

پایداری ژيروسکوپي حرکت غلتشي یک ربات کروي

حسین کریم پور* (استادیار)

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

مهدی کشمیری (دانشیار)

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

مجتبی محزون (دانشیار)

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز

مهندسی مکانیک شریف، (پاییز ۱۳۹۳)
دري ۲ - ۳۰، شماري ۲/۲، ص. ۱۱۲-۱۰۵

در این مطالعه پایداری دورانی یک نمونه ربات کروي دارای حرکت غلتشي و مجهز به روتورهای داخلی بررسی و تحلیل می شود. بدین منظور ابتدا یک مطالعه ی اغتشاشی انجام می پذیرد تا شرایط رسیدن به آستانه ی ناپایداری برای حرکت غلتشي مشخص شود. با اتکا به نظریه ی فلوکه و قضیه ی هاپف، شرایط پایداری در حالت های غلتش پایا و توزیع جرم متقارن محوری مورد مطالعه قرار می گیرد. با استخراج ثابت های حرکت حاکم بر این سیستم، معیاری برای پایداری و مطالعه ی دوشاخگی رفتار غلتشي در حالت کره مجهز به چرخ اینرسی داخلی تعیین می شود. همانند جسم معلق فضایی، این ربات در حین دوران حول محور اینرسی میانی تمایل به انحراف دارد. با تعبیه ی یک پایدارکننده ی داخلی، ساختار اینرسی کره به صورت دینامیکی تغییر می یابد تا به سیستمی ذاتاً پایدار بدل شود. کنترل پذیری برگرفته از این سازوکار داخلی، طرح ریزی حرکت در فضای مفصل روتورها را چنان ممکن می سازد که حرکت این ربات بر سطوح شیب دار نیز امکان پذیر شود.

واژگان کلیدی: ربات کروي، تحلیل پایداری ژيروسکوپي، طرح ریزی حرکت.

۱. مقدمه

هدف مورد نظر این مقاله، توسعه ی روشی برای طرح ریزی حرکت یک ربات کروي است که اندرکنش و تبادل اندازه حرکت آن با محرک های داخلی اش (روتورهای تعبیه شده در داخل) ربات را به حرکت وامی دارد. حرکت غلتشي این کره امکان حرکت پیوسته و همسویه با کم ترین استهلاک را در مسیرهای پیچیده فراهم می سازد. به دلیل تماس نقطه یی با محیط، انتقال مستقیم نیروی محرکه به درجات آزادی حرکتی با محدودیت مواجه خواهد بود. برای القای حرکت از سازوکارهایی مختلف -- سازوکارهایی نظیر برهم زدن تعادل از طریق جابه جایی مرکز ثقل، تبادل نکانه ی خطی و زاویه یی سیستم با اجزای داخلی شامل چرخ های اینرسی هرزگرد یا جرم های متحرک داخلی -- می توان بهره جست. بدین ترتیب، ترکیب قوانین بقا با قیود غلتش، تبدیل بخشی از انرژی دورانی داخلی به شکل انتقالی را ممکن می سازد؛ چنین راهکاری تا حدودی یادآور طرز کنترل سمت و جهت ماهواره ها در فضا است. سیستم محرکه و ساختار خاص بدنه ی این وسیله بالا یا پائین رفتن از سطوح شیب دار بدون خطر واژگونی را نیز ممکن می سازد. این ربات با تحرک پذیری منحصر به فرد و روان خود کاربردهای بسیاری دارد که گشت زنی و مراقبت از محوطه ها و راهروها از جمله ی آن هاست. کنترل این ربات کروي، به لحاظ طبیعت سینماتیکی و دینامیکی خاصی که دارد، از جمله مسائل چالش برانگیز است.^[۱]

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۲/۸/۵، اصلاحیه ۱۳۹۲/۱۰/۱۶، پذیرش ۱۳۹۲/۱۱/۲۰.

karimpour@iaukhsh.ac.ir
mehdik@cc.iut.ac.ir
mahzoon@shirazu.ac.ir

در قدم اول، این وسیله ی غیرمترعارف به صورت یک کره همگن در نظر گرفته می شود که نمونه یی ابتدایی است از یک سیستم دینامیکی با ماهیت غلتشي. هرگاه کره قدری از حالت همگون خارج شود یا توزیع اینرسی غیرهمسان گرد پیدا کند، رفتار پیچیده و غیر قابل انتظاری از خود بروز خواهد داد. یکی از این قبیل حرکت ها در حین چرخش پیچشی حول محور قائم رخ می دهد که با وجود شباهت ظاهری با مسئله ی فرفره، رفتاری متفاوت نشان می دهد. در راستای نیل تدریجی به رفتار کلی، سیستم های غلتشي ابتدا زیر دسته حرکت های پایا مورد بررسی قرار می گیرند. از جمله این حرکت ها می توان به چرخش حول محورهای اصلی جسم اشاره کرد که پایداری نسبی آنها را باید مورد بررسی قرار داد. اغلب پژوهش ها در این مورد بر فرفره یا توپ در حال پیچش، که از توزیع جرم متقارن محوری $I_2 = I_3$ برخوردارند یا ناهمگونی جزئی دارند، متمرکز شده اند. فرفره ی کروی مثال جالب توجهی است که ابتدا به صورت سیستم دینامیکی با قید حرکتی توسط محققین مدل شد و متعاقباً معلوم گشت که اثرات استهلاکی روی پدیده ی پرش وارون این فرفره نقش اساسی بازی می کند. بنابراین باید غلتش توأم با لغزش به صورت یک سازوکار هدردهنده ی انرژی وارد مدل شود.^[۲]

از طرف دیگر، معلوم می شود که سیستم مقید غلتشي دارای خواص مشابه همتای آزاد فضایی (ماهواره) است و از قوانین بقایی متعدد پیروی می کند. منحنی تحوّل سیستم در فضای فاز از تقاطع سطوح هم تراز انرژی و بقای اندازه حرکت قابل تعیین است. در مورد کره غلتان با توزیع جرم کلی، «انرژی» تنها کمیتی است که دارای

بقا است. درمورد کره غیر بالانس با توزیع جرم متقارن محوری، بر قراری دو قانون پایستگی دیگر میسر می شود. [۳] از تقارن های موجود در سیستم برای آشکارسازی ثابت های حرکت و قوانین بقای حاکم بر سیستم استفاده می شود. تحلیل کامل رفتار دینامیکی و پایداری کره فرفره ای متقارن محوری برحسب یکی از ثابت های حرکت، خروج از مرکزیت کره e/r و نسبت اینرسی I_T/I_1 قبلاً انجام گرفته است. [۱]

در اینجا نشان داده می شود که برای یک کره بدون خروج از مرکزیت ولی ناهمگون، تمایل به واژگونی و وارونگی به واسطه ی چرخش حول محور اصلی میانی اینرسی وجود دارد. مرحله ی بعد شامل مطالعه ی رفتار و پایداری سیستم کره غلتان در وضعیت های تعادل شبه دینامیکی پایاست. پایداری این حرکت ها با تعبیه ی یک چرخ اینرسی داخلی مورد بررسی قرار می گیرد و در نهایت طرح ریزی حرکت به کمک این قبیل محرک های داخلی مورد مطالعه قرار می گیرد. [۴، ۵]

۲. دینامیک کره غلتان و مشابهت آن با مسئله ی جسم معلق دوار

در بیان معادلات سینماتیکی و دینامیکی کره غلتان از دو چارچوب اینرسی $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ و متصل به جسم $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ با بیان های (E_1, E_2, E_3) و (e_1, e_2, e_3) در چارچوب متصل به جسم استفاده شده است. دستگاه معادلات حاکم بر حرکت دورانی یک کره مقید به غلتش به عنوان یک سیستم دینامیکی با قیود غیرانتگرال پذیر با استفاده از قوانین نیوتن - اوپار مطابق رابطه ی ۱ به دست می آید:

$$\frac{d\vec{M}_c}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{D\vec{M}_c}{dt} = \dot{\vec{M}}_c + \Omega \times \vec{M}_c = 0$$

$$\vec{M}_c = I\Omega + m\vec{r}^T \Gamma \times (\Omega \times \Gamma) \triangleq I(\Gamma)\Omega \quad (1)$$

که در آن Γ و Ω به ترتیب بردارهای یکه ی عمود بر صفحه ی غلتش و سرعت زاویه ای کره در دستگاه جسم محسوب می شوند. $\vec{M}_c$ تکانه ی زاویه ای سیستم حول نقطه ی تماس است که در حین حرکت حفظ می شود. I ماتریس گشتاور اینرسی حول مرکز جرم و $I(\Gamma)$ اپراتوری ماتریسی است که اثر آن بر بردار سرعت زاویه ای Ω در رابطه ی ۱ تعریف شد. بسط معادله ی ۱ را می توان چنین نوشت:

$$\begin{cases} I(\Gamma)\dot{\Omega} + \Omega \times I\Omega = 0 \\ \dot{\Gamma} + \Omega \times \Gamma = 0 \end{cases} \quad (2)$$

مقایسه ی این معادله با دوران جسم آزاد معلق در فضا، نشانگر مشابهت ساختاری معادلات حاکم بر آنهاست. لذا می توان انتظار داشت که از جسم آزاد معلق در فضا و از یک کره مقید به غلتش محض رفتارهای مشابه بروز کند. از جمله ی این رفتارها می توان به پدیده ی ناپایداری دورانی ماهواره حول محور اصلی میانی (و همچنین حول محور اینرسی حداقلی در صورت وجود عامل هدردهنده ی انرژی همچون ارتعاش پل های خورشیدی یا آنتن ها) اشاره کرد. بازشناسایی چنین تشابهاتی درمورد سیستم مقید غلتشی می تواند زمینه های کاربرد فضایی آنها را فراهم سازد. [۶]

در ادامه، با تکیه بر معادلات دینامیکی و شباهت ذکر شده، پایداری حرکت دورانی کره غلتان مجهز با فاقد دیسک های ژبرو پایداری کننده بررسی، و تحلیل هایی نوین از مطالعه ی پارامتری آن در اقسام حرکت های دورانی کره غلتان ارائه می شود.

۱.۲. حرکت فرفره ای کره ناهمگون و بدون خروج از مرکزیت

در این حالت که ابتدایی ترین حالت محسوب می شود، کره به صورت فرفره ای حول نقطه ی تماس خود چرخانده می شود و شرط پایداری مورد مطالعه قرار می گیرد. از صفر قرار دادن مشتق متغیرها در معادله ی ۲ معلوم می شود که وقتی محور دوران $\Omega = \Omega_0$ منطبق با یکی از محورهای اصلی باشد، حرکتی پایا حاصل می شود. همچنین اگر چرخشی درجا حول محور z گذرنده از نقطه ی تماس بخواند رخ دهد، آنگاه:

$$\begin{aligned} \Omega_0 \times I\Omega_0 &= 0 \\ \Omega_0 \times \Gamma_0 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

رابطه ی نخست نشان می دهد که Ω_0 بردار ویژه ی ماتریس اینرسی I محسوب می شود؛ این بدان معناست که چرخش پایا حول یک محور اصلی باید صورت گیرد. در ادامه، وضعیت تعادل نسبی حرکت حاصل از چرخش پایا حول یک محور اصلی در حالت قائم بررسی می شود. با این فرض که دوران کره حول یکی از محورهای اصلی در دستگاه جسم e_r یعنی $(\Omega_0 = \sigma e_r)$ ، منطبق بر بردار یکه ی فضایی قائم بر صفحه ی حرکت $E_r (= R\Gamma)$ رخ دهد، خطی سازی معادلات اصلی حول این پاسخ پایای تعادلی $(\Omega_0, \Gamma_0) = (\sigma e_r, e_r)$ برحسب متغیرهای انحراف از تعادل (Ω', Γ') :

$$\Omega' \triangleq \Omega - \sigma e_r, \quad \Gamma' \triangleq \Gamma - e_r \quad (4)$$

به معادلات مرتبه ی اول ۵ می انجامد:

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \Omega'_1 \\ \Omega'_2 \\ \Omega'_3 \\ \Gamma'_1 \\ \Gamma'_2 \\ \Gamma'_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \sigma / I'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 \sigma / I'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \sigma & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Omega'_1 \\ \Omega'_2 \\ \Omega'_3 \\ \Gamma'_1 \\ \Gamma'_2 \\ \Gamma'_3 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

که در آن پارامترها چنین تعریف می شود:

$$\begin{aligned} a_1 &= I_1 - I_2, \quad a_2 = I_2 - I_3 \\ I'_1 &= I_1 + mr^T, \quad I'_2 = I_2 + mr^T \end{aligned} \quad (6)$$

معادله ی مشخصه ی مجموعه معادلات ۵ به صورت رابطه ی ۷ درمی آید:

$$p(\lambda) = \lambda^6 + \sigma^2 \left(1 - \frac{a_1 a_2}{I'_1 I'_2}\right) \lambda^4 - \frac{a_1 a_2}{I'_1 I'_2} \lambda^2 \quad (7)$$

که دارای ریشه های:

$$\lambda^2 = 0, \quad \lambda^2 = -\sigma^2, \quad \lambda^2 = -\frac{a_1 a_2}{I'_1 I'_2} \sigma^2 \quad (8)$$

است. اگر $I_1 < I_2 < I_3$ آنگاه یک مقدار ویژه با مقدار حقیقی مثبت حاصل می شود که حاکی از ناپایداری حرکت چرخشی حول محور اصلی میانی جسم است. طی شبیه سازی انجام گرفته، ناپایداری حرکت فرفره ای بروز می کند که مطابق شکل های ۱ و ۲ قابل پی گیری است. مشاهده می شود که کره دچار یک چرخش وارون کننده ی وضعیت به اندازه ی 180° درجه می شود و سپس به حرکت فرفره ای خود ادامه می دهد. این حرکت با همین روال متناوباً در طی زمان تکرار می شود.

حالتی خاص از حرکت کره را در نظر می‌گیریم که با تکانه‌ی زاویه‌ی در راستای قائم آغاز می‌شود. در این حالت:

$$\begin{aligned} {}^2T = \langle \omega, \pi \rangle &= \langle R\Omega, \pi r e_r \rangle = \pi r \langle \Omega, \Gamma \rangle \Rightarrow \frac{d \langle \Omega, \Gamma \rangle}{dt} = 0 \\ &\Rightarrow \left\langle \frac{d\Omega}{dt}, \Gamma \right\rangle + \left\langle \Omega, \frac{d\Gamma}{dt} \right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \Omega, \frac{d\Gamma}{dt} \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

به معادله‌ی حرکت شماره ۲ سیستم کره غلتان که فاقد هرگونه نیروی محرکه است بازمی‌گردیم:

$$I\dot{\Omega} + \Omega \times I\Omega = -mr^T \Gamma \times (\dot{\Omega} \times \Gamma) \quad (11)$$

با بسط طرف راست معادله‌ی فوق، آن را مطابق معادله‌ی ۱۰ باز هم ساده می‌کنیم:

$$\Gamma \times (\dot{\Omega} \times \Gamma) = \dot{\Omega} - \langle \Gamma, \dot{\Omega} \rangle \Gamma = \dot{\Omega} \quad (12)$$

بنابراین معادله‌ی ۱۱ چنین قابل بازنویسی است:

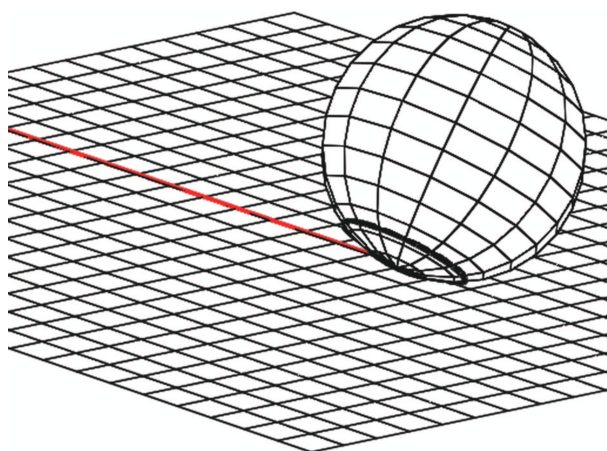
$$(I + mr^T Id)\dot{\Omega} + \Omega \times (I + mr^T Id)\Omega = 0 \quad (13)$$

که در آن Id ماتریس واحد است. با تعریف $\bar{I} \triangleq I + mr^T Id$ ، رابطه‌ی ۱۳ به صورت رابطه‌ی ۱۴ نوشته می‌شود:

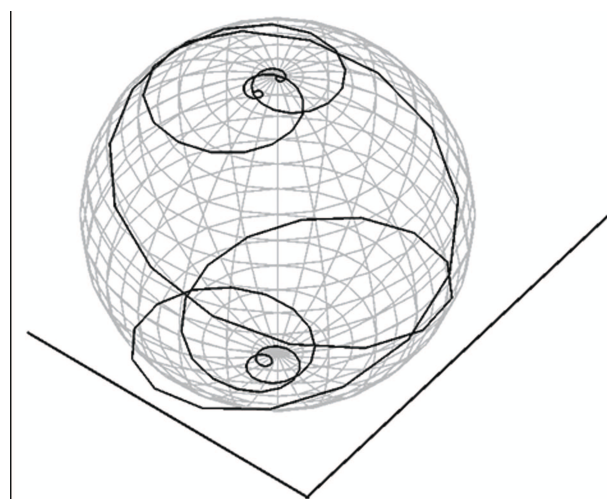
$$\bar{I}\dot{\Omega} + \Omega \times \bar{I}\Omega = 0 \quad (14)$$

معادله‌ی حاصل نشان می‌دهد که با اعمال تکانه‌ی زاویه‌ی اولیه در راستای قائم، حرکت پیش‌بینی شده کره غلتان شبیه جسمی است که آزادانه در فضا دوران می‌کند؛ در واقع مانند یک جسم صلب آزاد رفتار می‌کند که اینرسی آن به میزان $\bar{I} \triangleq I + mr^T Id$ افزایش یافته باشد. بنابراین محورها‌ی اصلی ماتریس اینرسی حفظ می‌شوند و دوران حول آنها مطابق شکل ۳ پایاست.

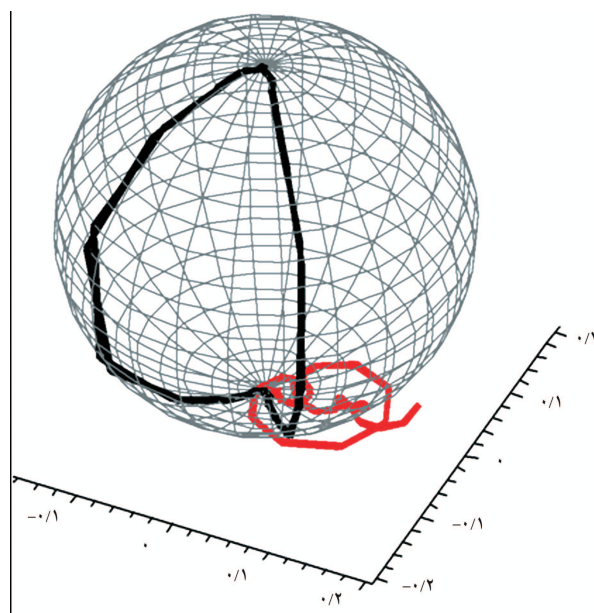
طبق قیاس مذکور، چرخش کره حول محورها‌ی اصلی میانی ناپایدار شناخته می‌شود. در واقع ناپایداری مذکور موجب می‌شود کره 180° درجه دوران کند تا در حالی که به چرخش خود ادامه می‌دهد وارونه شود (شکل ۴). این روند تکرار می‌شود تا کره به حالتی مشابه وضعیت اولیه‌اش بازگردد و مسیر نقطه‌ی تماس الگویی متناوب گیرد.



شکل ۳. حرکت پایای کره بالانس شده حول محور پایدار.



شکل ۱. مسیر فضایی نقطه‌ی اولیه‌ی تماس در حین حرکت فرغریبی حول محور میانی اینرسی.



شکل ۲. رد نقطه‌ی تماس روی پوسته و کف در حین حرکت فرغریبی حول محور میانی اینرسی.

۲.۲. پایداری حرکت غلتشی کره ناهمگن و متعادل

در این بخش، پایداری حرکت غلتشی یک کره ناهمگن بدون خروج از مرکز در شرایط مختلف راه‌اندازی مورد بررسی و تحلیل پایداری قرار می‌گیرد. در این حرکت کمیت برداری M_c (تکانه‌ی زاویه‌ی حول نقطه‌ی تماس) و اسکالار انرژی جنبشی T ثابت می‌ماند:

$$M_c = const = \pi$$

$$\langle \omega, \pi \rangle = const = {}^2T \quad (9)$$

که در آن:

$$\Delta = -[I_1 I_2 + m r^2 (I_1 \cos^2 \varphi + I_2 \sin^2 \varphi)] \quad (21)$$

معادله‌ی حرکت خطی‌سازی شده حول وضعیت دوران پایا به صورت متغیر با زمان حاصل آمد. ضرایب این معادله از نوع توابع متناوب است که بهره‌گیری از قضیه‌ی فلوکه را برای بررسی پایداری ممکن می‌سازد. کافی است ابتدا با حل عددی معادله‌ی 2° طی یک دوره تناوب به ازای تعدادی شرایط اولیه برابر با ستون‌های ماتریس واحد، ماتریس اساسی تشکیل شود. پایداری مجانبی یکنواخت سیستم از روی مقادیر ویژه‌ی این ماتریس قابل تعیین است، که به واسطه‌ی برقراری یک سری شرایط، این ویژگی به معادلات غیرخطی سرایت می‌کند. لازم به ذکر است که برخلاف سیستم‌های ثابت با زمان، ناپایداری مسئله از روی خطی‌سازی شده‌ی آن قابل دریافت نیست. اگر فرض شود که $I_1 = I_2$ ، معادلات دیگر متغیر با زمان نخواهند بود و مطابق رابطه‌ی ۲۲ ساده می‌شوند:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\varphi} &= -q \left(1 + \frac{b}{2 I_1 (I_1 + m r^2)} \right), \\ \frac{dq}{d\varphi} &= p \left(1 + \frac{c}{2 I_1 (I_1 + m r^2)} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

مقادیر ویژه در این حالت عبارت‌اند از:

$$\gamma = \pm \Omega_* i, \quad \Omega_*^2 = \frac{I_2 I_2 + m r^2}{I_1 I_1 + m r^2} \quad (23)$$

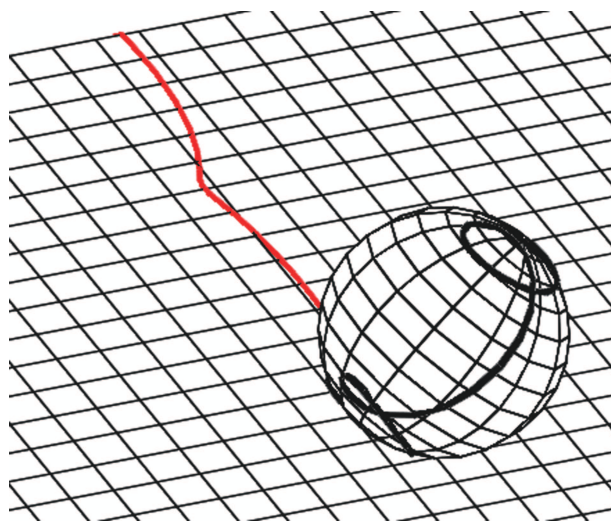
از آنجا که موهومی شدن مقادیر ویژه نتیجه‌ی برای سیستم غیرخطی اصلی به بار نمی‌آورد، در ادامه از قضیه‌ی انشعاب هاپف کمک گرفته می‌شود. این قضیه به بروز یا حذف یک چرخه‌ی حدی به واسطه‌ی تغییر ماهیت نقاط تعادل سیستم با تنظیم پارامترها اشاره می‌کند.

قضیه‌ی انشعاب هاپف: هرگاه خطی‌سازی سیستم $\dot{x} = f(x, \mu)$ به ازای مقدار پارامتر $\mu = \mu_0$ دارای نقطه‌ی تعادل مرکزی شود و شرط $\frac{d}{d\mu} \text{Re}(\lambda_\mu)|_{\mu=\mu_0} \neq 0$ برقرار باشد، آنگاه سیستم غیرخطی اصلی به ازای $\mu \neq \mu_0$ دچار سیکل حد می‌شود. برای بهره‌گیری از این قضیه، انحراف $I_2 = I_1(1 + 2\mu)$ در فرض تقارن محوری آورده می‌شود. از آنجا که با تقلیل این پارامتر به صفر نقطه‌ی تعادل سیستم خطی شده طبق رابطه‌ی قبل از نوع مرکزی می‌شود و با برآوردن سایر شرایط، قضیه‌ی هاپف نشان می‌دهد که این نقطه‌ی تعادلی مرکزی نظیر یک چرخه‌ی حدی برای سیستم غیرخطی است. به عبارت دیگر چنانچه سیستم از حالت تعادلی چرخشی پایای مذکور اندکی خارج شود به سمت چرخه‌ی حدی می‌رود که در عمل مصادف با لنگ زدن کره حین حرکت غلتشی پایا با فرکانس نوسان Ω_* است (رابطه‌ی ۲۳).

۳. مطالعه‌ی دوشاخگی پایداری کره متقارن محوری

دارای ژيرو

مدارهای تعادل نسبی از جمله مسیرهای دینامیکی جالب توجه در تحول یک سیستم دینامیکی‌اند. یک وضعیت تعادل نسبی عبارت است از حرکت‌های پایا که در آن مؤلفه‌های سرعت در دستگاه متصل به جسم ثابت می‌ماند. برای مثال، در حرکت دورانی یک ماهواره حرکت پایا حول هریک از محورهای اصلی آن یک وضعیت تعادل نسبی محسوب می‌شود. پایداری مسیرهای بسته (همچون وضعیت‌های تعادل



شکل ۴. حرکت چرخشی کره بالانس شده حول محور ناپایدار.

۳.۲. مطالعه اغتشاشی حرکت کره متوازن حول وضعیت پایا

در این بخش به چرخش پایای غلتشی کره پرداخته می‌شود و پایداری حرکت حول آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. با شروع مجدد از معادلات کلی حرکت کره، حالت چرخش پایا تنها حول یکی از محورهای اصلی رخ می‌دهد و چنین فرض می‌شود:

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \Omega_0 e_1 \\ \Gamma_0 &= \sin(\Omega_0 t) e_2 + \cos(\Omega_0 t) e_3 \end{aligned} \quad (15)$$

حال یک انحراف کوچک از حالت چرخش پایا را در نظر می‌گیریم:

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega', \quad \Gamma = \Gamma_0 + \Gamma' \quad (16)$$

با جایگزینی در معادلات اصلی و صرف نظر کردن از عبارات مرتبه دوم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} I(\Gamma_0) \dot{\Omega}' + \Omega_0 \times I \Omega' + \Omega' \times I \Omega_0 &= 0 \\ \dot{\Gamma}' + \Omega_0 \times \Gamma' + \Omega' \times \Gamma_0 &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

با تعریف $\varphi \triangleq \Omega_0 t$ بیان مؤلفه‌ی معادلات تبدیل می‌شود به:

$$\begin{aligned} (I_1 + m r^2) \dot{\Omega}'_1 &= 0 \Rightarrow \Omega'_1 = cte \\ (I_2 + m r^2 \cos^2 \varphi) \dot{\Omega}'_2 - \frac{m r^2}{2} \sin 2\varphi \dot{\Omega}'_3 + (I_1 - I_2) \Omega_0 \Omega'_2 &= 0 \\ (I_2 + m r^2 \sin^2 \varphi) \dot{\Omega}'_3 - \frac{m r^2}{2} \sin 2\varphi \dot{\Omega}'_2 + (I_2 - I_1) \Omega_0 \Omega'_3 &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

با تغییر متغیرهای وابسته و مستقل:

$$\begin{aligned} p &\triangleq \Omega'_2 \cos \varphi + \Omega'_3 \sin \varphi \\ q &\triangleq \Omega'_2 \sin \varphi - \Omega'_3 \cos \varphi \end{aligned} \quad (19)$$

معادلات حرکت چنین ساده می‌شوند:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\varphi} &= -q + [a \sin 2\varphi p + (b + a \cos 2\varphi) q] / 2\Delta \\ \frac{dq}{d\varphi} &= p - [(c + e \cos 2\varphi) p + e \sin 2\varphi q] / 2\Delta \end{aligned} \quad (20)$$

اینرسی محوری ژيرو هستند. همچنین:

$$X \triangleq \lambda_1(\lambda_r - J_{rot}) + mr^2 \left(\lambda_1 \left(1 - \Gamma_r^2(t) \right) + (\lambda_r - J_{rot}) \left(\Gamma_r^2(t) - \frac{e}{r} \right)^2 \right)$$

$$A(\Gamma) = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & A_{11}(\Gamma) & & 0 \\ & & J_r & \\ 0 & 0 & J_r & J_r \end{bmatrix}$$

$$A_{11}(\Gamma) \triangleq J_{lock} - m\hat{s}\hat{s}, \quad s \triangleq -e e_r + r \Gamma \quad (28)$$

$\hat{s}$ ماتریس پادمتقارن بردار s است.

ثابت انتگرالی حرکت اول و دوم تعمیم نتایج^[۳] به حالت یک کره مجهز به ژيرو است و ثابت سوم مربوط به ثابت بودن تکانه‌ی زاویه‌ی ژيرو در امتداد خودش و در غیاب گشتاور اعمالی است. ثابت چهارم هم مربوط به پایداری انرژی است. شرط قضیه برای دست‌یابی به مجموعه نقاط تعادل نسبی با معرفی ضرایب کمکی لاگرانژ ۱...۳ μ_i برقرار می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial \left\{ \begin{matrix} \Omega \\ \Omega_{rot} \end{matrix} \right\}} \{ E - \mu_1(\lambda_1 \Omega_1 \Gamma_1 + \lambda_2 \Omega_2 \Gamma_2 + (\lambda_3 \Omega_3 + J_{rot} \Omega_{rot}))$$

$$(\Gamma_r - \frac{e}{r}) - \mu_2 \left(\Omega_r \sqrt{X} + mr^2 J_{rot} (\Omega_r + \Omega_{rot}) \right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{X}} (\Gamma_r - \frac{e}{r}) d\Gamma_r - \mu_3 (\Omega_r + \Omega_{rot}) \} \quad (29)$$

که منجر به دستگاه معادلات ۳۰ می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial \left\{ \begin{matrix} \Omega \\ \Omega_{rot} \end{matrix} \right\}} : A(\Gamma) \left\{ \begin{matrix} \Omega \\ \Omega_{rot} \end{matrix} \right\} + B(\Gamma) \mu = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} : B^T(\Gamma) \left\{ \begin{matrix} \Omega \\ \Omega_{rot} \end{matrix} \right\} - c = 0 \quad (30)$$

$$B(\Gamma) = \begin{bmatrix} \lambda_1 \Gamma_1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 \Gamma_2 & 0 & 0 \\ \lambda_r (\Gamma_r - \frac{e}{r}) & \sqrt{X} mr^2 J_{rot} \int \frac{\Gamma_r - \frac{e}{r}}{\sqrt{X}} d\Gamma_r & 1 \\ J_r (\Gamma_r - \frac{e}{r}) & mr^2 J_r \int \frac{\Gamma_r - \frac{e}{r}}{\sqrt{X}} d\Gamma_r & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

با حل این دستگاه و انجام مقداری عملیات جبری، انرژی پتانسیل مؤثر تبدیل می‌شود به:

$$E = mge\Gamma_r + \frac{1}{\gamma} c^T (B^T A^{-1} B)^{-1} c \equiv E(\Gamma_r = \cos \theta) \quad (32)$$

طبق قضیه‌ی مطرح شده، شرط برقراری حرکت دورانی منظم و پایدار چنین بررسی می‌شود:

$$\left. \frac{dE}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_{eq}} = 0, \quad \left. \frac{d^2 E}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_{eq}} < 0 \text{ or } > 0 \quad (33)$$

نسبی، چرخه‌های حدی) در سیستم‌های دینامیکی دارای تقارن را می‌توان با تحلیل «انرژی پتانسیل مؤثر» سیستم مورد بررسی قرار داد. انرژی پتانسیل مؤثر بنا به تعریف عبارت است از: حداقل میزان کل انرژی مکانیکی سیستم نسبت به متغیرهای شبه سرعت با رعایت مقادیر ثابت انتگرال‌های اول به دست آمده از تقارن.

برای انجام این تحلیل قضایایی که در ادامه می‌آیند مورد استفاده قرار می‌گیرند.

ابتدا تعاریف مورد نیاز ارائه می‌شود:

سیستمی با معادله‌ی $\dot{x} = f(x)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که به تعداد $k+1$ انتگرال‌های اول مستقل همچون $U_1(x) = c_1, \dots, U_k(x) = c_k$ ، $U_{k+1}(x) = c_{k+1}$ ، $k < n-1$ از این معادله در دست باشد. در این صورت، انتگرال اول $U_0(x)$ در مجموعه نقاط $X_0 \subset X$ به‌ازای ثابت ماندن مقادیر سایر انتگرال‌های اول $U(x) = c$ ایستا محسوب می‌شود، اگر X_0 بزرگ‌ترین زیرمجموعه‌ی یک پارچه از مجموعه‌ی $\{x \in X : \delta U_0|_{U=c} = 0, \delta^2 U_0|_{U=c} \neq 0\}$ باشد. به‌دنبال این فرض، قضایایی مطرح می‌شوند:

قضیه‌ی ۱: هرگاه یکی از انتگرال‌های اول سیستم روی مجموعه‌ی X_0 مقداری ایستا به خود اختصاص دهد آنگاه X_0 یک مسیر بسته به حساب می‌آید.^[۷]

قضیه‌ی ۲: هرگاه یکی از انتگرال‌های اول سیستم $U_0(x)$ در مجموعه نقاط $X_0(c_0)$ مقدار کمینه (بیشینه) محلی به‌ازای مقادیر ثابت سایر انتگرال‌های اول $U(x) = c$ را بگیرد آنگاه $X_0(c_0)$ یک مسیر بسته‌ی پایدار (ناپایدار) خواهد بود.^[۷] با بررسی معادلات کره غلطان متقارن محوری مجهز به تک ژيرو دارای سرعت زاویه‌ی Ω_{rot} و نصب شده در امتداد محور تقارن (شکل ۵)، چهار انتگرال اول قابل شناسایی‌اند:

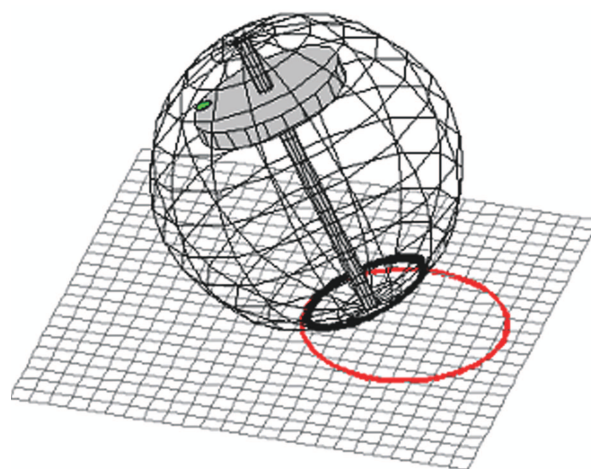
$$\lambda_1 \Omega_1 \Gamma_1 + \lambda_2 \Omega_2 \Gamma_2 + (\lambda_3 \Omega_3 + J_{rot} \Omega_{rot}) (\Gamma_r - \frac{e}{r}) = c_1 \quad (24)$$

$$\Omega_r \sqrt{X} + mr^2 J_{rot} (\Omega_r + \Omega_{rot}) \int \frac{1}{\sqrt{X}} (\Gamma_r - \frac{e}{r}) d\Gamma_r = c_2 \quad (25)$$

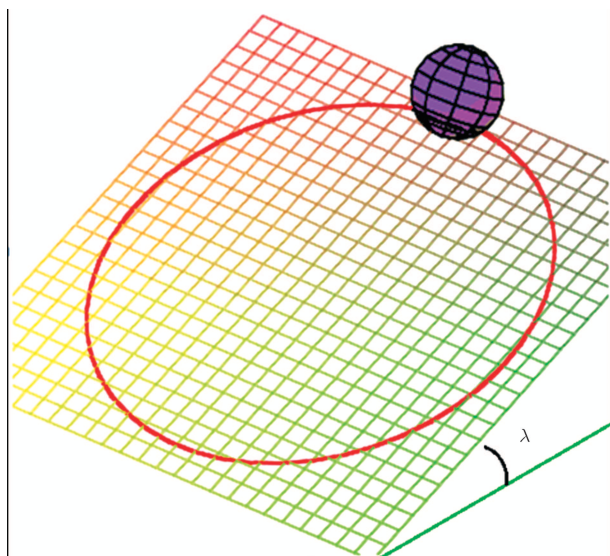
$$\Omega_r + \Omega_{rot} = c_3 \quad (26)$$

$$E = \frac{1}{\gamma} \left[\Omega^T \quad \Omega_{rot} \right] A(\Gamma) \begin{bmatrix} \Omega \\ \Omega_{rot} \end{bmatrix} - mge\Gamma_r.E_r \quad (27)$$

که در آن‌ها λ_i ، $i = 1...3$ مقادیر ممان‌های اینرسی مجموعه‌ی قفل شده و J_{rot}



شکل ۵. کره غلطان متقارن با خروج از مرکزیت در یک وضعیت تعادل نسبی.



شکل ۷. کره غلتان در حال طی دایره روی صفحه‌ی شیب‌دار.

به زاویه‌ی λ (شکل ۷) مطابق رابطه‌ی ۳۶ استخراج می‌شود:

$$\frac{d\vec{M}_c}{dt} = -(mgr \sin \lambda) \vec{J}$$

$$M_c = J_{lock} \Omega + mr^T \Gamma \times (\Omega \times \Gamma) + J_{rot} \dot{\varphi} \quad (36)$$

در ادامه مشاهده خواهد شد که با اعمال قانون کنترلی سینماتیکی $\dot{\varphi} = -K_c \Omega$ ، ممان‌های اینرسی سیستم به‌طور دینامیک دستخوش تغییر شده و امکان پیدارسازی حرکت فراهم می‌شود. هرگاه حرکت از شرایط اولیه‌ی سکون شروع شده باشد، ثابت‌های انتگرال‌گیری برابر صفرند و در نتیجه:

$$M_c = -(mgr \sin \lambda) t \gamma \quad (37)$$

که در آن γ بردار یک‌جهت افقی بیان شده در دستگاه جسم است. از معادله‌ی ۳۷ به معادله‌ی ۸ می‌رسیم:

$$J_{lock} \Omega + mr^T \Gamma \times (\Omega \times \Gamma) + J_{rot} \dot{\varphi} + (mgr \sin \lambda) t \gamma = 0 \quad (38)$$

با تنظیم روتورها مطابق قانون $\dot{\varphi} = -(mgr \sin \lambda) t \gamma + \dot{\varphi}$ می‌توان انتظار خنثی‌کردن اثر جاذبه را داشت و همچنان قدرت مانورپذیری روی سطح شیب‌دار را با $\dot{\varphi}$ همانند قبل حفظ کرد. با قرار دادن پس‌خوراند تناسبی $\dot{\varphi} = -K_c \Omega$:

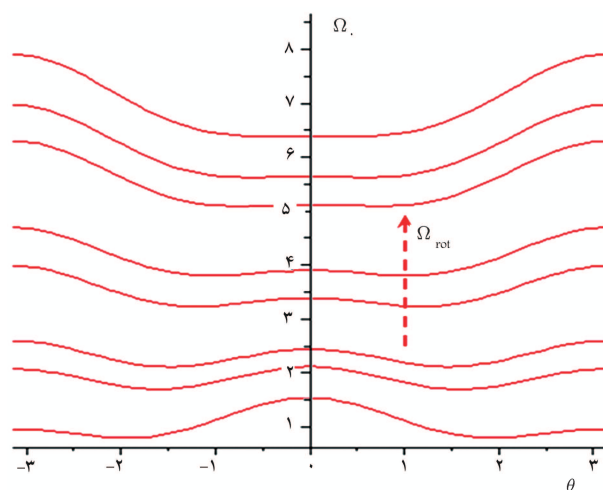
$$(J_{lock} - J_{rot} K_c) \Omega + mr^T \Gamma \times (\Omega \times \Gamma) = 0 \quad (39)$$

با انتخاب مناسب ضریب پس‌خوراند K_c ماتریس اینرسی ظاهری سیستم $(J_{lock} - J_{rot} K_c)$ را می‌توان چنان طراحی کرد که دوران حول محوری با ممان اینرسی کمینه یا بیشینه بازسازی شود، و نتیجه‌ی آن تضمین حرکتی پایاست. با حل معادله‌ی ۴۰ برای K_c :

$$J_{lock} - J_{rot} K_c = \text{diag}(I_1, I_2, I_3) \quad (40)$$

پارامترهای دلخواه اینرسی ظاهری لحاظ می‌شود:

$$I_3 < \min(I_1, I_2) \text{ or } I_3 > \max(I_1, I_2) \quad (41)$$



شکل ۶. نمودار سطوح انرژی برحسب زاویه‌ی تمایل به‌ازای سرعت زاویه‌ی ژيرو مختلف Ω_{rot} .

حال حرکت پایداری که در حالت کلی به‌صورت وضعیت تعادل نسبی $\vec{\Omega} = \Omega_c \vec{k} + \omega_c \vec{K}$ رخ می‌دهد (شکل ۵)، بررسی می‌شود:

$$\Omega_1 = \omega_c \Gamma_1$$

$$\Omega_2 = \omega_c \Gamma_2$$

$$\Omega_3 = \Omega_c + \omega_c \cos \theta \quad (34)$$

با جایگزینی این حالت پایا در معادلات ۲۴ تا ۲۷، دستگاه معادلات ۳۵ برای ثابت‌های انتگرالی حاصل می‌شود:

$$c_1 = \lambda_1 \omega_c \sin^T \theta + [\lambda_2 (\omega_c \cos \theta + \Omega_c) + J_{rot} \Omega_{rot}] (\cos \theta - \frac{e}{r})$$

$$c_2 = (\omega_c \cos \theta + \Omega_c) \sqrt{X} + mr^T J_{rot} c_T \int \frac{(\cos \theta - \frac{e}{r})}{\sqrt{X}} d(\cos \theta)$$

$$c_3 = \omega_c \cos \theta + \Omega_c + \Omega_{rot} \quad (35)$$

که در مورد کمیت‌های $(\omega_c, \Omega_c, \Omega_{rot})$ خطی محسوب و حل می‌شود. در این مرحله، عبارت انرژی مؤثر با جایگزینی کمیت‌های سینماتیکی برحسب ثابت‌های حرکت حاصل از دستگاه معادلات ۳۵، تابعی به شکل $E = E(\theta; c_1, c_2, c_3)$ تابعی به شکل ۳۵، نتیجه می‌دهد. مقادیر کمینه‌ی این تابع برحسب زاویه‌ی تمایل θ وضعیت‌های تعادل نسبی پایدار را تعیین می‌کند. شکل ۶ نشان می‌دهد که به‌ازای سرعت زاویه‌ی ژيرو به‌اندازه‌ی کافی زیاد وضعیت دوران درجا (فرفره‌یی) را می‌توان وضعیتی پایدار محسوب کرد، اما با کاهش سرعت زاویه‌ی ژيرو، کره به زاویه‌ی معین مایل شده و مداری را به غلتش طی خواهد کرد (شکل ۵).

۴. پیدارسازی ژيروسکوپیک حرکت کره روی سطح

شیب‌دار

چنان که نشان داده شد، اگر چرخش حول محور میانی باشد، حرکت دورانی کره ناپایدار خواهد بود. برای پیدارسازی این حرکت از مجموعه چرخ‌های ژيرو داخلی بهره گرفته می‌شود. معادلات حرکت سیستم مجهز به ژيرو روی سطح شیب‌دار^[۸]

در این صورت اختلاف انحنا دو مسیر صفر خواهد شد. بالاخره ممان ژيروسکوپی لازم برای ایجاد حرکت مطابق معادله ی ۴۶ به دست می آید:

$$J_{rot}\dot{\varphi} = -\dot{s} \left(J_{lock} + mr^* Id \right) \left(\Gamma'(s) \times \Gamma(s) \right) - \dot{s} (\kappa_p - \kappa_b) J_{lock} \Gamma(s) \quad (46)$$

با این فرض که کره به شعاع r_0 مسیری دایره ای با شعاع p را روی یک سطح شیب دار طی کند و هم زمان منحنی نقش شده بر سطح کره، دایره ای به شعاع $r_0 \leq r$ شود، معادله ی منحنی پارامتریزه روی کره برابر است با:

$$\Gamma(s) = \left(r \sin \frac{s}{r}, r \cos \frac{s}{r}, \sqrt{R^2 - r^2} \right) \quad (47)$$

انحنای ژئودزیک مسیر برابر است با $\kappa_b = \sqrt{r_0^2 - r^2}/r$ و انحنا ی مسیر نقطه ی تماس روی زمین مقداری ثابت و برابر $\kappa_p = 1/p$ است. نتیجه ی شبیه سازی در شکل ۷ مشاهده می شود.

۵. نتیجه گیری

با تمرکز بر رفتار عمومی سیستم های غلتشی دریافت شد که متناظر با تقارن های موجود در معادلات حاکم بر مسئله، ثابت های حرکتی برقرارند. از آنجا که نیروی قیدی کاری انجام نمی دهد، برای حالت کلی توزیع جرم یک کره غلتان پایداری انرژی برقرار است که در صورت وجود تقارن های دیگر همچون تقارن محوری در توزیع جرم، دو ثابت انتگرالی دیگر تشکیل خواهند شد. پایداری مسیرهای بسته (همچون وضعیت های تعادل نسبی، چرخه های حدی) در سیستم های دینامیکی دارای تقارن را می توان با تحلیل انرژی پتانسیل مؤثر سیستم مورد بررسی قرار داد. در قسمت اول این تحقیق، ربات کروی از منظر پایداری حرکت غلتشی مورد بررسی قرار گرفت. شباهت دینامیکی سیستم با نمونه ی معلق فضایی امکان جالبی برای تحلیل پایداری با بهره از نظریه های جافتاده در مورد پایداری اجسام آزاد فراهم می آورد. طبق قیاس مذکور، چرخش کره حول محور اصلی میانی اینرسی ناپایدار شناخته می شود که کره را دچار وارونگی حین چرخش می کند. این روند متناوباً تکرار می شود. مطالعه ی دوشاخگی حرکت کره غلتان مجهز به چرخ ژئودزیک داخلی تغییری در ماهیت نقاط تعادلی برحسب سرعت زاویه ای را نشان می دهد که می تواند به پایداری مجموعه کمک کند. در آخر، امکان طرح ریزی حرکت ربات در فضای مفاصل، و نیز عملکرد آن روی یک سطح شیب دار بررسی شد.

بدین ترتیب مطابق این قانون پایداری کننده، ژئوهای داخلی به نحوی به چرخش درمی آیند که محور دوران به یکی از محورها ی کمینه یا بیشینه ی اینرسی جسم بدل گردد و حرکت پایدار ممکن شود.

۱.۴. طرح ریزی حرکت در فضای مفاصل یا کنترل مدار باز

در این بخش حرکت در فضای مفاصل برای رساندن کره غلتان از وضعیت اولیه ی سکون به موقعیت مکانی و زاویه ای مورد نظر، ظرف زمان معین طراحی می شود. چنان که بیان شد، سیستم با تعداد دست کم ۲ روتور کنترل پذیر است. [۲۹]

ابتدا باید به این امر توجه داشت که صرف نظر از حرکت مورد نظر، طول مسیرهای طی شده توسط نقطه ی تماس بر سطح کره و نقطه ی تماس بر سطح زمین یکسان است. بنابراین مسئله ی تعقیب مسیر را می توان به انطباق دو منحنی با طول یکسان واقع بر سطوح ایزومتریک سطح کره و سطح زمین خلاصه کرد. مسیر هموار نقطه ی تماس در صفحه با $r^*(s)$ برحسب طول s پارامتریزه شده و مسیر متناظری روی سطح کره به شعاع r_0 توسط $r(s) = r_0 \Gamma(s)$ معین می شود. طبق آنچه از پایداری نکانه ی زاویه ای سیستم حول نقطه ی تماس حاصل شد:

$$-J_{rot}\dot{\varphi} = \left(J_{lock} + mr^* Id \right) \Omega - mr^* (\Omega, \Gamma) \Gamma \quad (42)$$

$\Omega \Gamma = \langle \Omega, \Gamma \rangle$ مؤلفه ی قائم سرعت زاویه ای است. با ضرب خارجی معادله ی $\dot{\Gamma} = \Gamma \times \Omega$ در Γ ، بردار سرعت زاویه ای استخراج می شود:

$$\Omega = \dot{\Gamma} \times \Gamma + \Omega \Gamma \Gamma \quad (43)$$

که با جایگذاری در رابطه ی ۴۲ خواهیم داشت:

$$J_{rot}\dot{\varphi} = - \left(J_{lock} + mr^* Id \right) \left(\dot{\Gamma} \times \Gamma \right) - \Omega \Gamma J_{lock} \Gamma \quad (44)$$

بدین ترتیب، عبارت ها برحسب $\Gamma(s)$ بیان شده اند. برای یافتن $\Omega \Gamma$ می توان از اختلاف انحنا ی دو منحنی مسیر نقطه ی تماس در نقاط متناظر روی دو سطوح استفاده کرد: [۹]

$$\kappa_p = \kappa_b + \frac{1}{s} \Omega \Gamma \quad (45)$$

انحنای منحنی صفحه ای و انحنا ی ژئودزیک منحنی واقع بر سطح کره است. هرگاه سطح تماس نقطه ای نباشد ممکن است آزادی چرخش در جای کره سلب شود که

منابع (References)

1. Karimpour, H., Keshmiri, M. and Mahzoon, M. "Stabilization of an autonomous rolling sphere navigating in a labyrinth arena: A geometric mechanics perspective", *Systems & Control Letters*, **61**(4), pp. 495-505 (2012).
2. Lynch, P. and Bustamante, M. "Precession and recession of the rock'n'roller", *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **42**(42), pp. 1-25 (2009).
3. Borisov, A.V. and Mamaev, I.S. "Rolling motion of a rigid body on a plane and a sphere", *Regular and Chaotic Dynamics*, **7**(2), pp. 177-200 (2007).
4. Borisov, A.V., Kilin, A.A. and Mamaev, I.S. "How to control Chaplygin's sphere using rotors", *Regular and Chaotic Dynamics*, **17**(3-4), pp. 258-272 (2012).
5. Mukherjee, R., Minor, M.A. and Pukrushpan, J.T., "Motion planning for a spherical mobile robot: revisiting the classical ball-plate problem", *Journal of Dynamic Sys-*

- tems, Measurement, and Control*, **124**(4), pp. 502-511 (2002).
6. Karimpour, H., Mahzoon, M. and Keshmiri, M. "Exploring the analogy for adaptive attitude control of a ground-based satellite system", *Nonlinear Dynamics*, **9**(4), pp. 2221-2235 (2012).
7. Karapetyan, A.V. "On construction of the effective potential in singular cases", *Regular and Chaotic Dynamics*, **5**(2), pp. 219-224 (2000).
8. Borisov, A.V. and Mamaev, I.S. "Motion of chaplygin ball on an inclined plane", *Doklady Akademii Nauk*, **406**(5), pp. 620-623 (2006).
9. Koiller, J. and Ehlers, K. "Rubber rolling over a sphere", *Regular and Chaotic Dynamics*, **12**(2), pp. 127-152 (2007).