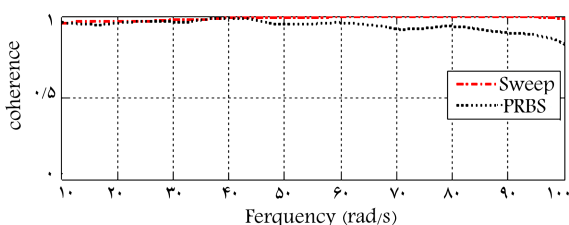
مدل سیستم سرووی کامل در حضور لقی در شکل ۸ نشان داده شده است که در آن  $z$  خروجی قسمت خطی مدل است. پاسخ مدل ساده و تاریخی‌های زمانی سیگنال‌های  $v$  و  $z$  به‌ازای ورودی سینوسی  $u$  در شکل ۹ نشان داده شده است.



شکل ۴. تفاضل ورودی‌های و خروجی‌ها در حضور اصطکاک با ورودی‌های مختلف.

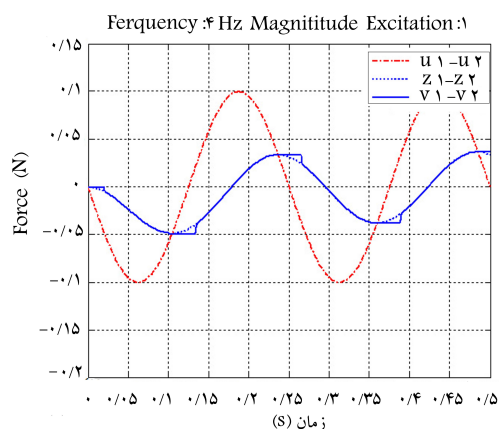


شکل ۵. پاسخ فرکانسی در حالت بدون نویز ( $u = 4 - 4/1$ ).

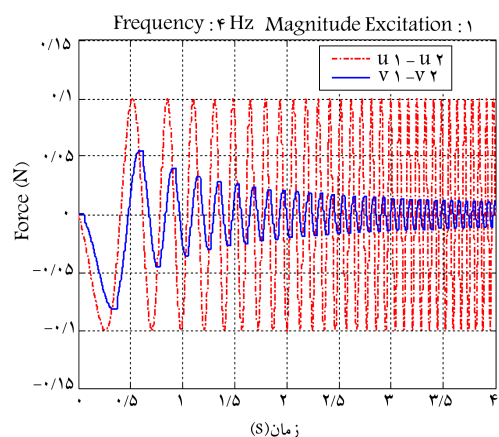


شکل ۶. همبستگی و خطای پاسخ فرکانسی در حالت بدون نویز ( $u = 4 - 4/1$ ).

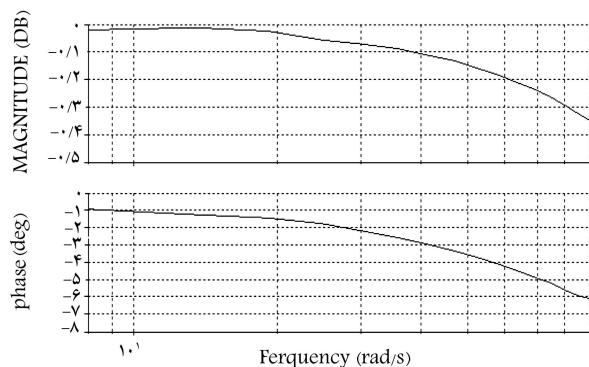
چنان که مشاهده می‌شود، دقت تخمین با دو نوع ورودی تحریک تقریباً یکسان است. در ادامه به شناسایی مدل در حضور نویز می‌پردازیم. تاریخی‌های زمانی تفاضل ورودی و خروجی به‌ازای هر دو ورودی در شکل ۷ نشان داده شده است. از آنجا که بیشینه فرکانس مطلوب ۱۴ Hz است، فرکانس فیلتر حذف نویز ۷۰ Hz و فرکانس پردازش شناسایی ۳۵۰ Hz براساس روابط ۳۱ انتخاب شده است.<sup>[۱۶]</sup>



شکل ۱۰. تفاضل خروجی‌ها در حضور لقی  $(u = 1/1 - 1)$ .



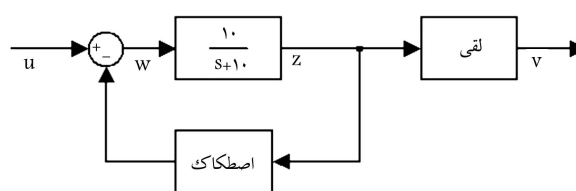
شکل ۱۱. تفاضل خروجی‌ها در حضور لقی با ورودی جاری فرکانسی.



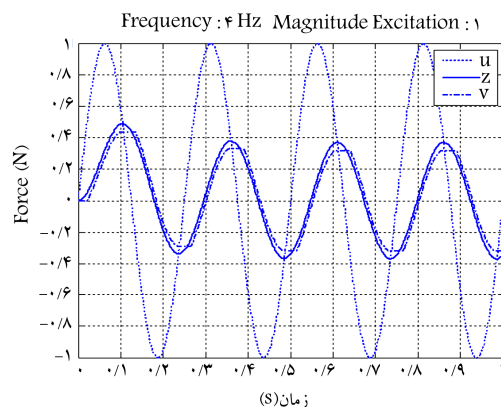
شکل ۱۲. پاسخ فرکانسی با ورودی  $z$  و خروجی  $v$  برای تعیین لقی.

جدول ۵. شناسایی تابع تبدیل در حضور لقی به‌ازای دامنه‌های ورودی مختلف.

| مورد  | قطب    | ثابت زمانی | بهره dc |
|-------|--------|------------|---------|
| ۱ - ۱ | -۱۰    | ۱۰         | ۱       |
| ۲ - ۱ | -۹/۱۵  | ۱۰/۸۹      | ۱/۱۹    |
| ۳ - ۱ | -۹/۷۸  | ۱۰/۵۶      | ۱/۰۶    |
| ۴ - ۱ | -۱۰/۱۶ | ۱۰/۴۱      | ۱/۰۲    |
| ۵ - ۱ | -۱۰/۲۳ | ۱۰/۳۴      | ۱/۰۱    |
| ۵ - ۱ | -۱۰/۲۶ | ۱۰/۳۰      | ۱/۰۰    |



شکل ۸. نمودار بلوکی سرووی کامل.



شکل ۹. پاسخ زمانی مدل در حضور لقی با ورودی تحریک سینوسی.

چنان که مشاهده می‌شود سیگنال  $z$  با سیگنال  $v$  به دلیل غیرخطی بودن لقی متفاوت خواهد بود. مشکل موجود در شناسایی قسمت خطی مدل در حضور لقی ناممکن بودن اندازه‌گیری  $z$  است. اما همانند تکنیک به کار گرفته شده در شناسایی مدل در حضور اصطکاک، اگر بتوانیم نشان دهیم که تفاضل  $v_1 - v_2$  با تفاضل  $z_1 - z_2$  یکی است مشکل حل خواهد شد، زیرا طبق شکل ۸ این بار می‌توان رابطه‌ی خطی بین تفاضل خروجی‌ها در نظر گرفت. یعنی با فرض خطی بودن  $w$  به  $z$  داریم

$$\left. \begin{matrix} w_1 \rightarrow z_1 \\ w_2 \rightarrow z_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow w_1 - w_2 \rightarrow z_1 - z_2 \quad (32)$$

در ادامه نشان می‌دهیم که تفاضل  $v_1 - v_2$  تقریب خیلی خوبی از  $z_1 - z_2$  است. برای مثال این دو تفاضل به‌ازای اختلاف دامنه‌های ۱/۱ و ۱ در شکل ۱۰ ارائه شده است. چنان که مشاهده می‌شود جز نواحی مربوط به حرکت بازگشت چرخ‌دنده، تفاضل  $v_1 - v_2$  و  $z_1 - z_2$  یکسان خواهد بود. بنابراین به راحتی می‌توان برای شناسایی لقی نیز از تکنیک تفاضل ورودی و خروجی، و افزایش دامنه‌ی ورودی تحریک استفاده کرد. برای این مسئله نیز با تابع تبدیل ایده‌آل اقدام به شناسایی شده است. ورودی تحریک، سیگنال جاری فرکانسی است که تاریخچه‌ی زمانی ورودی و خروجی آن در شکل ۱۱ ارائه شده است. نتایج شناسایی تابع تبدیل به‌ازای نسبت دامنه‌های مختلف در جدول ۵ ارائه شده است.

طبق نتایج ارائه شده در جدول ۵، با افزایش نسبت دامنه‌ی ورودی، دقت تخمین بهتر شده و تقریباً نسبت ۵ - ۵/۱ ارائه‌دهنده‌ی تخمین دقیق بهره‌ی حالت ماندگار است. حال با شناسایی تابع تبدیل دینامیک خطی سیستم، ورودی جاری فرکانسی را از تابع تبدیل شناسایی شده عبور داده و سیگنال خروجی را به عنوان ورودی ( $z$ )، و سیگنال  $v$  اندازه‌گیری شده را به عنوان خروجی در نظر می‌گیریم. چنان که در شکل ۱۲ مشاهده می‌شود، مدل شناسایی شده فقط یک تأخیر فاز است. با محاسبه‌ی تأخیر فاز می‌توان ضریب لقی را با استفاده از رابطه‌ی ۳۳ محاسبه

جدول ۶. شناسایی در حضور لقی در حالت با نویز.

| مورد | قطب   | ثابت زمانی | بهره dc | D    |
|------|-------|------------|---------|------|
| ۵-۱  | -۹/۳۷ | ۹/۹۶       | ۱/۰۶    | ۰/۱۲ |

کرد:

$$\hat{D} = 2A(\omega) \sin(\phi(\omega)) \quad (33)$$

که در آن  $\phi(\omega)$  میزان تأخیر فاز و  $A(\omega)$  دامنه‌ی سیگنال ورودی ( $z$ ) است، که براساس رابطه‌ی ۳۴ محاسبه می‌شود:

$$A(\omega) = K_u \times 10^{(|\hat{H}|_{db}) + |\hat{H}|_{db}/20} \quad (34)$$

که در آن  $|\hat{H}|_{db}$  دامنه‌ی تابع خطی شناسایی شده و  $|\hat{H}|_{db}$  دامنه‌ی تابع تبدیل با ورودی  $z$  و خروجی  $v$  است. برای مسئله‌ی مورد نظر، تأخیر فاز به وجود آمده در فرکانس  $87 \text{ rad/s}$  طبق رابطه‌ی ۳۵ برابر است با:

$$\phi = 6 \text{ deg}, \quad |\hat{H}|_{db} = -18.6 \text{ db}, \quad |\hat{H}|_{db} = -0.4 \text{ db} \\ \Rightarrow \hat{D} = 0.117 \quad (35)$$

که با توجه به مقدار واقعی دامنه‌ی لقی (جدول ۲)، خطای تخمین در حد ۱۷٪ است. بنابراین با این تکنیک با دقت خوبی دامنه‌ی لقی تعیین می‌شود. در حضور نویز نیز نتایج شناسایی به صورت جدول ۶ است.

چنان که مشاهده می‌شود تخمین دامنه‌ی لقی در حضور نویز نیز با دقت خوبی به دست آمده است و این نشان می‌دهد که تکنیک ارائه شده در این نوشتار برای تخمین دامنه‌ی لقی یک تکنیک مقاوم است که در حضور نویز نیز به خوبی جواب می‌دهد. روش‌های دیگری برای تخمین دامنه‌ی لقی در حوزه‌ی زمان وجود دارد اما در حضور نویز اندازه‌گیری دارای ضعف هستند و این خود تفاوت اصلی روش ارائه شده در این نوشتار با این روش‌هاست.

## ۸. مدل واقعی کامل و دقیق

تعیین بازه فرکانسی مطلوب ضرورت اولیه است. فرکانس قطع سیستم سرویی مد نظر به صورت تقریبی از رابطه‌ی ۳۶ به دست می‌آید:

$$f_c = \frac{B_m}{mL^2 + J_m} \quad (36)$$

با توجه به این که ممان اینرسی بار بیشتر از ممان اینرسی موتور است، و با داشتن مقدار تقریبی  $B_m$  براساس موتورهای مشابه داریم:

$$f_c \approx \frac{B_m}{mL^2} = 10 \text{ Hz} \quad (37)$$

بنابراین طبق رابطه‌ی ۱۵، و حتی نصف کردن مقدار کمینه‌ی فرکانس به منظور افزایش دقت‌ها داریم:

$$0.5 < f < 15 \text{ Hz} \quad (38)$$

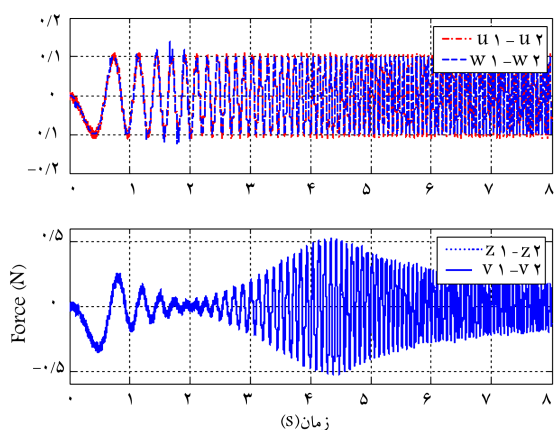
همچنین طبق رابطه‌ی ۱۹ داریم:

$$T_{rec} = 8 \text{ s} \quad (39)$$

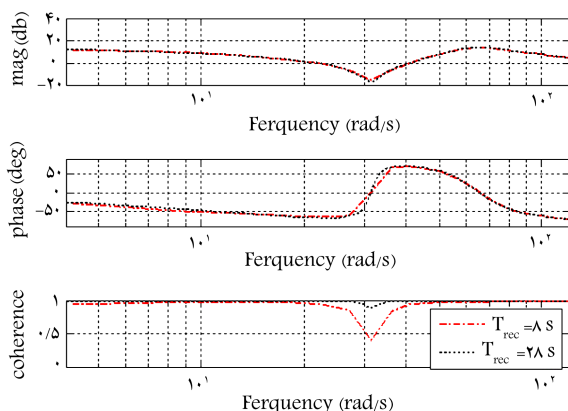
با توجه به توضیحات ارائه شده، طول پنجره نیز مطابق رابطه‌ی ۴۰ انتخاب شده است:

$$T_{win} = 4 \text{ s} \quad (40)$$

با اجرای مدل واقعی با تمام غیرخطی‌ها و در حضور نویز، تفاضل ورودی‌های قبل و بعد از اصطکاک و تفاضل خروجی‌های قبل و بعد از لقی، نتایج پاسخ زمانی در شکل ۱۳ نشان داده شده است. پاسخ فرکانسی به ازای تفاضل ورودی‌های و خروجی‌ها برای  $T_{rec} = 8 \text{ s}$  در شکل ۱۴ ترسیم شده است. چنان که مشاهده می‌شود در فرکانس  $12 \text{ rad/s}$  تابع همبستگی دارای افتی است که نشان‌دهنده‌ی رزولوشن فرکانسی کم در این ناحیه‌ی فرکانسی است و تغییرات دامنه و فاز در آن مشهود است. برای افزایش رزولوشن فرکانس باید  $T_{win}$  افزایش یابد، [۱۶] این در حالی است که به لحاظ ملاحظات کاهش نویز نمی‌توان  $T_{win}$  را بزرگ‌تر از  $5/T_{rec}$  انتخاب کرد. بنابراین تنها راه افزایش  $T_{win}$  افزایش زمان نمونه‌برداری است. برای این منظور زمان نمونه‌برداری را افزایش می‌دهیم تا رزولوشن فرکانسی افزایش یابد. نتیجه‌ی شناسایی در شکل ۱۴ نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود، تابع همبستگی به خوبی بهبود یافته و منحنی یکنواخت‌تری از پاسخ فرکانسی به دست آمده است. اما برای شناسایی تابع تبدیل دینامیک خطی در ابتدا از بیشترین درجه برای صورت و مخرج استفاده کرده و سپس با تحلیل مکان هندسی ریشه‌ها سعی در کاهش مرتبه تابع تبدیل کرده‌ایم. با استفاده از ابزار NAVFIT تابع تبدیل

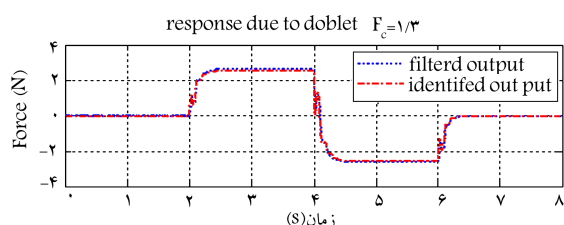


شکل ۱۳. پاسخ تفاضلی مدل واقعی با دامنه  $(u = 15 - 17)$ .

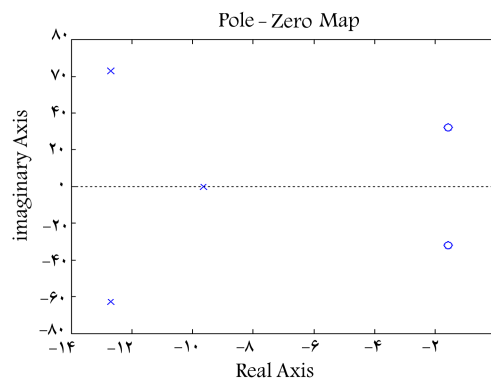


شکل ۱۴. پاسخ فرکانسی مدل واقعی با طول نمونه‌برداری‌های مختلف.

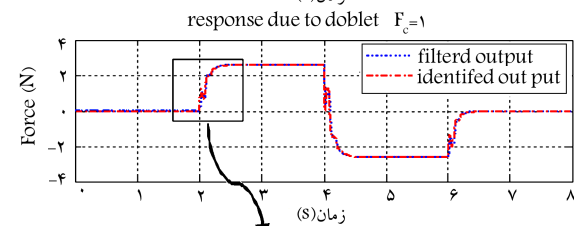




شکل ۱۵. صفر و قطب تابع تبدیل مرتبه‌ی ۴.



شکل ۱۶. صفر و قطب تابع تبدیل مرتبه‌ی ۳.



شکل ۱۷. ارزیابی پاسخ به ازای دابلت برای دو حالت  $\hat{F}_c = 1$  و  $\hat{F}_c = 1/3$ .

متوسط خطای ریشه‌ی میانگین مربعات به دست آمده است که نتیجه‌ی آن در شکل ۱۷ و مقدار خطا در رابطه‌ی ۴۴ ارائه شده است:

$$MSE_{\hat{F}_c=1/3} = 0.0114 \quad (44)$$

در این نوشتار پیشنهاد می‌شود که  $\hat{F}_c$  با بهینه‌سازی خطای ریشه میانگین مربعات به دست آید. با بهینه‌سازی پارامتر  $\hat{F}_c$  براساس روش بهینه‌سازی گرادینتی، مقدار ۱ به دست آمده است و مقدار خطا عبارت است از:

$$MSE_{\hat{F}_c=1} = 0.0095 \quad (45)$$

منحنی خروجی فیلترشده و خروجی مدل شناسایی شده نیز در شکل ۱۷ نشان داده شده است.

## ۹. نتیجه‌گیری

در این مطالعه شناسایی دینامیک خطی یک سیستم سرووی نمونه به صورت کامل و در حضور همزمان اصطکاک و لقی در حوزه‌ی فرکانس انجام شده است. تکنیک اصلی در این شناسایی حذف اثرات غیرخطی با استفاده از ورودی و خروجی‌های تفاضلی بوده است. بعد از شناسایی دینامیک خطی مسئله، استفاده از تأخیر فاز ایجادشده در شناسایی، میزان لقی و با استفاده از بهینه‌سازی عددی یک متغیره ضریب اصطکاک شناسایی شده است. شناسایی انجام شده با استفاده از نرم‌افزار کاربرد CIFER و با ورودی تحریک جابجایی انجام شده است. نتایج ارزیابی‌ها حاکی از آن است که روش ارائه شده، با دقت بسیار خوبی توانایی شناسایی دینامیک خطی سیستم سروو را در حضور نویز خواهد داشت. همچنین میزان لقی با خطای کم‌تر از ۱٪ نیز شناسایی می‌شود. این روش قابل اعمال به تمامی سیستم‌های دارای غیرخطی‌های لقی و اصطکاک خواهد بود.

$$G_{motor,load} = \frac{7.5s^2 + 24.4s^2 + 75.99s + 341}{s^2 + 33.9s^2 + 43.84/2s^2 + 39.495/1s + 40.68/0} \quad (41)$$

صفر و قطب‌های این تابع تبدیل در شکل ۱۵ نشان داده شده‌اند. چنان که مشاهده می‌شود، این تابع تبدیل یک صفر و قطب نزدیک به هم در نزدیکی صفر قرار دارند که قابل حذف است. بنابراین با کاهش مرتبه‌ی صورت و مخرج تابع تبدیل نهایی مطابق رابطه‌ی ۴۲، و با مقدار تابع هزینه‌ی ۰/۷ به دست آمده است:

$$G_{motor,load} = \frac{7.5s^2 + 23.5s + 76.97}{s^2 + 34.9s^2 + 43.80/3s + 39.883/1} \quad (42)$$

صفر و قطب‌های این تابع تبدیل در شکل ۱۶ نشان داده شده است. با اجرای فرایند تخمین ضریب اصطکاک و لقی، مقادیر به دست آمده عبارت‌اند از:

$$\hat{F}_c = 1/3, \quad \hat{D} = 0.116 \text{ deg} \quad (43)$$

$\hat{F}_c$  ضریب اصطکاک لغزشی معادل در دینامیک است که با استفاده از رابطه‌ی ۱۴ به دست می‌آید. با توجه به این که نیروی اصطکاک لغزشی در واقعیت در داخل مدل اعمال می‌شود و در مدل شناسایی شده مشابه شکل ۲ ضریب اصطکاک به دست می‌آید، ضریب اصطکاک شناسایی شده یک ضریب معادل است. با شناسایی تابع تبدیل قسمت خطی و مدل اصطکاک لغزشی و دامنه‌ی لقی، مدل شناسایی شده با یک ورودی دابلت در حوزه‌ی زمان ارزیابی می‌شود. با توجه به نویز بودن داده‌های اندازه‌گیری، خروجی از یک فیلتر با فرکانس قطع رابطه‌ی ۳۱ عبور کرده و در نهایت

## پانوشتها

1. extended Kalman Filter
2. augmented
3. dead zone
4. recursive least square (RLS)
5. Frequency sweep
6. estimator for linear systems (EliS)
7. Chirp Z-transform
8. windowing
9. coherence
10. pseudo random binary signal (PRBS)
11. pulse width modulation (PWM)

## منابع (References)

1. Tung, H.S. and Tomizuka, M. "Feedforward tracking controller design based on the identification of low frequency dynamics", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, Control*, **115**, pp. 348-356 (1993).
2. Wit, C.C. and Braun, K. "Adaptive friction compensation in DC motor drivers", *IEEE Journal Robot Automat*, RA-3, **3**(6), pp.681-685 (1987).
3. Kim, J.H., Chae, H.K., Jeon, J.Y. and Lee, S.W. "Identification and control of systems with friction using accelerated evolutionary programming", *IEEE Control System Magazine*, **16**(4) pp. 38-47 (1996).
4. Chen, Y.Y., Huang, P.Y. and Yen, J.Y. "Frequency domain identification algorithms for servo systems with friction", *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, **10**(5), pp. 654-665 (2002).
5. Hensen, R.H.A., Molengraft, M.J.G. and Steinbuch, M. "Frequency domain identification of dynamic friction model parameters", *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, **10**(2), pp. 191-196 (2002).
6. Shirazi, L.R. and Voda, A.B. "Backlash identification: A two step approach", *15th IFAC Triennial World Congress*, Spain, pp. 1-6 (2002).
7. Tjahjowidodo, T., Al-Bender, F. and Van Brussel, H. "Identification of backlash in mechanical systems", Department of Mechanical Engineering, Belgium, pp. 2195-2210 (2004).
8. Marton, L. and Lantos, B. "Friction and backlash measurement and identification method for robotic arms", *Advanced Robotics, ICAR*, pp. 1-6 (2009).
9. Hovland, G., Hanssen, S., Moberg, S., Brogardh, T., Gunnarsson, S. and Isaksson, M. "Nonlinear identification of backlash in robot transmissions", *Proceedings of the 33rd ISR (International Symposium on Robotics)*, pp. 1-6 (2002).
10. Voros, J. "Identification of nonlinear cascade systems with time-varying backlash", *Journal of Electrical Engineering*, **62**(2), pp. 87-92 (2011).
11. Villwock, S. and Pacas, M. "Time-domain identification method for determining mechanical backlash in electrical drives", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **56**(2), pp. 568-573 (2009).
12. Villwock, S. and Pacas, M. "Deterministic method for the identification of backlash in the time domain", *Proc.IEEE ISIE Conf*, pp. 3056-3061 (2006).
13. Merzouki, R., Davila, J., Cadiou, J. and Fridman, L. "Backlash phenomenon observation and identification", in *Proceeding of the 2006 American Control Conference*, Minnesota, USA, pp. 3322-3327 (2006).
14. Student Version 5.4.00 of, *Comprehensive Identification from Frequency Responses (CIFER@)*, UARC, Ames Research Center, Downloadable from <http://uarc.ucsc.edu/flight-control/cifer>.
15. Lai, G. and Ziaei, K. "Application of CIFER in a single flexible link manipulator system", Technical Report of University of Waterloo, pp. 1-61 (2003).
16. Wernholt, E. and Gunnarsson, S. "Nonlinear identification of a physically parameterized robot model", 14th Symposium on System Identification, pp. 143-148 (2006).
17. Tischler, M.B. and Remple, R.K. "Aircraft and rotorcraft system identification", AIAA Education Series, Virginia (2006).
18. Kollar, I. "On frequency domain identification of linear systems", *IEEE Transaction on Instrum. Meas.*, **42**, pp. 2-6 (1993).