



## مقالات پژوهشی:

- شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه واحد کنترل سوخت موتور توربین گاز هوایی با روش پیش‌بینی پرمینای مدل مصطفی نصیری، مرتضی منتظری و مرصیه رضازاده
- بررسی محاسباتی رفتار مکانیکی استنت آلایاز هوشمند تحت بارگذاری محوری برای کاربرد درغروق محیطی فردین نعمت‌زاده، سید خطیب‌الاسلام مدرنژاد و مجید سید صالحی
- تحلیل المان محدود غیرخطی رشد پوست با استفاده از مدل غشای هاپیرالاستیک ناصر فیروزی، فرزاد دادگر و سید رضا فلاحتگر
- حل تحلیلی معادله‌ی انتقال جرم در شبکه‌ی رودخانه محمدجواد فردادی شیل‌سر، مهدی مظفری و جمال محمد ولی سامانی
- کنترل همزمان جهت‌گیری و ارتعاشات خمشی - پیچشی ماهواره‌ی دارای پل‌های چندقسمتی به کمک کنترل - مشاهده گرمیزی میثقی بر معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
- پدیده‌ی عطایی، حسین نجات پیشکاری و حسن سالاربه
- پیش‌بینی روند زوال و عمر مفید باقیمانده‌ی پاناقان غلشی با کمک شبکه‌ی عصبی بازگشتی حافظه‌ی طولانی کوتاه‌مدت مهدی بهزاد، سید علی حسین‌بی، حسام‌الدین ارغند و افشین بنارزاده
- کنترل فعال جریان روی پره‌ی توربین باد محور عمودی داریوس با استفاده از عملگر پلازما مجید زارع چلوئی و عباس ابراهیمی
- مطالعه‌ی عددی پارامترهای تأثیرگذار بر عملکرد حرارتی و دینامیکی کوره‌ی حرارتی پرس گرم سعید شعاعی، مصطفی باکویی، محمدمتین بهزادی و مجتبی تقی‌پور

## یادداشت فنی:

- مطالعه‌ی عددی تأثیر افزایش شدت توربولانسی و تغییر زاویه‌ی پاشش سوخت بر عملکرد و آلاینده‌ی موتور دیزل دریایی کاترپیلار امیر حمزه فرج‌اللهی و رضا فیروزی
- توسعه‌ی مدل برای فرایند شروع و میرایی موتور گرما صوتی موج ایستا علیرضا برادری، فتح‌اله امی، محسن بهرامی و زهیر صوبخی

## ARTICLES:

- Hardware-in-the-Loop Simulation of a Gas Turbine Engine Fuel Control Unit Using Model-Based Predictor M. Nasiri, M. Montazeri and M. Rezaeizadeh
- Numerical Evaluation of the Mechanical Performance of Intelligent Alloy Stents Under Axial Loading for Application in Peripheral Artery F. Nematzadeh, S.K. Sadmozaad and M. Seyedalehi
- Nonlinear Finite Element Analysis of Skin Growth Using Hyperelastic Membrane Model N. Firoozi, F. Dadgar-Rad and S.R. Falehtaghi
- Analytical Solution of Mass Transport Equation in River Network M.J. Fardadi Shilar, M. Mazaheri and J. Mohammad Veli Samani
- Simultaneous Attitude and Bending-Torsional-Vibration Control of a Satellite with Multi-Section Flexible Panels Using PDE Based Boundary Control-Observer M.M. Ataei, H. Nejati Pishkenari and H. Salarish
- Prognostics of Rolling Bearings Using LSTM Neural Network for Predicting the Trend of Degradation Signal M. Behzad, S.A. Hosseini, H. Addin Arghand and A. Benazadeh
- Active Flow Control in Darrieus Wind Turbine Blade Using Plasma Actuator M. Zare Chavoshi and A. Ebrahimi
- Numerical Investigation of Affecting Parameters on the Thermal and Dynamic Performance of a Hot Isostatic Pressing Furnace S. Shoshee, M. Bakouei, M.M. Behzadi and M. Taghipoor

## RESEARCH NOTES:

- Numerical Investigation on the Effect of Increasing Turbulence Intensity and Changing the Injection Angle on the Performance and Emission of Caterpillar Marine Diesel Engine A. Farajollahi and R. Firoozi
- Model Development for Startup and Damping of a Standing Wave Thermo-Acoustic Engine A. Moradi, F. Omri, M. Bahrami and Z. Saboohi

صاحب امتیاز: دانشگاه صنعتی شریف

مدیر مسئول: دکتر علی اکبر صالحی

سرمدیر: دکتر محمدتقی احمدیان

سرمدیر هیأت تحریریه: دکتر سعید سهراب پور

مدیر داخلی: پوران خیرمندی

مدیر اجرایی: پریسا مروتی

مسئول روابط عمومی: محمدرضا یوسف خان

ویرایش: سیما تویسرکانی

حروفچینی: ساناز نادری، راضیه قربانی و مریم علی کرمی

صفحه‌آرایی: غزل احمدی میرقائد

امور اجرایی: شیما آل اسداله، مریم پورابراهیمی باوفا

طراح لوگو: زنده یاد مرتضی ممیز

طرح روی جلد و ساختار صفحه‌آرایی: مصطفی اسداللهی

نظارت فنی و چاپ: پیمان فرگاهی

نقل مندرجات این مجله با ذکر مأخذ آزاد است.

مجله در ویرایش مطالب آزاد است.

نشانی: تهران / صندوق پستی ۸۶۳۹-۱۱۱۵۵

دفتر مجله‌ی علمی و پژوهشی شریف

تلفن: ۶۶۰۰۵۴۱۹-۶۶۱۶۴۰۹۳

پست تصویری: ۶۶۰۱۲۹۸۳

نشانی سایت: <http://journal.sharif.ir>

سایت اسپرینگر: [www.globalsciencejournals.com](http://www.globalsciencejournals.com)

پست الکترونیکی: [pajouhesh@sharif.edu](mailto:pajouhesh@sharif.edu)

چاپ: کارگاه گرافیک فرگاهی، <http://www.fargahi.com>

از انتشارات حوزه معاونت پژوهش و فناوری دانشگاه صنعتی شریف

دکتر محمدرضا اسلامی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دکتر محمدتقی احمدیان

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

دکتر محسن اصغری

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

دکتر محمدرضا اعلم

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه برکلی، آمریکا

دکتر محمد اقتصاد

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز

دکتر آریا السستی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

دکتر عبدالرضا اوحدی همدانی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دکتر احمد براری

دانشکده مهندسی مکانیک، انستیتو آنتاریو

دکتر مهرداد تقی زاده منظری

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

دکتر حسن سالاریه

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

دکتر محمدحسن سعیدی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

دکتر سعید سهراب پور

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

دکتر امیررضا شاهانی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی

دکتر محمد شرعیات

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی

دکتر محمودمهرداد شکرپه

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

دکتر مجید صفاراول

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دکتر حسن ظهور

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

دکتر فمیدا فلاح رجب‌زاده

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

دکتر هادی محمدی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه بیریتیش کلمبیا، کانادا

دکتر علی مقداری

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

دکتر سیدمحمدباقر ملائک

دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف

دکتر حسین نجات پیشکناری

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

دکتر محمد یعقوبی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز

دکتر داود یونسیان

دانشکده مهندسی راه‌آهن، دانشگاه علم و صنعت ایران

## هیأت مشاوران

- دکتر ابراهیم افشاری  
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک - دانشگاه صنعتی اصفهان
- دکتر محمدتقی احمدیان  
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک - دانشگاه صنعتی شریف
- دکتر عباس روحانی بسطامی  
دانشکده‌ی مکانیک و انرژی - دانشگاه شهید بهشتی
- دکتر اسلام رنجبر  
دانشکده‌ی مهندسی مواد - دانشگاه صنعتی امیرکبیر
- دکتر میثم سعیدی  
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک - دانشگاه رازی کرمانشاه
- دکتر حسن ساقی  
دانشکده‌ی مهندسی عمران - دانشگاه حکیم سبزواری
- دکتر فمیدا فلاح رجب‌زاده  
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک - دانشگاه صنعتی شریف
- دکتر سعید کریمیان علی‌آبادی  
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک - دانشگاه تربیت مدرس
- دکتر محمدجواد مغربی  
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک - دانشگاه فردوسی مشهد

- دکتر حامد مرادی  
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک - دانشگاه صنعتی شریف
- دکتر سید محمدباقر ملائک  
دانشکده‌ی مهندسی هوافضا - دانشگاه صنعتی شریف
- دکتر آرش میرعبداله لواسانی  
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک - آزاد اسلامی واحد تهران مرکز
- دکتر مهدی مجاهدی  
دانشکده‌ی فنی و مهندسی گلبایگان - دانشگاه صنعتی اصفهان
- دکتر علیرضا نوین‌زاده  
دانشکده‌ی مهندسی هوافضا - دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
- دکتر نگار نباتیان  
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک و انرژی - دانشگاه شهید بهشتی
- دکتر روح‌اله نوری  
دانشکده‌ی مهندسی عمران - دانشگاه تهران
- دکتر محمدرضا واعظی  
پژوهشگاه مواد و انرژی
- دکتر بهمن وحیدی  
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک - دانشگاه تهران

## مقالات پژوهشی:

- ۳ شبیه سازی سخت افزار در حلقه واحد کنترل سوخت موتور توربین گاز هوایی با روش پیش بینی بر مبنای مدل مصطفی نصیری، مرتضی منتظری و مرضیه رضا زاده
- ۱۳ بررسی محاسباتی رفتار مکانیکی استمنت آلیاژ هوشمند تحت بارگذاری محوری برای کاربرد در عروق محیطی فردین نعمت زاده، سید خطیب الاسلام صدرنژاد و مجید سید صالحی
- ۲۳ تحلیل المان محدود غیرخطی رشد پوست با استفاده از مدل غشای هایپرلاستیک ناصر فیروزی، فرزام دادگر و سید رضا فلاحتگر
- ۳۵ حل تحلیلی معادله انتقال جرم در شبکه ی رودخانه محمدجواد فردادی شیل سر، مهدی مظاهری و جمال محمد ولی سامانی
- ۵۱ کنترل همزمان جهت گیری و ارتعاشات خمشی - پیچشی ماهواره ی دارای پانل های چندقسمتی به کمک کنترل - مشاهده گر مرزی مبتنی بر معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی محمد مهدی عطایی، حسین نجات پیشکناری و حسن سالاریه
- ۶۳ پیش بینی روند زوال و عمر مفید باقیمانده ی یاتاقان غلتشی با کمک شبکه ی عصبی بازگشتی حافظه ی طولانی کوتاه مدت مهدی بهزاد، سید علی حسین لی، حسام الدین ارغند و افشین بنازاده
- ۷۳ کنترل فعال جریان روی پره ی توربین باد محور عمودی داریوس با استفاده از عملگر پلازما مجید زارع چاوشی و عباس ابراهیمی
- ۸۵ مطالعه ی عددی پارامترهای تأثیرگذار بر عملکرد حرارتی و دینامیکی کوره ی حرارتی پرس گرم سعید شعاعی، مصطفی باکویی، محمدمتین بهزادی و مجتبی تقی پور

## یادداشت فنی:

- ۹۹ مطالعه ی عددی تأثیر افزایش شدت توربولانسی و تغییر زاویه ی پاشش سوخت بر عملکرد و آلاینده گی موتور دیزل دریایی کاتر پیلار امیر حمزه فرج الهی و رضا فیروزی
- ۱۱۳ توسعه ی مدل برای فرایند شروع و میرایی موتور گرماصوتی موج ایستا علیرضا مرادی، فتح اله امی، محسن بهرامی و زهیر صبوخی

## ضمائم:

- ۱۳۳ چکیده مقالات به انگلیسی



# شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه واحد کنترل سوخت موتور توربین گاز هوایی با روش پیش‌بینی بر مبنای مدل

مصطفی نصیری\* (استادیار)

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی گلباگان، دانشگاه صنعتی اصفهان

مرتضی منتظری (استاد)

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

مرضیه رضازاده (استادیار)

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی گلباگان، دانشگاه صنعتی اصفهان

مهندسی مکانیک شریف (بهار ۱۴۰۱)  
دوره ۳-۲، شماره ۱، ص. ۱۲-۳، (پژوهشی)

شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه واحد کنترل سوخت یک موتور توربین گاز هوایی ارائه شده است. واحد کنترل سوخت، شامل یک شیر کنترل تناسبی است که در آن سروموتور و بادامک باعث حرکت اسپول شیر کنترل جریان می‌شود. در این شبیه‌سازی، واحد کنترل سوخت واقعی در کنار شبیه‌سازی زمان - واقعی موتور توربین گاز هوایی، آزمایش و ارزیابی می‌شود. دبی خروجی از واحد کنترل سوخت توسط یک دبی‌سنج اندازه‌گیری و به شبیه‌ساز ارسال می‌شود. برای اتصال واحد الکترونیکی به رایانه شبیه‌ساز، نیاز به عملگرها و حسگرهای اضافی به عنوان سیستم انتقال است که در موتور واقعی وجود ندارد. دینامیک سیستم انتقال می‌تواند باعث کاهش دقت شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه شود. برای جبران اثر دینامیکی ناخواسته ناشی از سیستم انتقال، از روش پیش‌بینی بر مبنای مدل استفاده شده است. مقایسه‌ی نتایج شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه به صورت تجربی بیان‌گر توانایی روش پیش‌بینی بر مبنای مدل در کاهش خطای شبیه‌سازی به کمتر از ۵٪ است.

**واژگان کلیدی:** سخت‌افزار در حلقه، واحد کنترل سوخت، موتور توربین گاز هوایی، پیش‌بینی بر مبنای مدل.

## ۱. مقدمه

شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه بیان‌گر آزمایش یک قسمت فیزیکی از یک سیستم کنترل حلقه بسته در کنار شبیه‌سازی عددی بقیه اجزای سیستم با در نظر گرفتن اثر متقابل بین قسمت فیزیکی و قسمت عددی به صورت زمان - واقعی است. شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه می‌تواند به آزمایش اجزای فیزیکی یک سیستم در شرایط نزدیک به شرایط واقعی بپردازد. در مراحل طراحی یک سیستم کنترل، مرحله‌ی شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه بین مرحله‌ی شبیه‌سازی رایانه‌ی و مرحله‌ی پیاده‌سازی سیستم کنترل قرار می‌گیرد. این شبیه‌سازی دارای مزیت‌هایی چون قابلیت اعتماد بالا، تکرارپذیری، کاهش هزینه، تولید سریع، ایمن و غیرمخرب است. به صورت متعارف عبارت «سخت‌افزار» برای ماژول‌های الکترونیکی قابل برنامه‌ریزی استفاده می‌شود و شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه در ابتدا برای آزمایش واحدهای کنترل الکترونیکی (ECU) به کار رفته است و در صنایع خودرو و صنایع

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۴۰۰/۲/۱۲، اصلاحیه ۱۴۰۰/۸/۲۲، پذیرش ۱۴۰۰/۹/۱۴.

DOI:10.24200/J40.2021.54521.1532

هوایی به عنوان یک مرحله‌ی اصلی از مراحل طراحی سیستم کنترل در نظر گرفته می‌شود.

موفقیت در ساخت و تولید موتور توربین گاز هوایی، علاوه بر وابستگی به طراحی مکانیکی سیستم، به عملکرد سیستم کنترل موتور نیز بسیار وابسته است. واحد کنترل الکترونیکی موتور در واقع مغز موتور توربین گاز است که باعث کنترل دقیق سوخت و تأمین امنیت موتور می‌شود. این واحد یک سخت‌افزار الکترونیکی است که الگوریتم کنترلی بر روی آن پیاده‌سازی می‌شود؛ روند طراحی و آزمایش واحد کنترل الکترونیکی با شبیه‌سازی مدل در حلقه (MIL)<sup>۱</sup> شروع می‌شود که در این مرحله، موتور و سیستم کنترل هر دو شبیه‌سازی شده و الگوریتم کنترلی طراحی می‌شود. در مرحله‌ی دوم، شبیه‌سازی نرم‌افزار در حلقه (SIL)<sup>۲</sup> انجام می‌گیرد که در این مرحله الگوریتم کنترلی به یک برنامه قابل پیاده‌سازی تبدیل شده و این برنامه درون شبیه‌سازی بقیه اجزای سیستم به صورت زمان - واقعی اجرا می‌شود. در مرحله‌ی بعد، سیستم کنترل طراحی شده بر روی سخت‌افزار مربوطه پیاده‌سازی شده و واحد کنترل الکترونیکی (ECU) برنامه‌ریزی می‌شود. در نهایت نوبت به آزمون آزمایشگاهی واحد کنترل الکترونیکی

m.nasiri@iut.ac.ir  
montazeri@iust.ac.ir  
m.rezazade@iut.ac.ir

می‌رسد که برای این منظور، از شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه استفاده می‌شود. شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه می‌تواند چارچوب بسیار مناسبی برای تولید اولیه، کالیبراسیون و اعتبارسنجی سیستم‌های کنترلی باشد.<sup>[۱]</sup> برخی از مهم‌ترین تحقیقات صورت گرفته به منظور کاربرد شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه در طراحی و آزمون سیستم کنترل الکترونیکی موتورهای هوایی شامل آزمون کنترل‌کننده استارت موتور مینی توربوجت،<sup>[۲]</sup> آزمون کنترل سرعت بی باری موتور توربوجت،<sup>[۳]</sup> آزمون سیستم کنترل فازی برای یک موتور میکروبویت،<sup>[۴]</sup> آزمون واحد کنترل الکترونیکی سوخت موتور توربوفاش با ارتباط شبکه،<sup>[۵]</sup> آزمون سیستم کنترل موتور ریمجت با سوخت مایع<sup>[۶]</sup> و آزمون سیستم کنترل چندمتغیره موتور جت در شرایط پرواز<sup>[۸]</sup> است. محققان با بررسی مشکلات ناشی از استفاده از گام‌های زمانی کوچک در شبیه‌سازی زمان - واقعی، استفاده از شبیه‌سازی چندزخه را برای آزمون واحد کنترل الکترونیکی سوخت موتور توربوجت پیشنهاد کرده‌اند.<sup>[۹]</sup> آنها همچنین در پژوهشی دیگر، عوامل ایجاد خطا در شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه را بررسی کرده‌اند.<sup>[۱۰]</sup> کاربرد آزمون سخت‌افزار در حلقه‌ی واحدهای الکترونیکی فقط محدود به استفاده در موتورهای هوایی نبوده بلکه کاربردهای دیگری نیز در صنعت خودرو و هواپیما دارد.

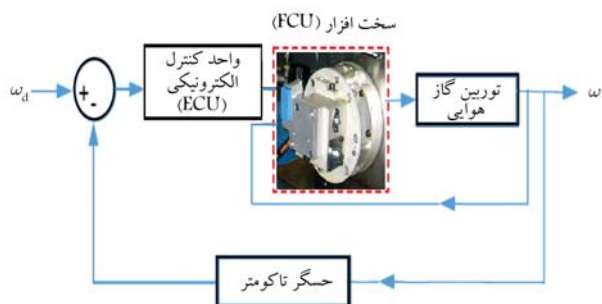
در سال‌های اخیر، استفاده از شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه برای آزمون اجرای مکانیکی یک سیستم، موضوع بسیاری از محققین بوده است. در این نوع شبیه‌سازی لازم است توان واقعی بین قسمت فیزیکی و قسمت عددی انتقال یابد و این موضوع، چالش‌های بزرگی را در این زمینه ایجاد کرده است.<sup>[۱۱]</sup> شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه در صنایع خودرو و هوایی برای آزمون و ارزیابی سیستم‌های هیدرولیکی و مکانیکی، مورد استفاده قرار گرفته است. از این روش برای آزمون سیستم ناوبری برمبنای بینایی یک هواپیمای بدون سرنشین استفاده شده، که در آن سیستم اویونیک و دوربین بر روی مدل هواپیما در تونل باد، آزمون شده است.<sup>[۱۲]</sup> همچنین از این روش برای آزمایش سیستم تشخیص عیب و کنترل خطای مربوط به بالچه‌ی بالابر هواپیما استفاده شده است. بارهای آیرودینامیکی پرواز در شرایط مختلف پروازی با استفاده از شبیه‌ساز به دست آمده و با استفاده از یک عملگر بر روی بالچه‌ی واقعی اعمال شده است.<sup>[۱۳]</sup> از شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه برای آزمایش پیل‌های سوختی هواپیمای بدون سرنشین نیز استفاده شده است. سیستم‌های تولید قدرت، انتقال قدرت، ذخیره‌ی انرژی و سیستم‌های کنترل به عنوان سخت‌افزار در حلقه‌ی شبیه‌سازی به صورت زمان - واقعی آزمایش شده است. بارهای واقعی الکتریکی و مکانیکی به سیستم قدرت هواپیما در شرایط مختلف پروازی اعمال شده است.<sup>[۱۴]</sup> برای آزمایش واحد هیدرولیکی کنترل سوخت موتور توربوجت یک هواپیمای بدون سرنشین در شرایط مختلف پروازی نیز از شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه استفاده شده است.<sup>[۱۵]</sup> در شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه‌ی سیستم‌های مکانیکی، یکی از چالش‌های مهم ناشی از استفاده از سیستم‌های انتقال بین قسمت فیزیکی و قسمت عددی است. سیستم‌های انتقال عموماً عملگرهایی هستند که برای اعمال توان واقعی به قسمت فیزیکی استفاده می‌شوند. اثر دینامیکی این سیستم‌های انتقال به صورت تأخیر زمانی یا پس‌فاز در نظر گرفته می‌شوند. اثر دینامیکی ناشی از سیستم‌های انتقال می‌تواند باعث کاهش دقت شبیه‌سازی یا ناپایداری شبیه‌سازی شود. تاکنون روش‌های مختلفی برای جبران‌سازی اثر دینامیکی سیستم‌های انتقال مورد استفاده قرار گرفته است. سانسانو و همکاران،<sup>[۱۶]</sup> به بررسی اهمیت دینامیک سیستم انتقال در شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه پرداخته و سیستم‌های انتقال استاتیکی و دینامیکی را مورد ارزیابی قرار داده‌اند. کاله و همکاران<sup>[۱۷]</sup> به طراحی مشاهده‌گر برای جبران‌سازی خطای اندازه‌گیری در شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه پرداخته‌اند. فاریاس و همکاران،<sup>[۱۸]</sup> اهمیت کاهش اثر دینامیکی ناخواسته ناشی از سیستم‌های انتقال در شبیه‌سازی سخت‌افزار در

حلقه سیستم تعلیق فعال خورو و همچنین سیستم کنترل زاویه‌ی ماهواره را توضیح داده‌اند. هوریوچی و کونو<sup>[۱۹]</sup> از روش پیش‌بینی چندجمله‌یی برای تخمین سیگنال فرمان مطلوب در شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه استفاده کرده‌اند. احمدی‌زاده و همکاران،<sup>[۲۰]</sup> از اصلاح سیگنال فرمان و همچنین اصلاح سیگنال فیدبک برای کاهش اثر سیستم‌های انتقال استفاده کرده‌اند. گاسروپ و همکاران<sup>[۲۱]</sup> از تابع تبدیل معکوس سیستم انتقال برای افزایش دقت شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه بهره گرفته‌اند. چن و ریکارز<sup>[۲۲]</sup> نیز یک تابع تبدیل مرتبه یک برای سیستم انتقال هیدرولیکی در نظر گرفته و از معکوس مدل سیستم انتقال در شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه استفاده کرده‌اند. آنها همچنین در پژوهشی دیگر، به بهبود روش مدل معکوس با استفاده از جبران‌سازی دوگانه پرداخته‌اند.<sup>[۲۳]</sup> والاس و همکاران<sup>[۲۴]</sup> معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تأخیری حاکم بر شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه یک سیستم را به دست آورده و به بررسی پایداری شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه پرداخته‌اند.

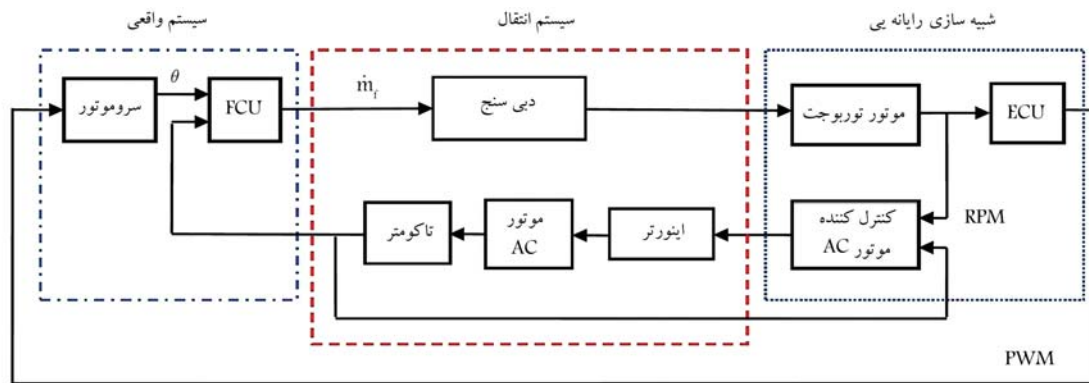
در این مقاله، برای اولین بار از روش پیش‌بینی برمبنای مدل برای شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه‌ی واحد کنترل سوخت موتور توربین گاز هوایی استفاده شده است. در این شبیه‌سازی، از یک دی‌سنج برای اندازه‌گیری دبی جریان سوخت استفاده شده است و بنابراین دینامیک ناخواسته ناشی از استفاده از دی‌سنج باعث ناپایداری شبیه‌سازی می‌شود. با توجه به پاسخ فرکانسی واحد کنترل سوخت، از روش پیش‌بینی برمبنای مدل به کاهش اثر دینامیکی ناخواسته ناشی از سیستم انتقال در مسیر پس‌خور پرداخته شده است. در این روش ابتدا با استفاده از فیلتر کالمن، متغیرهای حالت تخمین زده شده است و سپس به پیش‌بینی متغیرهای حالت پرداخته می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که ارسال متغیرهای حالت پیش‌بینی شده باعث کاهش خطای شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه می‌شود. در این روش، چون تخمین دقیق دینامیک دی‌سنج از اهمیت بالایی برخوردار است، عدم قطعیت در مدل دی‌سنج نیز مورد بررسی و ارزیابی قرار گرفته است.

## ۲. ساختار شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه

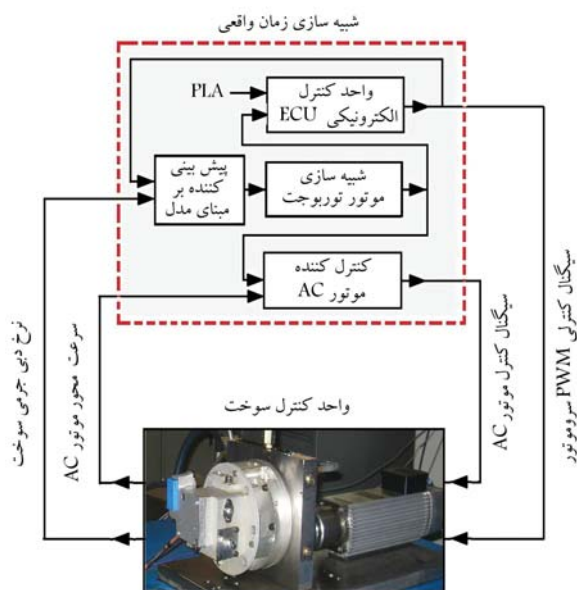
سیستم کنترل سوخت موتور توربین گاز هوایی، یک سیستم کنترل حلقه بسته است که در آن واحد کنترل الکترونیکی (ECU) نقش کنترل‌کننده و واحد کنترل سوخت (FCU) نقش عملگر را ایفا می‌کنند. واحد کنترل سوخت (FCU) یک سیستم الکترونیکی است که شامل یک موتور سرو DC و همچنین دو شیر هیدرولیکی کنترل جریان و کنترل فشار است. ولی واحد کنترل الکترونیکی (ECU) یک برد الکترونیکی جهت کنترل دبی سوخت ورودی موتور است. در اینجا هدف از شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه، آزمون واحد کنترل سوخت در شبیه‌سازی زمان - واقعی بقیه اجرای سیستم مطابق شکل ۱ است.



شکل ۱. شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه واحد کنترل سوخت.



شکل ۲. سیستم های انتقال در شبیه سازی سخت افزار در حلقه ی واحد کنترل سوخت.



شکل ۴. دیاگرام عملکرد رایانه شبیه ساز زمان - واقعی.

ارپیس استفاده شده است که از نوسانات دبی سوخت که توسط پمپ ایجاد می شود جلوگیری می کند. در بستر آزمون، از یک روغن غیرقابل اشتعال با گرانی و چگالی مشابه سوخت واقعی استفاده شده است. برای جابه جایی اسپول شیر کنترل دبی، یک سروموتور DC به همراه یک بادامک استفاده شده است. برای تأمین فشار پشت پمپ چرخ دنده یی واحد کنترل سوخت، از یک مخزن و یک پمپ بوستر استفاده شده است. بستر آزمایش سخت افزار در حلقه شامل دو قسمت، یکی قسمت فیزیکی واحد کنترل سوخت (FCU) و دیگری قسمت نرم افزاری شامل موتور توربین گاز هوایی و واحد کنترل الکترونیکی (ECU) است. قسمت نرم افزاری شامل رایانه یی با سیستم عامل زمان واقعی Real-time Windows Target است. برای اتصال رایانه به قسمت فیزیکی از کارت دیجیتال به آنالوگ ۱۷۱۱۸۸ - PCI Advantech استفاده شده است. رایانه یی شبیه ساز مطابق شکل ۴، شامل مدل ترمودینامیکی موتور، الگوریتم کنترل سوخت، کنترل کننده ی موتور AC و همچنین الگوریتم پیش بینی برای جبران سازی تأخیر زمانی ناشی از سیستم انتقال است. کارت دیجیتال به آنالوگ دارای دو خروجی آنالوگ است که یکی از خروجی های آنالوگ برای کنترل موتور AC و خروجی آنالوگ دیگر به همراه یک مبدل آنالوگ به PWM برای کنترل سروموتور DC استفاده شده است. برای اندازه گیری دبی سوخت، از خروجی سیگنال



شکل ۳. بستر آزمایش سخت افزار در حلقه واحد کنترل سوخت.

چون واحد کنترل الکترونیکی به صورت فیزیکی در شبیه سازی قرار می گیرد، بنابراین نیاز به سیستم های انتقال برای اتصال قسمت فیزیکی به شبیه ساز مطابق شکل ۲ است. دبی خروجی از واحد کنترل سوخت توسط دبی سنسج اندازه گیری می شود و پمپ واحد کنترل الکترونیک توسط یک موتور الکتریکی AC درایو می شود. در اینجا دبی سنسج و موتور الکتریکی، سیستم های انتقال شبیه سازی سخت افزار در حلقه هستند که در سیستم حلقه بسته ی اصلی وجود ندارند و برای شبیه سازی سخت افزار در حلقه اضافه می شوند.

واحد کنترل سوخت شامل یک پمپ چرخ دنده یی است که محور آن به واسطه ی یک گیربکس توسط شفت موتور توربین گاز هوایی کاهنده دوران می کند. موتور توربین گاز هوایی به همراه واحد کنترل الکترونیکی آن شبیه سازی رایانه یی می شوند و لی واحد کنترل سوخت به صورت فیزیکی در کنار شبیه ساز نرم افزاری قرار می گیرد. بنابراین پمپ واحد کنترل سوخت به صورت مکانیکی مطابق شکل ۳ توسط یک موتور الکتریکی AC با استفاده از فرمانی که از شبیه ساز رایانه یی دریافت می کند به حرکت درمی آید. برای کنترل دور موتور الکتریکی از یک اینورتر با کنترل کننده PID استفاده شده است. دور محور پمپ واحد کنترل سوخت توسط یک تاکومتر نوری اندازه گیری می شود. برای اندازه گیری دبی سوخت خروجی از واحد کنترل سوخت نیز از یک دبی سنسج استفاده شده است. موتور الکتریکی AC و همچنین دبی سنسج، سیستم های انتقالی واسط بین قسمت واقعی و قسمت نرم افزاری هستند. واحد کنترل سوخت علاوه بر پمپ چرخ دنده یی شامل دو شیر اسپول دار، یکی برای کنترل دبی و دیگری برای کنترل فشار است. وقتی اختلاف فشار دو طرف شیر کنترل دبی زیاد می شود، شیر کنترل فشار با کنار گذر کردن دبی سوخت به مخزن، باعث ثابت نگه داشتن اختلاف فشار می شود. این دو شیر در کنار هم در واقع تشکیل یک شیر تناسبی را می دهند که در آن دبی خروجی از واحد کنترل سوخت متناسب با جابه جایی اسپول شیر کنترل دبی خواهد بود. در واحد کنترل سوخت همچنین از یک

جریان دبی‌سنج به همراه یک مبدل سیگنال جریان به ولتاژ استفاده شده است. برای اندازه‌گیری سرعت محور پمپ نیز از خروجی پالس تاکومتر به همراه یک مبدل فرکانس به ولتاژ استفاده شده است.

### ۳. مدل‌سازی موتور توربین گاز هوایی

در شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه (HIL)، واحد کنترل سوخت واقعی در کنار مدل ریاضی موتور توربین‌گاز هوایی آزمایش می‌شود. بنابراین در این شبیه‌سازی، نیازی به مدل ریاضی واحد کنترل سوخت نبوده و فقط مدل ریاضی موتور توربین گاز هوایی ارائه شده است. موتور توربین‌گاز هوایی مورد بررسی یک موتور تک محوره شامل کمپرسور سه مرحله‌ای، توربین یک مرحله‌ای و نازل همگرا است. این موتور جریان کنارگذر و همچنین شیر تخلیه هوا از کمپرسور ندارد. برای مدل‌سازی این موتور هوای ورودی و گازهای ناشی از احتراق به‌عنوان گاز ایده‌آل فرض شده و اثرات ناشی از انتقال حرارت در موتور صرف‌نظر شده است. در شکل ۵، شماتیک موتور توربین‌گاز هوایی و شماره‌گذاری استفاده شده برای مدل‌سازی نشان داده شده است.

موتور مورد مطالعه دارای ۵ قسمت اصلی شامل دیفیوزر ورودی، کمپرسور، محفظه احتراق، توربین و نازل خروجی است. در مدل‌سازی موتور، هر قسمت به‌عنوان یک سیستم مجزا در نظر گرفته می‌شود. از مدل ترمودینامیکی صفر بعدی برای به دست آوردن تغییر خواص ترمودینامیکی در حالت گذرا استفاده می‌شود. دما و فشار برای هر قسمت به‌صورت یکنواخت در نظر گرفته می‌شود. در ادامه، به مدل‌سازی هر قسمت به‌طور جداگانه پرداخته خواهد شد.

فهرست علائم به کار رفته در مدل‌سازی ترمودینامیکی:

$T$ : دما ( $K$ )؛

$P$ : فشار ( $Pa$ )؛

$M$ : ماخ؛

$\dot{m}$ : دبی جرمی ( $kg/s$ )؛

$\eta$ : راندمان؛

$N$ : سرعت زاویه‌ای روتور ( $rpm$ )؛

$C_p$ : ثابت گرمای ویژه در فشار ثابت ( $J/kgK$ )؛

$C_v$ : ثابت گرمای ویژه در حجم ثابت ( $J/kgK$ )؛

$\dot{m}_c$ : دبی تصحیح شده کمپرسور ( $kg/s$ )؛

$M$ : جرم ( $kg$ )؛

$R$ : ثابت گاز ( $J/kgK$ )؛

$C_d$ : ضریب تخلیه دهانه نازل؛

$A$ : مساحت ( $m^2$ )؛

$\gamma$ : نسبت گرمای ویژه هوا؛

$\delta$ : فشار تصحیح شده؛

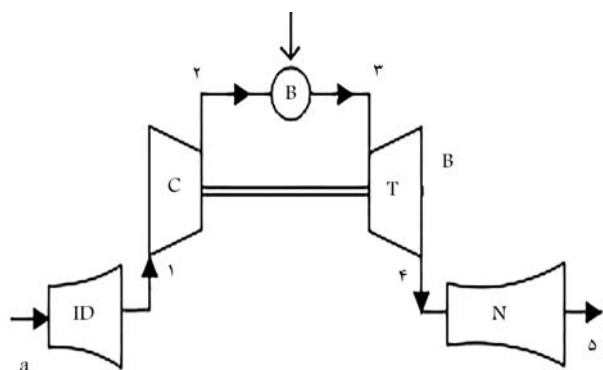
$\theta$ : دمای تصحیح شده؛

$f()$ : مپ‌های کمپرسور و توربین.

اندیس‌ها

$f$ : سوخت؛

$star^*$ : شرایط آیزنتروپیک؛



شکل ۵. چرخه موتور توربین‌گاز هوایی تک‌محوره ( $ID$ : دیفیوزر ورودی،  $C$ : کمپرسور،  $B$ : محفظه احتراق،  $T$ : توربین،  $N$ : نازل).

( $Prime$ ): ورودی.

الف) دیفیوزر ورودی: جریان هوا در دیفیوزر یک فرایند آیزنتروپیک در نظر گرفته می‌شود. انتقال حرارت و اصطکاک بین هوا و دیواره، مد نظر قرار نمی‌گیرد. جریان هوا در دیفیوزر شبه یکنواخت فرض می‌شود یعنی رفتار دینامیکی هوا در نظر گرفته نمی‌شود. دما و فشار در خروجی دیفیوزر با استفاده از شرایط پروازی چنین به دست می‌آید:

$$\frac{T_1}{T_0} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad (1)$$

$$\frac{P_1}{P_0} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (2)$$

ب) کمپرسور: عملکرد حالت پایای کمپرسور را می‌توان مطابق رابطه‌ی ۳ ارزیابی کرد. دبی جرمی تصحیح شده هوای ورودی به کمپرسور را می‌توان برحسب نسبت فشار و سرعت محور کمپرسور چنین به دست آورد:

$$\dot{m}_c = \frac{\delta_1}{\sqrt{\theta_1}} f_1 \left( \frac{P_r}{P_1}, \frac{N}{\sqrt{\theta_1}} \right), \quad \delta_1 = \frac{P_1}{P_0}, \quad \theta_1 = \sqrt{\frac{T_1}{T_0}} \quad (3)$$

و دبی هوای ورودی به کمپرسور را می‌توان با استفاده از دبی تصحیح شده چنین محاسبه کرد:

$$\dot{m}_r = \frac{\delta_1 \dot{m}_c}{\sqrt{\theta_1}} \quad (4)$$

بازده کمپرسور را نیز می‌توان برحسب نسبت فشار و سرعت محور کمپرسور به دست آورد:

$$\eta_c = f_r \left( \frac{P_r}{P_1}, \frac{N}{\sqrt{\theta_1}} \right) \quad (5)$$

برای بررسی دمای کمپرسور، باید اثر دما بر گرمای ویژه‌ی هوا را در نظر داشت. بنابراین، دمای هوای درون کمپرسور با استفاده از مقدار میانگین رابطه‌ی ۶ محاسبه می‌شود.

$$T_c = \frac{T_r - T_1}{\ln \left( \frac{T_r^*}{T_1} \right)} \quad (6)$$

که در آن  $T_r^*$  دمای آیزنتروپیک بعد از کمپرسور بوده و چنین به دست می‌آید:

$$T_r^* = T_r \left\{ 1 + \frac{1}{\eta_c} \left[ \left( \frac{P_r}{P_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} - 1 \right] \right\} \quad (7)$$

ه) نازل خروجی: جریان گاز در نازل در حالت شبه پایا در نظر گرفته می شود. دبی جریان گاز عبوری از نازل با استفاده از نسبت فشار دو طرف نازل و شرایط ورودی نازل مطابق روابط ۲۱ و ۲۲ به دست می آید:

$$\dot{m}_\delta = C_d A_\delta \frac{P_\delta}{\sqrt{RT_\delta}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{P_\delta}{P_\delta}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left(\frac{P_\delta}{P_\delta}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \quad (21)$$

$$V_e = c_v \left\{ \frac{2\gamma RT_\delta}{\gamma-1} \left[ 1 - \left(\frac{P_\delta}{P_\delta}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \right\}^{1/2} \quad (22)$$

اگر شرط زیر برقرار باشد:

$$\frac{P_\delta}{P_\delta} \leq \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (23)$$

آنگاه نازل چوک شده و به جای رابطه ی ۲۱، از رابطه ی ۲۴ استفاده می شود.

$$\dot{m}_\delta = 0.688 C_d A_\delta \frac{P_\delta}{\sqrt{RT_\delta}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \quad (24)$$

و) روتور: روتور شامل محور، پره های کمپرسور و توربین و تجهیزات روی آنهاست. دینامیک روتور با استفاده از رابطه اوایلر در حرکت دورانی چنین بیان می شود:

$$\dot{N} = \frac{\dot{m}_r}{J_N} (h'_r - h_r) - \frac{\dot{m}_t}{J_N} (h'_t - h_t) \quad (25)$$

مجموعه ی معادلات ۱ تا ۲۵ بیانگر رفتار دینامیکی موتور خواهد بود. این معادلات شامل ۷ معادله ی دیفرانسیل غیرخطی مرتبه ی اول و ۱۸ معادله ی جبری است. با توجه به معادلات دیفرانسیل حاصل، بردار متغیرهای حالت شامل ۷ متغیر به صورت زیر است:

$$\tilde{x}^T = \left[ M_r \quad T_r \quad P_r \quad M_t \quad T_t \quad P_t \quad M_f \quad T_f \quad P_f \quad N \right] \quad (26)$$

شبیه سازی دینامیکی موتور از شرایط تعادل سیستم شروع می شود. بنابراین، ابتدا ورودی کنترلی را مشخص کرده و با صفر قرار دادن مشتق متغیرهای حالت، شرایط تعادل یا شرایط اولیه حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از روش نیوتن - رافسون به دست می آید. با معلوم بودن شرایط اولیه، معادلات دیفرانسیل با استفاده از روش رانگ - کوتا حل می شود. در جدول ۱، مقادیر پارامترهای استفاده شده در مدل ترمودینامیکی موتور ارائه شده است.

#### ۴. روش پیش بینی بر مبنای مدل

در صورتی که اثر دینامیکی ناخواسته ناشی از سیستم های انتقال در شبیه سازی سخت افزار در حلقه خنثی نشود، دقت شبیه سازی سخت افزار در حلقه کاهش می یابد. در این جا برای جبران اثر دینامیکی ناشی از اندازه گیری دبی سوخت در شبیه سازی سخت افزار در حلقه، از ساختار شکل ۶ استفاده شده است. کنترل کننده ی به کار برده شده در اینجا یک کنترل کننده ی فیدبک حالت بوده که بر اساس شبیه سازی نرم افزاری طراحی شده است. جبران کننده باید بتواند بدون تغییر ساختار و پارامترهای کنترل کننده ی اصلی، اثر دینامیکی ناخواسته ناشی از سیستم انتقال را که به واسطه ی شبیه سازی سخت افزار در حلقه ایجاد شده است، جبران کند. در این ساختار، فیلتر

در طی فرایند گذرا، کمپرسور به صورت یک حجم کنترل در نظر گرفته می شود که می تواند جرم و انرژی را در خود ذخیره کند. دینامیک دبی جریان هوا از کمپرسور با استفاده از اصل بقای جرم و انرژی و همچنین با استفاده از قانون گاز ایده آل به دست می آید:

$$\frac{dM_r}{dt} = \dot{m}'_r - \dot{m}_r - \dot{m}_{tc} \quad (8)$$

$$\frac{dT_r}{dt} = \frac{1}{M_r c_v} [\dot{m}'_r (h'_r - u_r) - (\dot{m}_r + \dot{m}_{tc}) RT_r] \quad (9)$$

$$\frac{dP_r}{dt} = (\dot{m}_r - \dot{m}'_r) \frac{RT_r}{V_r} + \frac{P_r}{T_r} \dot{T}_r \quad (10)$$

$\dot{m}_{tc}$ : دبی هوای کنارگذری است که از کمپرسور برای خنک کاری توربین استفاده می شود.

ج) محفظه ی احتراق: احتراق سوخت در محفظه ی احتراق فرایند پیچیده یی است. وقتی سوخت به هوای ورودی به محفظه ی احتراق تزریق می شود، قطرات سوخت همراه با جریان هوا به محفظه ی احتراق منتقل می شوند. طی این انتقال، قطرات سوخت توسط هوای داغ محیط بخار می شود. بخار سوخت با هوای داغ ترکیب شده و سوخته می شود. میزان ترکیب هوا و بخار سوخت تعیین کننده بازده محفظه احتراق خواهد بود. فرایند احتراق در مدل سازی موتور ساده سازی می شود و فرض می شود که احتراق در لحظه ی ورود به محفظه احتراق اتفاق می افتد. میزان افت فشار گاز در محفظه احتراق با استفاده از دبی جریان و دمای گاز از رابطه ی ۱۱ محاسبه می شود.

$$\Delta P = P_t - P_r = \frac{1}{P_r} K_b \dot{m}_r (0.778 T_r - 0.85 T_r) \quad (11)$$

و دینامیک جریان گاز در محفظه احتراق با استفاده از اصل بقای جرم و انرژی و همچنین با استفاده از قانون گاز ایده آل به صورت زیر به دست می آید.

$$\frac{dM_r}{dt} = \dot{m}'_r - \dot{m}_f - \dot{m}_r \quad (12)$$

$$\frac{dT_r}{dt} = \frac{1}{M_r c_v} [\dot{m}'_r (h'_r - u_r) + \dot{m}_f (h_f \eta_b - u_r) - \dot{m}_r RT_r] \quad (13)$$

$$\frac{dP_r}{dt} = (\dot{m}_r - \dot{m}'_r) \frac{RT_r}{V_r} + \frac{P_r}{T_r} \dot{T}_r \quad (14)$$

که

$$\dot{m}_r = \dot{m}_r \quad (15)$$

د) توربین: دبی جرمی گاز و همچنین کاهش آنتالپی توربین، تابعی از نسبت فشار و سرعت محور توربین است:

$$\dot{m}_r = \frac{N}{T_r} P_r f_r \left( \frac{P_r}{P_r}, \frac{N}{\sqrt{T_r}} \right) \quad (16)$$

$$\Delta h_t = h_r - h'_r = N T'_r f_t \left( \frac{P_r}{P_r}, \frac{N}{\sqrt{T_r}} \right) \quad (17)$$

طی فرایند گذرا، دینامیک جریان گاز در توربین چنین بیان می شود:

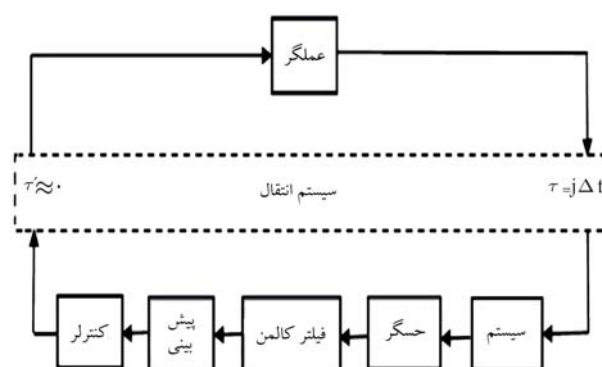
$$\frac{dM_r}{dt} = \dot{m}'_r - \dot{m}_r + \dot{m}_{tc} \quad (18)$$

$$\frac{dT_r}{dt} = \frac{1}{M_r c_v} [\dot{m}'_r (h'_r - u_r) + \dot{m}_{tc} (h_t - u_r) - \dot{m}_r RT_r] \quad (19)$$

$$\frac{dP_r}{dt} = (\dot{m}_r - \dot{m}'_r) \frac{RT_r}{V_r} + \frac{P_r}{T_r} \dot{T}_r \quad (20)$$

جدول ۱. مقادیر پارامترهای به کار رفته در مدل‌سازی ترمودینامیکی موتور.

پارامتر	پارامتر	مقدار
دبی سوخت	$\dot{w}_f$	$0.145 kg/s \sim 0.38$
آنتالپی سوخت	$h_f$	$42.8 \times 10^6 J/Kg$
بازده محفظه احتراق	$\eta_b$	$0.9$
بازده مکانیکی	$\eta_m$	$0.98$
نسبت گرمای ویژه	$\gamma$	$1.4$
ثابت گاز	$R$	$286.9 J/KgK$
مساحت دهانه نازل	$A_n$	$0.184 m^2$
مساحت توربین	$A_t$	$0.146 m^2$
مساحت لایز محفظه احتراق	$A_1$	$0.5014 m^2$
نسبت فشار چوک در توربین	$\pi_t^*$	$2.15$
نسبت فشار چوک در نازل	$\pi_n^*$	$1.89$
فشار محیط	$P_e$	$101325 Pa$
ضریب تخلیه نازل	$C_d$	$0.96$



شکل ۶. جبران‌سازی تأخیر زمانی در شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه با استفاده از فیلتر کالمن و پیش‌بین.

کالمن بر اساس خروجی‌هایی که در مسیر عملگر به سیستم هستند، به تخمین متغیرهای حالت می‌پردازد. پیش‌بینی‌کننده بر اساس خروجی فیلتر کالمن که همان تخمین متغیرهای حالت است، مجموعه‌ای از پیش‌بینی متغیرهای حالت در زمان آینده را فراهم می‌کند. کنترل‌کننده نیز بر اساس مجموعه متغیرهای حالتی که از پیش‌بین دریافت می‌کند، مجموعه‌ای از سیگنال‌های کنترلی در زمان آینده را ایجاد می‌کند. مدت زمان پیش‌بینی برابر با میزان تأخیر زمانی ناشی از اندازه‌گیری دبی سوخت خواهد بود.

سیستم در نظر گرفته شده در این حالت، سیستم خطی گسسته بوده، که معادله‌ی آن در فضای حالت عبارت است از:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (27)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (28)$$

در رابطه‌های ۲۷ و ۲۸، بردار ورودی‌های سیستم،  $\mathbf{u}_k \in R^m$ ، بردار متغیرهای حالت سیستم و  $\mathbf{y}_k \in R^p$  بردار خروجی‌های سیستم هستند.  $\mathbf{w}_k \in R^n$  و  $\mathbf{v}_k \in R^p$  به ترتیب بردار نویز فرایند و نویز خروجی بوده و از نوع نویز سفید با کوواریانس  $Q \in R^{n \times n}$  و  $R \in R^{p \times p}$  هستند.

ماتریس‌های  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  با استفاده از مدل خطی حاصل از معادلات ترمودینامیکی موتور توربین گاز هوایی به دست آمده است. معادلات ترمودینامیکی

موتور توربین گاز هوایی در نرم‌افزار MATLAB/SIMULINK شبیه‌سازی شده است. برای به دست آوردن ماتریس‌های مدل خطی، از ابزارهای خطی‌سازی در نرم‌افزار MATLAB استفاده شده است.

فرض‌های در نظر گرفته شده برای استفاده از روش پیش‌بین عبارت‌اند از:

الف) سیستم به طور کامل کنترل پذیر و مشاهده پذیر باشد؛

ب) بیشینه‌ی تأخیر زمانی در کانال پس‌خور و پیش‌خور به ترتیب برابر  $M$  و  $N$  است.

ج) اگر داده‌یی در یک انتقال مشخص به گیرنده تحویل داده نشود، بدین معناست که اتلاف داده رخ داده است. فرض می‌شود فقط تعداد محدودی اتلاف داده رخ می‌دهد، چون در غیر این صورت سیستم کنترل تحت شبکه، حلقه باز می‌شود.

فیلتر کالمن یک روش بهینه برای تخمین متغیرهای حالت سیستم است. این فیلتر با کمینه‌سازی جذر میانگین مربعات خطا، به تخمین دقیق متغیرهای حالت سیستم در حضور نویز و نامعینی‌های سیستم می‌پردازد. مشاهده‌گرهای مبتنی بر روش کالمن می‌توانند تخمین دقیقی از حالت‌های سیستم با وجود تأخیر و اتلاف داده داشته باشند. لذا در این پژوهش از فیلتر کالمن برای تخمین متغیرهای حالت سیستم در شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه استفاده شده است. فیلتر کالمن به عنوان مشاهده‌گر برای تخمین متغیرهای حالت مورد استفاده قرار گرفته است. [۲۵]

مجموعه خروجی‌های اندازه‌گیری شده توسط دبی‌سنج در هر زمان نمونه‌برداری به سمت سیستم ارسال می‌شود. فیلتر کالمن بر اساس خروجی سیستم که دارای تأخیر زمانی است، به تخمین متغیرهای حالت می‌پردازد. اگر تأخیر زمانی رخ داده در مسیر عملگر به سیستم برابر  $z$  باشد، آنگاه مجموعه داده‌های ارسالی، در زمان  $k - z$  به فیلتر کالمن می‌رسد و فیلتر کالمن بر اساس داده‌های ارسال شده به تخمین متغیر حالت در زمان  $k - z$  می‌پردازد. پیش‌بینی‌کننده با استفاده از روابط ۲۹ تا ۳۱، متغیرهای حالت برای جبران تأخیر زمانی در مسیر عملگر به سیستم را پیش‌بینی می‌کند.

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-j+1|k-j} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-j|k-j-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-j} + \mathbf{K}_{k-j}(\mathbf{y}_{k-j} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{k-j|k-j-1})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-j+2|k-j} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-j+1|k-j} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-j+1} \quad (29)$$

$$\dots$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-j} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-j} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} \quad (30)$$

بیان‌گر تخمین متغیرهای حالت در زمان  $k - j + 1$  بر اساس خروجی‌های تا زمان  $k - j$  است. کنترل‌کننده نیز با استفاده از بردار متغیرهای حالت پیش‌بینی شده به اندازه‌ی افق پیش‌بین، سیگنال کنترلی مطابق رابطه‌ی ۳۱ ایجاد کرده و به عملگر ارسال می‌کند.

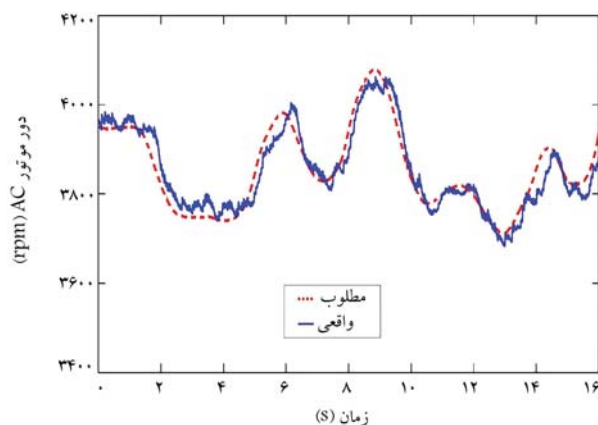
$$\mathbf{u}_{k|k-j} = \mathbf{L}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-j} \quad (31)$$

معادلات ۲۹ و ۳۰ مربوط به پیش‌بینی‌کننده و معادله ۳۱ بیان‌گر کنترل‌کننده است.

## ۵. نتایج

### ۱.۵. اعتبارسنجی مدل موتور

برای اعتبارسنجی شبیه‌سازی ترمودینامیکی موتور توربین گاز هوایی، در بستر آزمون موتور، موتور واقعی مجهز به یک حسگر فشارسنج بعد از کمپرسور، سه حسگر



شکل ۹. نتایج تجربی سرعت موتور الکتریکی AC و مقایسه‌ی با فرمان مطلوب.

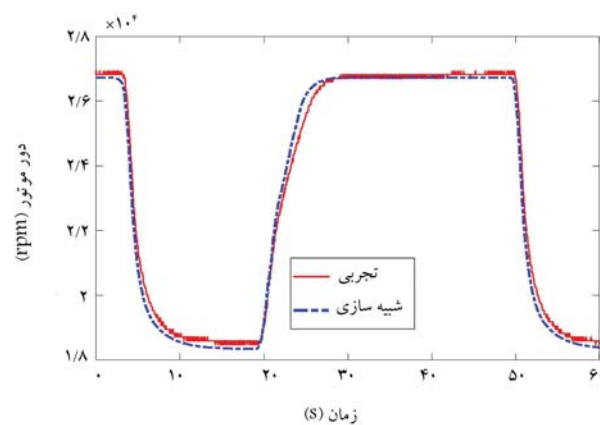
الکتریکی نسبتی از دور موتور توربین گاز هوایی است. در شکل ۹ فرمان ارسالی از شبیه‌سازی موتور توربین گاز هوایی و نتایج تجربی دور موتور الکتریکی نشان داده شده است. نتایج تجربی نشان می‌دهد که کنترل‌کننده‌ی PID طراحی شده برای کنترل دور موتور الکتریکی با دقت کم‌تر از ۶٪ توانسته است فرمان ارسالی را ردیابی کند. در شروع شبیه‌سازی، اختلاف قابل ملاحظه‌ای در نتایج مشاهده می‌شود زیرا موتور الکتریکی دارای سرعت صفر بوده است و در واقع سرعت مطلوب به صورت یک فرمان پله‌ای عمل کرده است.

### ۳.۵. اندازه‌گیری تأخیر زمانی در سیستم انتقال

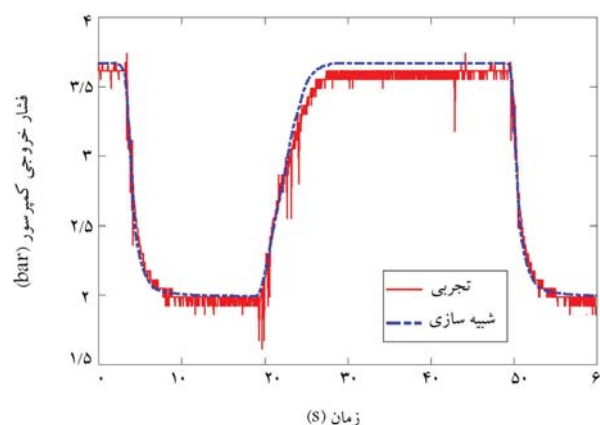
موتور الکتریکی AC که برای به حرکت درآوردن محور پمپ واحد کنترل سوخت استفاده شده است و همچنین دبی‌سنج نصب شده در خروجی واحد کنترل سوخت، دو سیستم انتقالی هستند که در شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه‌ی واحد کنترل سوخت به کار رفته‌اند. نتایج حاصل از شبیه‌سازی نشان می‌دهد که دینامیک موتور الکتریکی AC تأثیر زیادی در شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه ندارد.

تأخیر ایجاد شده در شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه ناشی از دبی‌سنج و لوله‌کشی مربوط به آن است. دبی‌سنج برای اندازه‌گیری دبی سوخت خروجی از واحد کنترل سوخت (FCU) استفاده می‌شود. سیگنال مربوط به میزان دبی سوخت اندازه‌گیری شده با استفاده از میدل فرکانس به ولتاژ، به شبیه‌سازی زمان - واقعی موتور توربین گاز هوایی ارسال می‌شود. میزان تأخیر زمانی دبی‌سنج وابسته به مشخصات دبی‌سنج، اتصالات مربوط به آن و همچنین فرکانس تغییرات دبی سوخت دارد.

تخمین مناسب مقدار تأخیر زمانی ناشی از اندازه‌گیری دبی سوخت، باعث بهبود عملکرد روش جبران‌سازی ارائه شده می‌شود. برای تخمین تأخیر زمانی، از نمودار بود (Bode) مربوط به اختلاف فاز ورودی و خروجی واحد کنترل سوخت استفاده شده است. برای این منظور ورودی‌های سینوسی با فرکانس‌های مختلف با استفاده از سروموتور به اسپول شیر کنترل دبی اعمال شده و مقدار دبی خروجی از واحد کنترل سوخت اندازه‌گیری شده است. اختلاف فاز ورودی و خروجی واحد کنترل سوخت در فرکانس‌های مختلف مطابق شکل ۱۰ به صورت نیمه‌لگاریتمی رسم شده است. مقایسه‌ی نتایج حاصل از نمودار فاز تجربی و نمودار فاز مربوط به تأخیر زمانی ثابت، بیان‌گر آن است که در محدوده‌ی فرکانس کاری مورد نظر، با دقت خوبی می‌توان از تأخیر زمانی ثابت  $\tau = 0.25 \text{ sec}$  برای سیستم انتقال استفاده کرد.



شکل ۷. دور محور موتور حاصل از نتایج تجربی و شبیه‌سازی ترمودینامیکی موتور.



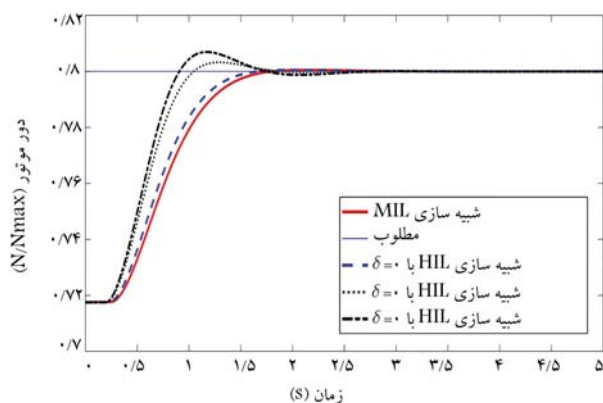
شکل ۸. فشار خروجی از کمپرسور حاصل از نتایج تجربی و شبیه‌سازی ترمودینامیکی موتور.

دما در ورودی نازل، یک حسگر مغناطیسی اثر هال برای اندازه‌گیری دور محور است و برای انجام شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه به یک حسگر دبی‌سنج نیز مجهز شده است. برای جمع‌آوری داده‌ی حسگرها از مائول  $PC/104$  و با زمان نمونه‌برداری ۱ میلی ثانیه استفاده شده است. در شکل‌های ۷ و ۸، نتایج حاصل از مدل ترمودینامیکی و نتایج تجربی به‌ازای تغییرات دبی سوخت ورودی به موتور نشان داده شده است. نتایج حاصل بیان‌گر تطابق خوب شبیه‌سازی با داده‌های تجربی با خطای کم‌تر از ۷٪ برای دور موتور و خطای کم‌تر از ۵٪ برای نسبت فشار کمپرسور است. نتایج مربوط به دور موتور و نسبت فشار کمپرسور، بدون استفاده از فیلتر رسم شده است ولی در شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه از فیلترهای پایین‌گذر خطی مرتبه اول استفاده شده است. نقاط ناپیوسته در شکل ۷ مربوط به نویز حسگر تاکومتر و نقاط ناپیوسته در شکل ۸ مربوط به نویز حسگر فشارسنج است.

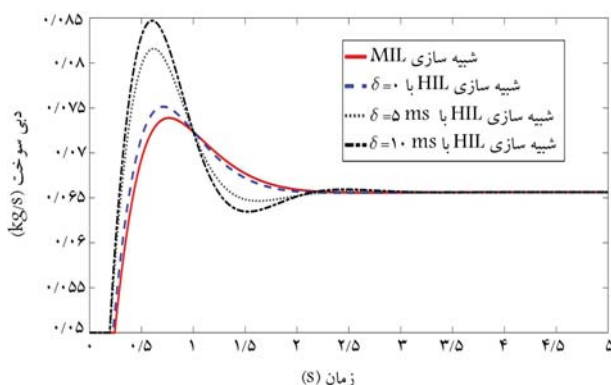
### ۲.۵. عملکرد سیستم کنترل موتور AC

پمپ چرخ‌دنده‌ای داخلی واحد الکتروهیدرولیکی کنترل سوخت در موتور توربین گاز هوایی به‌واسطه‌ی محور موتور توربین گاز هوایی و یک گیربکس کاهنده درایو می‌شود. در شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه، این ارتباط مکانیکی وجود ندارد زیرا موتور توربین گاز هوایی شبیه‌سازی رایانه‌ای می‌شود. بنابراین برای درایو پمپ واحد کنترل سوخت از یک موتور الکتریکی AC استفاده شده است. سیگنال فرمان موتور

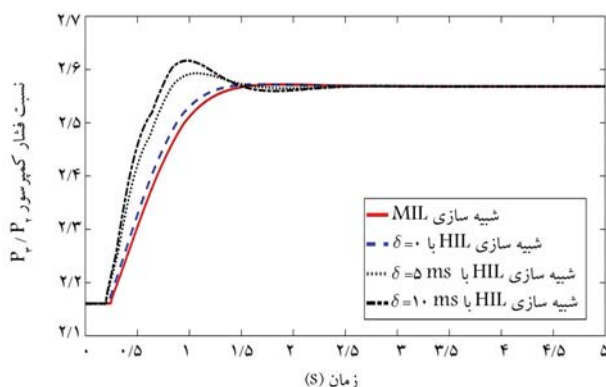




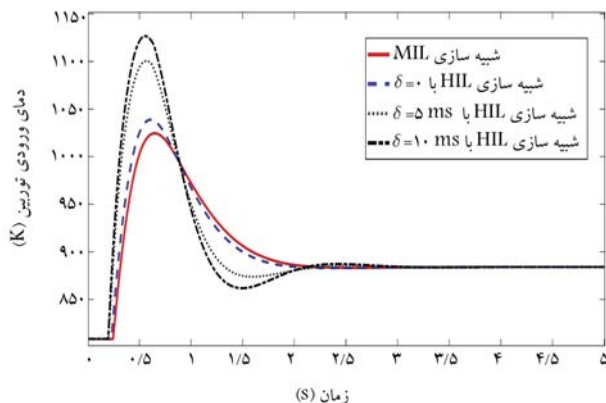
شکل ۱۱. بررسی تأثیر عدم تطابق تأخیر زمانی در دور موتور.



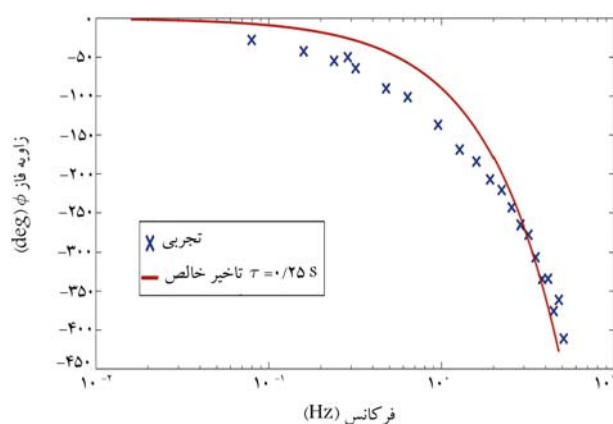
شکل ۱۲. بررسی تأثیر عدم تطابق تأخیر زمانی در دبی سوخت.



شکل ۱۳. بررسی تأثیر عدم تطابق تأخیر زمانی در نسبت فشار کمپرسور.



شکل ۱۴. بررسی تأثیر عدم تطابق تأخیر زمانی در دمای ورودی به توربین.



شکل ۱۰. نمودار فاز حاصل از داده‌های تجربی و مقایسه‌ی آن با نمودار فاز تأخیر زمانی ثابت  $\tau = 0.25 \text{ sec}$ .

جدول ۲. مشخصات نقطه‌ی تعادل موتور.

پارامتر	علامت	حدس اولیه	تعادل
دور موتور	$N$	۰.۷	۰.۷۲
نسبت فشار کمپرسور	$P_2/P_1$	۲	۲.۵۷
دمای ورودی توربین	$T_2$	۶۵۰ K	۸۷۰ K

#### ۴.۵. ارزیابی شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه

برای شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه در حالت گذرا، شرایط اولیه موتور در حالت تعادل در نظر گرفته می‌شود. شرایط تعادل با تعیین میزان سوخت ورودی به موتور به دست می‌آید. با یک حدس اولیه مطابق جدول ۲، شرایط تعادل با استفاده از روش نیوتن - رافسون برای دبی سوخت  $\dot{m}_f = 0.05 \text{ kg/s}$  به دست آمده است. یکی از پارامترهای تأثیرگذار در عملکرد روش پیش‌بینی ارائه شده، میزان تأخیر زمانی در نظر گرفته شده در روش پیش‌بینی است. در این شبیه‌سازی، تأخیر زمانی با استفاده از روش فرکانسی برابر  $\tau = 0.25 \text{ sec}$  به دست آمده است.

خطای محاسبه‌ی تأخیر زمانی، تأثیر زیادی در عملکرد روش پیش‌بینی ارائه شده دارد. بنابراین در شکل‌های ۱۱ تا ۱۴ بررسی اثر خطای محاسبه‌ی تأخیر زمانی نشان داده شده است. در شکل ۷ و ۸ به ترتیب، نویز ناشی از حسگر دورسنج و فشارسنج قابل مشاهده است. با توجه به این که این روش به صورت تجربی انجام گرفته است، نتایج ارائه شده با در نظر گرفتن اغتشاش ناشی از حسگرها بوده است. اگر تأخیر زمانی واقعی با تأخیر زمانی محاسبه شده، تطابق نداشته باشد آنگاه

دقت شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه کاهش می‌یابد. در اینجا این میزان عدم تطابق با  $\delta$  نشان داده شده است. به عبارت دیگر، فرض شده است که تأخیر زمانی در روش پیش‌بینی برابر  $\tau + \delta$  و تأخیر زمانی واقعی برابر  $\tau$  است. در شکل‌های ۱۱ تا ۱۴، اثر عدم تطابق تأخیر زمانی در پارامترهای مهم موتور از جمله دور موتور ( $N$ )، دبی جرمی سوخت ورودی ( $\dot{m}_f$ )، نسبت فشار کمپرسور ( $P_2/P_1$ ) و همچنین دمای گاز ورودی به توربین ( $T_2$ ) نشان داده شده است. در حالتی که تطابق بین تأخیرهای زمانی ناچیز باشد ( $\delta = 0$ )، نتایج شبیه‌سازی HIL به شبیه‌سازی MIL نزدیک است ولی چنانچه بین تأخیرهای زمانی واقعی و شبیه‌سازی عدم تطابق وجود داشته باشد ( $\delta = \pm 5 \text{ ms}$ )، دقت شبیه‌سازی کاهش می‌یابد. حالت  $\delta = +5 \text{ ms}$  بیانگر شرایطی است که تأخیر زمانی، دست بالا تخمین زده شود ولی حالت  $\delta = -5 \text{ ms}$  نشان‌دهنده‌ی آن است که تأخیر زمانی، دست پایین تخمین زده شده است. نتایج

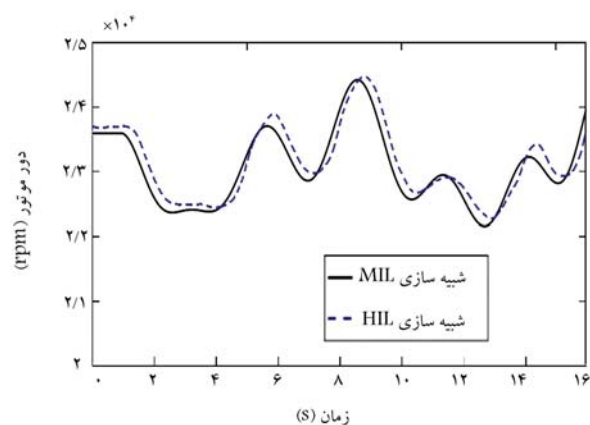


توانسته است تأخیر زمانی مسیر پس‌خور را جبران کند و نتایج شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه (HIL) نسبت به شبیه‌سازی مدل در حلقه (MIL) دارای خطایی کم‌تر از ۵٪ است.

در روش پیش‌بینی بر مبنای مدل ارائه شده، فیلتر کالمن نقش مشاهده‌گر متغیرهای حالت را دارد و وظیفه پیش‌بینی متغیرهای حالت در افق پیش‌بینی مورد نظر را ندارد. با توجه به این که در اینجا از کنترل‌کننده فیدبک حالت استفاده شده است و این کنترل‌کننده از متغیرهای تخمین زده شده توسط فیلتر کالمن استفاده می‌کند، عملکرد فیلتر کالمن در عملکرد کنترل‌کننده فیدبک حالت نشان داده می‌شود. به عبارت دیگر، عملکرد کنترل‌کننده و فیلتر کالمن به صورت مجموعه‌ای به هم وابسته در شکل‌های ۱۱ تا ۱۵ نشان داده شده است.

## ۶. نتیجه‌گیری

روش پیش‌بینی بر اساس مدل برای جبران‌سازی تأخیر زمانی در شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه واحد کنترل سوخت موتور توربین گاز هوایی استفاده شده است. در این شبیه‌سازی، موتور توربین گاز هوایی به همراه واحد کنترل الکترونیکی سوخت (ECU) شبیه‌سازی رایانه‌ای شده و واحد الکترونیکی کنترل سوخت (FCU) به صورت فیزیکی در حلقه شبیه‌سازی قرار گرفته است. برای شبیه‌سازی موتور از مدل ترمودینامیکی که شامل معادلات دیفرانسیل و جبری است، استفاده شده است. مقایسه‌ی نتایج تجربی آزمون موتور توربین گاز هوایی با نتایج مدل ترمودینامیکی موتور بیانگر خطای کم‌تر از ۷٪ بوده است. در شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه، واحد کنترل سوخت به صورت فیزیکی در حلقه شبیه‌سازی قرار گرفته است؛ بنابراین دبی خروجی از واحد کنترل سوخت با استفاده از دبی‌سنج اندازه‌گیری شده و به شبیه‌سازی رایانه‌ای ارسال شده است. بررسی پاسخ فرکانسی واحد کنترل سوخت نشان می‌دهد که می‌توان دینامیک دبی‌سنج را به صورت یک تأخیر زمانی ثابت با  $\tau = 0.25 \text{ sec}$  در نظر گرفت. نتایج شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه نشان می‌دهد که تأخیر زمانی ناشی از اندازه‌گیری دبی سوخت خروجی از واحد کنترل سوخت، باعث ناپایداری حلقه‌ی شبیه‌سازی می‌شود. برای جبران اثر دینامیکی ناخواسته ناشی از اندازه‌گیری دبی سوخت، از روش پیش‌بینی بر مبنای مدل استفاده شده است. مقایسه‌ی نتایج حاصل از شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه و شبیه‌سازی رایانه‌ای مدل در حلقه، که در آن تمام اجزای سیستم شبیه‌سازی شده است، بیانگر عملکرد مناسب روش پیش‌بینی ارائه شده است. همچنین نشان داده شده است که خطای ناشی از شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه تا ۵٪ کاهش یافته است.



شکل ۱۵. مقایسه‌ی دور موتور توربین گاز هوایی در شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه و شبیه‌سازی مدل در حلقه.

شبیه‌سازی نشان می‌دهد که اگر تأخیر زمانی دست بالا تخمین زده شود، نتایج شبیه‌سازی نسبت به حالتی که تأخیر زمانی دست پایین تخمین زده می‌شود، دارای دقت بیشتری است. برای ارزیابی عملکرد روش ارائه شده، شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه (HIL) با شبیه‌سازی نرم‌افزار در حلقه (MIL) مقایسه شده است. هر قدر عملکرد روش ارائه شده بهتر باشد، نتایج شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه (HIL) به شبیه‌سازی نرم‌افزار در حلقه (MIL) نزدیک‌تر خواهد شد زیرا در شبیه‌سازی نرم‌افزار در حلقه (MIL)، تأخیر زمانی بین واحد کنترل سوخت و مدل موتور وجود ندارد. چنان که در شکل‌های ۱۱ تا ۱۴ مشاهده می‌شود، عدم تطابق تأخیر زمانی واقعی و افق پیش‌بینی در روش ارائه شده، فقط می‌تواند در پاسخ‌گذاری سیستم مؤثر باشد. البته اگر این عدم تطابق از حد مجاز خارج شود آنگاه سیستم ناپایدار خواهد شد. در شکل ۱۵، نتایج شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه (HIL) با شبیه‌سازی مدل در حلقه (MIL) مربوط به دور محور موتور توربین گاز هوایی نشان داده شده‌اند. فرمان خلبان به صورت یک ورودی چند سینوسی با دامنه‌های مختلف در نظر گرفته شده است. در الگوریتم پیاده‌سازی شده برای سیستم کنترل الکترونیکی سوخت، فرمان خلبان به عنوان مرجع دور موتور در نظر گرفته شده است. با توجه به انتخاب گام زمانی شبیه‌سازی برابر و  $\Delta t = 0.1 \text{ sec}$  و نیز در نظر گرفتن تأخیر زمانی برابر با مقدار ثابت  $\tau = 0.25 \text{ sec}$ ، پیش‌بینی برای ۲۵ گام بعدی ( $j = 25$ ) انجام می‌گیرد. شکل ۱۵ بیانگر عملکرد روش پیش‌بینی بر مبنای مدل در ردیابی سیگنال است. در صورت عدم استفاده از جبران‌کننده تأخیر زمانی، پاسخ سیستم ناپایدار خواهد بود. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که روش پیش‌بینی بر مبنای مدل به خوبی

## پانویس‌ها

1. model in the loop (MIL)
2. software in the loop (SIL)

## منابع (References)

1. Isermann, R., Schaffnit, J. and Sinsel, S. "Hardware-in-the-loop simulation for the design and testing of engine-

control systems", *Control Engineering Practice*, **7**, pp. 643-653 (1999).

2. Cheng, T. "Hardware in the loop simulation of mini type turbojet engine digital control regulator", *Journal of aerospace power*, **19**(3), pp. 383-386 (2004).
3. Cao, Y., Teng, W. and Zhang, H. "Hardware-in-the-loop simulation for engine idle speed control based on AN-FIS", *In Proceedings of 7th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA)*, no. 4593421, pp. 3125-3137. New York: IEEE. 25-27 June (2008).

4. Salehi, A., and Montazeri-Gh, M. "Black box modeling of a turboshaft gas turbine engine fuel control unit based on neural NARX", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part M: Journal of Engineering for the Maritime Environment*, **233**(3), pp.949-956 (2018).
5. Watanabe, S.M., Ölçmen, R. P., Leland, K. W. and et al. "Soft computing applications on a SR-30 turbojet engine", *Fuzzy Sets and Systems*, **157**(22), pp. 3007-3024 (2006).
6. Bao, W., Sui, Y. F. and Liu, Z.M. "Design and realization of hardware-in-the-loop simulation for turbofan engine", *Journal of System Simulation*, **18**(6), pp. 603-615 (2006).
7. Xie, G.H., Meng, L. and Xue, E. "Hardware-in-the-loop simulation of a liquid fuel ramjet engine control system", *Journal of Propulsion Technology*, **22**(6), pp. 451-453 (2001).
8. Duan, C., Xie, S.S. and Cai, K.L. "Hardware-in-the-loop simulation of turbofan aero engine control system", *Journal of Propulsion Technology*, **5**, pp. 434-438 (2005).
9. Montazeri-Gh, M., Nasiri, M. and Jafari, S. "Real-time multi-rate HIL simulation platform for evaluation of a jet engine fuel controller", *Simulation Modelling Practice and Theory*, **19**(3), pp. 996-1006 (2011).
10. Montazeri-Gh, M., Abyaneh, S. and Kazemnejad, S. "Hardware-in-the-loop simulation of two-shaft gas turbine engine's electronic control unit", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, **230** (6) (2016).
11. Gawthrop, P.J., Wagg, D.J. and Neild, S.A. "Bond graph based control and substructuring", *Simulation Modelling Practice and Theory*, **17**(1), pp. 211-227 (2009).
12. Gans, N.R., Dixon, W.E., Lind, R. and et al. "A hardware in the loop simulation platform for vision-based control of unmanned air vehicles", *Mechatronics*, **19**(7), pp. 1043-1056 (2009).
13. Karpenko, M. and Sepehri, N. "Hardware-in-the-loop simulator for research on fault tolerant control of electrohydraulic actuators in a flight control application", *Mechatronics*, **19**(7), pp. 1067-1077 (2009).
14. Bradley, T.H., Moffitt, B.A., Mavris, D.N. and et al. "Hardware-in-the-loop testing of a fuel cell aircraft powerplant", *AIAA Journal of Propulsion and Power*, **25**(6), pp. 1336-1344 (2009).
15. Montazeri-Gh, M. and Nasiri, M. "Hardware-in-the-loop simulation for testing of electro-hydraulic fuel control unit in a jet engine application", *Simulation Modelling Practice and Theory*, **89**(2), pp. 225-233 (2013).
16. Guillo-Sansano, M.H., Syed, A.J., Roscoe, G. M. and et al. "Characterization of time delay in power hardware in the loop setups", *In IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **68**(3), pp. 2703-2713 (2021).
17. Cale, J.L. and et al. "Mitigating communication delays in remotely connected hardware-in-the-loop experiments", *in IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **65**(12), pp. 9739-9748 (2018).
18. De Farias, A.B.C., Rodrigues, R.S., Murilo, A. and et al. "Low-Cost Hardware-in-the-Loop Platform for Embedded Control Strategies Simulation", *in IEEE Access*, **7**, pp. 111499-111512 (2019).
19. Horiuchi, T. and Konno, T. "A new method for compensating actuator delay in real-time hybrid experiment", *Phil Trans R Soc*, **359**, pp. 1893-1909 (2001).
20. Ahmadi-zadeh, M., Mosqueda, G. and Reinhorn, A.M. "Compensation of actuator delay and dynamics for real-time hybrid structural simulation", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **37**(1), pp. 21-42 (2008).
21. Gawthrop, P.J., Virden, D.W., Neild, S.A. and et al. "Emulator-based control for actuator-based hardware-in-the-loop testing", *Control Engineering Practice*, **16**(8), pp. 897-908 (2008).
22. Chen, C. and Ricles, J.M. "Analysis of actuator delay compensation methods for real-time testing", *Engineering Structures*, **31**(11), pp. 2643-2655 (2009).
23. Chen, C. and Ricles, J.M. "Improving the inverse compensation method for real-time hybrid simulation through a dual compensation scheme", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **38**(10), pp. 1237-1255 (2009).
24. Wallace, M.I., Wagg, D.J. and Neild, S.A. "An adaptive polynomial based forward prediction algorithm for multi-actuator real-time dynamic substructuring", *In Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **461**(2064), pp. 3807-3826 (2005).

# بررسی محاسباتی رفتار مکانیکی استنت آلیاژ هوشمند تحت بارگذاری محوری برای کاربرد در عروق محیطی

فردین نعمت‌زاده\* (استادیار)

گروه مهندسی مواد و متالورژی، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه اراک

سید خطیب‌الاسلام صدرنژاد (استاد)

دانشکده مهندسی و علم مواد، دانشگاه صنعتی شریف

مجید سید صالحی (استادیار)

دانشکده مهندسی و علم مواد، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مهندسی مکانیک شریف (بهار ۱۴۰۱)  
دوری ۳-۲۸، شماره ۱، ص. ۱۳-۱۲، (پژوهشی)

استنت از جنس آلیاژ هوشمند می‌تواند با کاهش مشکلاتی نظیر استحکام شعاعی ناکافی و رفتار دینامیکی نامناسب نسبت به سایر استنت‌ها برای استفاده در عروق محیطی به‌کار رود. در این مقاله با استفاده از روش المان محدود رفتار مکانیکی دو نوع استنت از جنس آلیاژ هوشمند با خواص متالورژیکی و مکانیکی متفاوت مورد مطالعه قرار گرفت. ارزیابی استنت‌ها با اعمال کرنش محوری (لهیدگی) مطابق استاندارد انجام شد. مدل ماده‌های مورد استفاده به منظور توصیف خواص ماده استنت از جنس آلیاژهای هوشمند بر اساس انرژی ترمودینامیکی آزاد هلمهولتز و انرژی ترمودینامیکی آزاد گیبس بود. با تغییر دمای پایان آستنتی از ۲۹۳ تا ۳۰۳ درجه کلون (حدود ۱۰ درجه کلون)، اختلاف تنش‌های سطح بالایی و پایینی به میزان ۴۰ مگاپاسکال (معادل حدود ۱۲ درصد) افزایش یافت. نتایج کلی بیانگر رفتار مطلوب مکانیکی و کلینیکی استنت با دمای پایان آستنتی ( $A_f$ ) بالاتر بدلیلی نظیر نیروی مناسب اعمالی به عروق، استحکام مقاومتی شعاعی و حلقه هیستریزیس کامل وابسته به رفتار ابرکشسانی به‌لاوه تنش کمتر و کرنش بیشتر بود. این مطالعه عددی یک راه مناسبی برای بررسی رفتار مکانیکی استنت‌های هوشمند مورد کاربرد در عروق محیطی با توجه به اثرات خواص متالورژیکی و مکانیکی است.

f-nematzadeh@araku.a.ir  
sadrnezh@sharif.ed  
seyedsalehi@kntu.ac.ir

واژگان کلیدی: آلیاژهای حافظه‌دار، استنت، عروق محیطی، روش المان محدود.

## ۱. مقدمه

الزامات اصلی طراحی در ایمپلنت‌های پزشکی، طول عمر دستگاه یا به لحاظ مهندسی، عمر خستگی است.<sup>[۱]</sup> میزان شکستگی خستگی در این شرایط ممکن است برای برخی از استنت‌های هوشمند ۵۰٪ باشد و سبب ایجاد استرس شود.<sup>[۲]</sup> استنت هوشمند باید برای تحمل حداقل ۳۸۰ میلیون چرخه، معادل ۱۰ سال عمر طراحی شود. «حد تحمل خستگی» یکی از الزامات طراحی است که می‌تواند با بهینه‌سازی طراحی و تولید حاصل شود. امروزه رفتار خستگی استنت هوشمند به دلیل کاربردهای پزشکی جدید مورد توجه است. چندین محقق رفتارهای مکانیکی و خستگی خودانبساطی استنت‌های هوشمند را بررسی کرده‌اند. پلتون و همکاران<sup>[۳]</sup> خستگی و مقاومت استنت هوشمند را با مشاهده رفتار زیرمجموعه‌ی بازوهای استنت ۷ شکل، در معرض بارگذاری چرخه‌ی بررسی کردند. این محققین، اثر کرنش متوسط و متغیر را روی عمر خستگی یک استنت هوشمند مطالعه کردند. سپس یک مدل پیش‌بینی عمر خستگی برای مدل‌سازی چندمحوره‌ی استنت هوشمند با استفاده از رویکرد مانسون - کافین تعدیل شده معرفی کردند.<sup>[۴]</sup> کار تحقیقاتی دیگر

استنت‌های هوشمند، معمولاً لوله‌هایی مش‌مانند هستند، که درون بخش عروقی معیوب قرار می‌گیرند، تا جریان خون را برقرار کنند و پس از آنژیوپلاستی عروق را باز نگه دارند. خواص ابرکشسانی آلیاژ هوشمند، خطر آسیب استنت به بدن را کاهش می‌دهد. استنت‌های خودانبساط هوشمند به علت خواص ابرکشسانی، ویژگی‌های فوق‌العاده‌ی ارائه می‌کنند<sup>[۱]</sup> و از این رو کاربرد گسترده‌ی برای درمان انسداد سیستم عروقی دارند. ثابت شده است که استنت‌های هوشمند خودانبساط، میزان دفع عروقی و گرفتگی را در مقایسه با روش آنژیوپلاستی بالون کاهش می‌دهند و جایگزین کمتر تهاجمی در درمان بیماری‌های عروقی محسوب می‌شوند.<sup>[۲]</sup> با این حال، زمانی که استنت‌های هوشمند در معرض بارهای پالستینگ چرخه‌ی طولانی مدت ناشی از ضربان قلب قرار بگیرند، ممکن است دچار شکست خستگی شوند. یکی از

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۴۰۰/۲/۲۵، اصلاحیه ۱۴۰۰/۵/۱۶، پذیرش ۱۴۰۰/۶/۲۷.

DOI:10.24200/J40.2021.58129.1596

مبتنی بر آنالیز المان محدود توسط کلیت استرر و همکاران انجام گرفت<sup>[۶]</sup> تا اثرات کراپینگ، قرارگیری و بارگذاری فشار چرخه‌یی روی عمر خستگی استنت - گرفت بررسی شود. آنها مقاومت خستگی دو ماده‌ی استنت هوشمند و گرفت را مطالعه کردند. همچنین تأثیر یک طراحی استنت کارتوتید روی برهم‌کنش‌های عروق - استنت مطالعه شده است.<sup>[۷]</sup> اخیراً، تأثیر ویژگی‌های هندسی یک استنت هوشمند نیز بررسی شده است؛<sup>[۸]</sup> این ویژگی‌ها بر نیروی خارجی مزمن تأثیرگذارند. محققین چنین اثبات کردند که نیروی خارجی مزمن، بستگی به طراحی استنت و ابعاد پایه دارد. با این که کارگسترده‌یی برای ارزیابی رفتار ساختاری استنت‌های هوشمند خودانبساط صورت گرفته است، باید برای تعیین رفتار خستگی و برهم‌کنش ساختاری این استنت‌ها با دیواره‌ی عروق بررسی‌های بیشتری صورت گیرد. به‌تازگی چندین مقاله در ارتباط با بهینه‌سازی طراحی استنت منتشر شده است.<sup>[۹]</sup> سانجای و همکاران<sup>[۱۰]</sup> یک رویکرد بهینه‌سازی طراحی استنت کروور چندرشته‌یی توسعه دادند. همچنین، نینگ و همکاران<sup>[۱۱]</sup> شکل استنت عروق کروور را بهینه‌سازی کردند که بر مدل پارامتریک مبتنی بود. نعمت‌زاده و همکاران<sup>[۱۲]</sup> از روش اجزاء محدود برای بررسی تأثیر بارگذاری شعاعی و دمای آستینیتی آلیاژ هوشمند بر رفتار مکانیکی استنت عروق فمورال استفاده کردند. تحقیقات آنها نشان داد که دمای پایین آستینیتی آلیاژ هوشمند به دلیل استحکام مکانیکی کم‌شعاع برای بازکردن عروق فمورال، استحکام مکانیکی مقاومت‌کننده‌ی شعاعی زیاد برای بازکردن عروق فمورال و نیز عملکرد ابرکشسانی کامل‌تر، دارای عملکرد مکانیکی و بالینی مناسبی است. وانگ و همکاران<sup>[۱۳]</sup> با استفاده از روش المان محدود و روش بهینه‌سازی پاسخ سطحی پارامترهای هندسی مؤثر بر عملکرد استنت‌های از جنس آلیاژهای حافظه‌دار برای کاربرد در مهره‌های بدن را تعیین کردند و نشان دادند که نیروی مقاومتی شعاعی استنت از طریق استحاله‌ی تبدیل فازی، نقشی کلیدی در این ارتباط بازی می‌کند. با بررسی محاسباتی اثرات ضریب اصطکاک بر تعامل بین استنت نایتینولی و عروق محیطی،<sup>[۱۴]</sup> مشخص شد که افزایش ضریب اصطکاک بین استنت نایتینولی و عروق محیطی به تغییر قابل توجه میزان تنش و کرنش نمی‌انجامد. عملکرد مکانیکی استنت‌های نایتینولی بافته شده توسط زینگ و همکاران ارزیابی شد.<sup>[۱۵]</sup> برای به دست آوردن طرح بهینه‌ی استنت، اثرات زاویه‌ها، قطرهای سیم و پیکربندی‌های بافته شده‌ی سیم‌ها بر عملکرد مکانیکی استنت در حین اتصال، با در نظر گرفتن استحکام مقاومت شعاعی، ارتفاع طولی و عدم تحرک استنت و با استفاده از روش اجزاء محدود مورد مطالعه قرار گرفت. برای در نظر گرفتن میزان انحنای استنت در شبیه‌سازی به روش اجزاء محدود یک شیوه‌ی ابتکاری ارائه شده<sup>[۱۶]</sup> که در آن، با در نظر گرفتن شرایط دقیق مرزی و با اعمال کرنش شعاعی به‌منظور کاهش قطر استنت برای کاربرد کلینیکی استفاده شد. با استفاده از روش المان محدود، بهینه‌سازی شکل استنت‌های آلیاژ منیزیم زیست تخریب‌پذیر (BMGS) بررسی شد<sup>[۱۷]</sup> و دانش جدیدی در ارتباط با نحوه‌ی تأثیر اعوجاج بر رفتار زیست‌مکانیکی استنت‌های فوق را ارائه کردند. بعد از مدل‌سازی محفظه‌ی استنت‌ها در عروق ناسالم با ویژگی‌های واقعی کارکردی،<sup>[۱۸]</sup> نتایج حاصله برای توضیح عملکرد استنت‌ها در مورد اثرات عروق خونی به ویژه فشار زیاد در لایه‌ی عروق، پلاک و آسیب‌های ایجاد شده هنگام مداخله‌ی کلینیکی، مقایسه و نشان داده شد که دلیل اصلی شکستن پلاک در طول قرارگیری استنت و تنگی مجدد استنت است. در حین مراحل ترمیم آنوریسم آنورت و همچنین درون عروق آنورت، کرنش اتصالات، تنش‌هایی و نیروهای تماس در استنت هوشمند ارزیابی شد<sup>[۱۹]</sup> و نیز با استفاده از تماس، جریان خون با حضور استنت مدل‌سازی شد. در بررسی جامع مبتنی بر روش اجزاء محدود، و با در نظر گرفتن پارامترهای ضروری و عملی، عملکرد خستگی استنت ارزیابی شد.<sup>[۲۰]</sup> بر اساس نتایج به دست آمده،

پلاک آنرواسکروتنیک و پیچیدگی فیزیولوژیکی به‌عنوان متغیرهای واقعی به نحوه‌ی محاسبه‌ی چرخه‌ی عمر خستگی استنت اضافه شد. از روش‌های المان محدود به‌منظور محاسبه‌ی نیروهای شعاعی و تعیین عملکرد خستگی یک استنت هوشمند برای عروق آنورت شکمی استفاده شد<sup>[۲۱]</sup> و نیز با استفاده از روش‌های محاسباتی مبتنی بر اجزاء محدود با توجه به ترکیبات استنت، سیستم پیوند عملیاتی برای آنوریسم آنورت شکمی طراحی شد. محققان رفتار حرارتی محیطی و عوامل طراحی مؤثر بر عملکرد استنت - گرفت را با در نظر گرفتن تأثیرات استحکام نیروی شعاعی فلز به دست آوردند.<sup>[۲۲]</sup> پیوند استنت با استفاده از مدل خوک در پیش‌بینی و کنترل و کاهش درد در داخل بدن بسیار مؤثر است. رویکردهای جدید و تاریخی به رویه‌های انجام شده، باعث بهبود سریع جریان خروجی می‌شود که می‌تواند در دوره‌ی نوسازی بالینی مؤثر واقع شود.

با توجه به عدم انجام و ارائه‌ی تحقیقات مدون در ارتباط با نقش خواص متالورژیکی و مکانیکی مواد در عملکرد مکانیکی استنت‌ها، هدف مقاله‌ی حاضر استفاده از روش اجزاء محدود برای بررسی رفتار مکانیکی و کلینیکی یک نوع استنت جدید طراحی شده از جنس آلیاژ هوشمند با خواص متالورژیکی و مکانیکی متفاوت با در نظر گرفتن مدل‌های ماکروسکوپی توصیف خواص مواد نظیر نظریه‌های ترمودینامیکی مبتنی بر انرژی‌های آزاد هلمهولتز و گیبس برای کاربرد در عروق محیطی تحت بارگذاری محوری (لهیدگی) است.

## ۲. تشریح فرایند مدل‌سازی

### ۲.۱. مدل‌های ماکروسکوپی رفتار آلیاژهای هوشمند

اولین مدل مادی برای توصیف رفتار ابرکشسانی آلیاژهای هوشمند، بر اساس مدل ماکروسکوپی آریشیو - تیلور مبتنی بر نظریه‌ی کشسانی - خمیری و بر پایه‌ی انرژی آزاد ترمودینامیکی هلمهولتز است. در این مدل کرنش شامل دو بخش ۱. الاستیک خطی ۲. تغییر حالت (استحاله) است، که به صورت معادله‌ی ۱ نشان داده می‌شود. در این نظریه، تبدیل آستینیت به مارتنزیت بر اساس نیروهای برشی صورت می‌گیرد (معادله‌ی ۲). در این بازه تنش، که در آن این تحول انجام می‌شود (معادله‌ی ۳)، اگر به هر دلیلی تغییر در جهت‌گیری تنش اعمال شود، باعث جهت‌گیری مجدد مارتنزیت شده و اثرات قابل چشم‌پوشی دیگری ایجاد خواهد کرد. هرگونه تغییرات دمایی، باعث تغییر بزرگی در تنش‌های تغییر فاز و تغییر خطی مستقیم می‌شود. به همین دلیل است که تحول در بارگذاری کشش همراه با افزایش حجم است و تنش کمتری نسبت به فشار، به دنبال دارد. پتانسیل انتقال توسط روش خطی مستقیم بارگذاری شده است:

$$\Delta \epsilon = \Delta \epsilon^e + \Delta \epsilon^{tr} \quad (1)$$

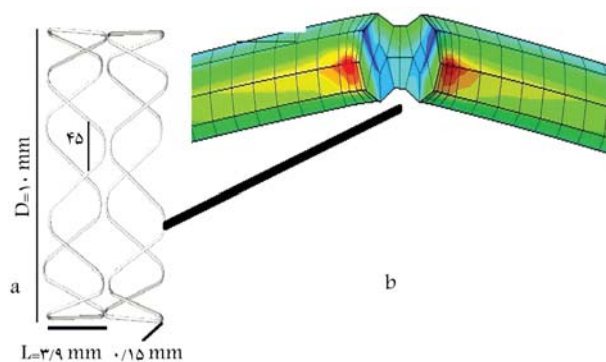
$$\Delta \epsilon^{tr} = \alpha \Delta \zeta \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (2)$$

$$F^s \leq F \leq F^F \quad (3)$$

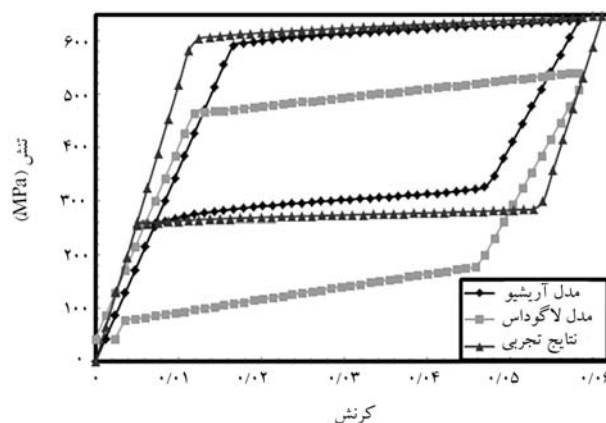
$$F = \bar{\sigma} - P \tan \beta + CT \quad (4)$$

که در آن  $\Delta \epsilon^e$ : کرنش الاستیک،  $\Delta \epsilon^{tr}$ : کرنش تغییر حالت،  $\alpha$ : ضریب کرنش،  $\zeta$ : کسر حجمی مارتنزیت،  $F$ : تابع پتانسیل انتقال (شروع و پایان استحاله)،  $\sigma$ : تنش میانگین میسز،  $P$ : تنش فشاری،  $\beta$ : ثابت ماده،  $C$ : نسبت تنش به دما و  $T$ : دما است.<sup>[۲۹-۳۲]</sup>

دومین مدل مادی برای توصیف رفتار ابرکشسانی آلیاژهای هوشمند، بر اساس مدل ماکروسکوپی لاگوداس مبتنی بر انرژی آزاد ترمودینامیکی گیبس است. در مدل



شکل ۱. مشخصات هندسی استنت طراحی شده و محل مطالعه‌ی مشخص شده‌ی استنت برای باز کردن عروق محیطی.



نمودار ۱. مقایسه‌ی رفتار المانی از آلیاژ هوشمند بر مبنای نتایج تجربی خواص ماده در جدول‌های ۱ تا ۴ [۲۹، ۱۲، ۶] بر مبنای نظریه‌های آریشیو [۳۱، ۳۰] و لاگوداس [۲۹، ۲۳]

## ۳.۲. المان‌بندی، شرایط مرزی و بارگذاری

با توجه به این که استنت‌های در حین کارکرد در بدن دچار خمیدگی، کمانش و تحت فشار به ویژه در جاگذاری آن در عروق محیطی می‌شوند، یکی از آزمایش‌های ارزیابی عملکرد استنت‌ها، آزمایش بارگذاری محوری فشاری (لهیدگی) است. مطابق شکل ۲، برای انجام آزمایش لهیدگی دو صفحه‌ی صلب موازی استنت در جهت

حاضر انرژی آزاد تابعی از تنش، دما، کرنش تبدیل و درصد فاز مارتزیت در نظر گرفته می‌شود (معادله ۵):

$$G(\sigma, T, \varepsilon^t, \zeta^e) = -\frac{1}{\rho} \sigma : S : \sigma - \frac{1}{\rho} \sigma : [\alpha(T - T_0) + \varepsilon^t] + C \left[ (T - T_0) - T \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \right] + U_0 - S^T + f(\zeta^e) \quad (5)$$

که در آن  $\sigma$ ،  $\rho$ ،  $c$ ،  $\alpha$ ،  $s$  و  $u_0$  به ترتیب ماتریس نرمی مؤثر، ماتریس ضرائب انبساط حرارتی مؤثر، دمای ویژه مؤثر، چگالی، آنروپی ویژه مؤثر و انرژی داخلی مؤثر هستند. پارامترهای  $\sigma$ ،  $T$ ،  $T_0$ ،  $\varepsilon^t$ ،  $\zeta^e$  نیز به ترتیب نشان‌دهنده‌ی تانسور تنش کوشی، دما، دمای مینا، کرنش تبدیل و کسر فاز مارتزیت هستند. مقدار  $\zeta^e$  برای فاز آستنیت خالص برابر صفر، برای فاز مارتزیت خالص برابر ۱ و برای حالت تبدیل فاز عددی بین صفر و ۱ است؛ تابع  $f(\zeta^e)$  نیز تابع سختی است [۲۹، ۳۲].

## ۲.۲. طراحی استنت، ارزیابی و اعتبارسنجی نتایج

در این مقاله از نرم‌افزار آباکوس به دلیل دارا بودن مزیت‌هایی چون زیربرنامه‌های متنوع برای تعریف آلیاژ، تنوع حل صریح و استاندارد مسائل، توان محاسباتی در زمینه‌ی کاربردهای پزشکی نظیر استنت و همچنین امکان تعریف مواد به صورت زیربرنامه، نسبت به زبان‌های برنامه‌نویسی ویژوال استودیو و فرترن استفاده شده است. به دلیل وابستگی هندسه‌ی استنت‌ها به ثبت اختراع‌های سخت‌گیرانه، مطابق شکل ۱، یک نمونه‌ی هندسی جدید طراحی شده برای کاربرد در عروق محیطی با نرم‌افزار کتیا و بر اساس کاتالوگ‌ها، مقالات و گزارش‌های کلینیکی تهیه شد. [۶] اعتبارسنجی نتایج تجربی و نظریه‌های به کارگرفته شده بر مبنای کارهای آریشیو و لاگوداس انجام شد. خواص مواد مطابق جدول‌های ۱ تا ۴ به صورت زیربرنامه در نرم‌افزار آباکوس تعریف شد. قبل از انجام آزمایشات، ابتدا یک المان از ماده‌ی آلیاژ هوشمند تحت بارگذاری کششی در نظر گرفته و نتایج حاصله از مدل آریشیو [۳۱، ۳۰] و مدل لاگوداس [۲۹، ۲۳] با نتایج تجربی [۲۹، ۱۲، ۶] مقایسه شد. مطابق نمودار ۱، مدل آریشیو نسبت به مدل لاگوداس تطابق بهتری با نتایج تجربی داشت؛ در نتیجه خواص آلیاژ هوشمند برای استنت به صورت زیربرنامه‌ی مبتنی بر تئوری آریشیو تعریف شد.

جدول ۱. لیست پارامترهای مربوط به خواص ماده‌ی آلیاژ هوشمند ۱، جهت عروق محیطی بر اساس مدل آریشیو. [۳۱-۲۳، ۱۲، ۶]

$A$	$\nu_A$	$E_M$	$\nu_M$	$\varepsilon^L$	$(\frac{\delta \sigma}{\delta T})_L$	$\sigma_L^S$	$\sigma_L^E$
۵۱۷۰۰	۰٫۳	۱۸۵۵۴	۰٫۳	۰٫۰۶۳	۶٫۵۲۷	۶۰۰	۶۷۰
$T_0$	$(\frac{\delta \sigma}{\delta T})_L$	$\sigma_U^S$	$\sigma_U^E$	$\sigma_{CL}^S$	$\varepsilon_V^L$	$\varepsilon_{\max}$	$A_f$
۳۱۰	۶٫۵۲۷	۲۸۸	۲۵۴	۹۰۰	۰٫۰۶۳	۰٫۱۲	۲۹۳

جدول ۲. لیست پارامترهای مربوط به خواص ماده‌ی آلیاژ هوشمند ۲، جهت عروق محیطی بر اساس مدل آریشیو. [۳۱-۲۳، ۱۲، ۶]

$E_A$	$\nu_A$	$E_M$	$\nu_M$	$\varepsilon^L$	$(\frac{\delta \sigma}{\delta T})_L$	$\sigma_L^S$	$\sigma_L^E$
۴۰۰۰۰	۰٫۴۶	۴۷۸۰۰	۰٫۴۶	۰٫۰۴	۶٫۵۲۷	۳۹۰	۴۲۵
$T_0$	$(\frac{\delta \sigma}{\delta T})_U$	$\sigma_U^S$	$\sigma_U^E$	$\sigma_{CL}^S$	$\varepsilon_V^L$	$\varepsilon_{\max}$	$A_f$
۳۱۰	۶٫۵۲۷	۱۴۰	۱۳۵	۵۸۵	۰٫۰۴	۰٫۱۲	۳۰۳

جدول ۳. لیست پارامترهای مربوط به خواص ماده‌ی آلیاژ هوشمند ۱ جهت عروق محیطی بر اساس مدل لاگوداس. [۲۳، ۲۹-۳۲]

$E_A$	$\nu_A$	$E_M$	$\nu_M$	$\rho$	$K_A$	$C_A$	$\alpha_A$
۵۱۷۰۰	۰٫۳	۱۸۵۵۴	۰٫۳	۶۴۵۰	۱۸	۳۲۰	$۱۱ \times ۱۰^{-۶}$
$\alpha_M$	$\rho_{SA}$	$\rho_{SM}$	$M_f$	$M_s$	$A_S$	$A_f$	$T_0$
$۶٫۶ \times ۱۰^{-۶}$	$-۰٫۲۹۴۷ \times ۱۰^{-۶}$	$-۰٫۹۲۸ \times ۱۰^{-۶}$	۲۸۴	۲۸۹	۲۹۱	۲۹۵	۳۱۰

جدول ۴. لیست پارامترهای مربوط به خواص ماده‌ی آلیاژ هوشمند ۲ جهت عروق محیطی بر اساس مدل لاگوداس. [۲۳، ۲۹-۳۲]

$E_A$	$\nu_A$	$E_M$	$\nu_M$	$\rho$	$K_A$	$C_A$	$\alpha_A$
۴۰۰۰۰	۰٫۴۶	۴۷۸۰۰	۰٫۴۶	۶۴۵۰	۱۸	۳۲۰	$۱۱ \times ۱۰^{-۶}$
$\alpha_M$	$\rho_{SA}$	$\rho_{SM}$	$M_f$	$M_s$	$A_S$	$A_f$	$T_0$
$۶٫۶ \times ۱۰^{-۶}$	$۰٫۸۵۱ \times ۱۰^{-۶}$	$-۰٫۴۵۲ \times ۱۰^{-۶}$	۲۳۵	۲۵۰	۲۵۱	۲۸۴	۳۱۰

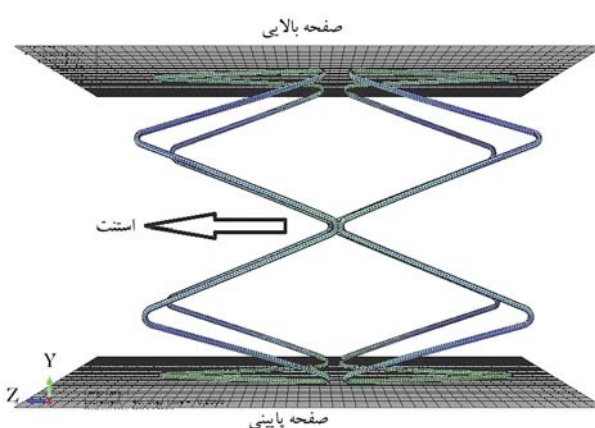
خواهند داشت: حلقه‌ی هیستریزس مکانیکی (ابركشسانی) کامل، استحکام مکانیکی مناسب شعاعی برای باز کردن عروق محیطی COF<sup>۱</sup>، بیشترین استحکام مکانیکی مقاومت‌کننده‌ی شعاعی برای باز کردن عروق محیطی RRF<sup>۲</sup>، کرنش تغییر حالت بالا، تنش کمتر در نقاط بحرانی استنت، کرنش بالا (طول منطقه‌ی تغییر شکل ابرکشان زیاد)، جابه‌جایی بیشینه، تشکیل درصد بالای مارتنزیت در ساختار استنت، عدم قرار گرفتن استنت در محدوده‌ی الاستیک و همچنین در محدوده‌ی ایمن بودن استنت در برابر شکست. [۲۹-۳۲] از طرفی خواص ماده‌ی مورد استفاده در استنت‌های هوشمند با معادلات کلازیوس - کلاپیرون ارتباط دارد (معادله ۶):

$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{\rho \Delta S_{fm}}{\varepsilon_t} = \frac{\rho \Delta H_{fm}}{T_0 \varepsilon_t} \quad (۶)$$

$\sigma$ : سطح تنش،  $\varepsilon_t$ : کرنش استتال،  $\Delta H$ : آنتالپی استتال در واحد حجم،  $\rho$ : چگالی استتال،  $\Delta S$ : تغییرات آنتروپی استتال،  $T_0$ : دمای تعادل استتال و  $f_m$ : درصد کسر حجمی مارتنزیت است. [۱۲]  $\Delta T$  طبق معادله‌ی ۷ محاسبه می‌شود:

$$\Delta T = (T_{reference} - T_{Af}) \quad (۷)$$

که در آن Treference مربوط به دماهای کلینیکی و T<sub>Af</sub> مربوط به دماهای پایان استتال‌ی آستینیتی بوده و به خواص ماده مرتبط است. تقریباً برای ۷ درجه‌ی سانتی‌گراد اختلاف دمای A<sub>f</sub>، حدوداً ۵۰٪ تغییرات در سطح تنش‌های مسطح بالایی و تنش‌های مسطح پایینی در استنت‌های هوشمند قابل مشاهده است. به‌ازای هر ۱ درجه دمای A<sub>f</sub> پایین‌تر، تنش مسطح بالایی و تنش مسطح پایینی در حد ۴ MPa افزایش خواهد یافت. [۱۲] در نمودار ۲ شماتیک نیروهای موجود در هنگام بارگذاری و باربرداری در استنت هوشمند نشان داده شده است. [۲۹، ۱۲] استنت‌های آلیاژ هوشمند طراحی شده برای کاربرد در عروق محیطی در شکل ۱ و با خواص مواد ذکر شده در جدول‌های ۱ تا ۴ مشخص شده است. آزمایش‌های هدیدگی به میزان ۷۰ و ۹۰ درصد به نمونه‌های استنت عروق محیطی مطابق جدول‌های ۵ و ۶ و شکل‌های ۳ تا ۱۰ اعمال شد. مطابق شکل‌های ۳ تا ۶، جدول‌های ۱ تا ۴ و جدول ۵، تنش‌ها و کرنش‌ها برای شروع رفتار ابرکشسانی در ۷۰ درصد هدیدگی کافی نیست. همچنین نتایج مربوط به میزان تشکیل مارتنزیت نیز در جدول ۵، بیان‌گر عدم شروع استتال‌ی مارتنزیتی و در واقع عدم اخذ رفتار ابرکشسانی برای استنت‌های مذکور است. بنابراین استنت‌های طراحی شده، به دلیل عدم ارائه‌ی رفتار ابرکشسانی، برای کاربرد در عروق محیطی مناسب نیستند.



شکل ۲. شماتیک شرایط بارگذاری تست لهیدگی شامل صفحات پایینی، بالایی و استنت.

محور x تحت فشار قرار داده شد. فاصله‌ی بین صفحات فوق متناسب با قطر خارجی استنت‌ها بود. تماس سطح بین صفحات سخت صلب و استنت، انعطاف‌پذیر و بدون اصطکاک برقرار شد. صفحه‌ی صلب پایینی در تمامی جهات بسته شد و صفحه‌ی صلب بالایی فقط در جهت x امکان حرکت داشت. چهارگره از استنت‌ها در جهات z و y بسته شد و فقط در جهت x امکان حرکت داشتند. جابه‌جایی در جهت x و از طریق صفحه‌ی صلب بالایی و به‌میزان ۷۰ و ۹۰ درصد کاهش قطر استنت اعمال و کاملاً باربرداری شد. به‌منظور کاهش زمان محاسبات و با استفاده از فواید تقارن محوری، تنها یک چهارم مدل‌ها مورد تحلیل قرار گرفت. از آلمان مکعبی C3۸DI با تعداد آلمان ۱۲۶۲۴ برای استنت و از آلمان R3D4 با تعداد آلمان ۲۰۰۰۰ برای سطح صفحات صلب فشاردهنده‌ی استنت استفاده شد. به دلیل پیچیدگی زیاد و اندازه‌ی بسیار کوچک استنت‌ها، از نرم‌افزار هایپر مش برای مش زدن نمونه‌ها استفاده شد. دانسیته‌ی مش به‌طور تقریبی ۱۳۰ آلمان و ۱۰۲۵ گره بر میلی‌متر مربع به دست آمد.

### ۳. نتایج و بحث

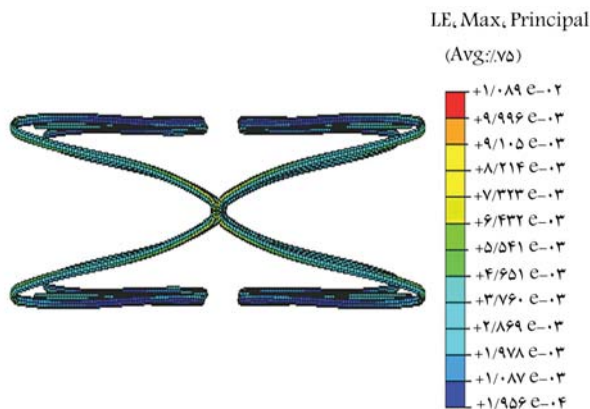
استنت‌های هوشمند با داشتن ویژگی‌های زیر، کاربرد مکانیکی و کلینیکی مطلوبی

جدول ۵. نتایج به دست آمده برای عروق محیطی با تغییر خواص مواد استنت برای ۷۰ درصد لهیدگی.

خواص ماده استنت	تنش فون میس $MPa$	کرنش	درصد مارتزیت تشکیل شده
استنت ماده ۱ (جدول ۱)	۷۷۹٫۵	۰٫۱۰۸	-
استنت ماده ۲ (جدول ۲)	۵۹۳٫۴	۰٫۱۰۷	-

جدول ۶. نتایج به دست آمده برای عروق محیطی با تغییر خواص مواد استنت برای ۹۰ درصد لهیدگی.

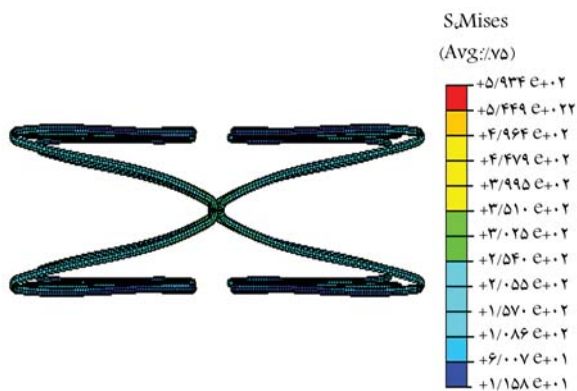
خواص ماده استنت	تنش فون میس $(MPa)$	کرنش	درصد مارتزیت تشکیل شده
استنت هوشمند با خواص ماده ۱	۱۱۲۹	۰٫۱۹۸	۰٫۱۸۸
استنت هوشمند با خواص ماده ۲	۷۵۱٫۴	۰٫۲۱۱	۰٫۳۲۹



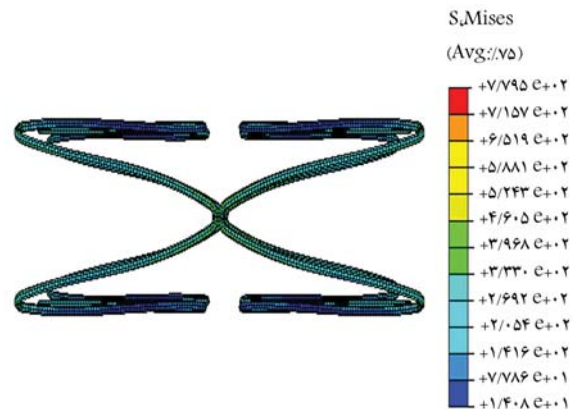
شکل ۴. کرنش به دست آمده ناشی از ۷۰ درصد لهیدگی انجام شده روی نمونه‌های استنت عروق محیطی در شکل ۱ و برای خواص ماده ۱ در جدول ۱.



نمودار ۲. شمایک نیروهای موجود در هنگام بارگذاری و باربرداری استنت هوشمند. [۲۹، ۱۲]



شکل ۵. تنش فون میس به دست آمده ناشی از ۷۰ درصد لهیدگی انجام شده روی نمونه‌های استنت عروق محیطی در شکل ۱ و برای خواص ماده ۲ در جدول ۲.

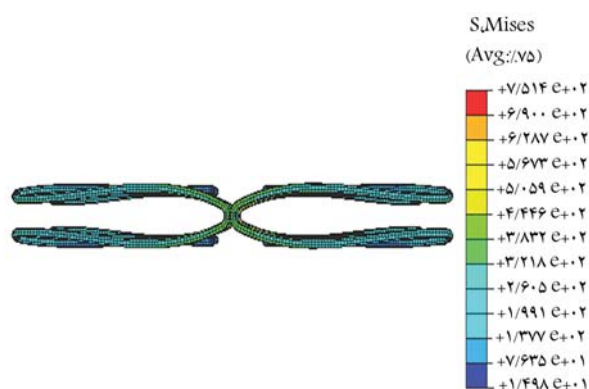


شکل ۳. تنش فون میس به دست آمده ناشی از ۷۰ درصد لهیدگی انجام شده روی نمونه‌های استنت عروق محیطی در شکل ۱ و برای خواص ماده ۱ در جدول ۱.

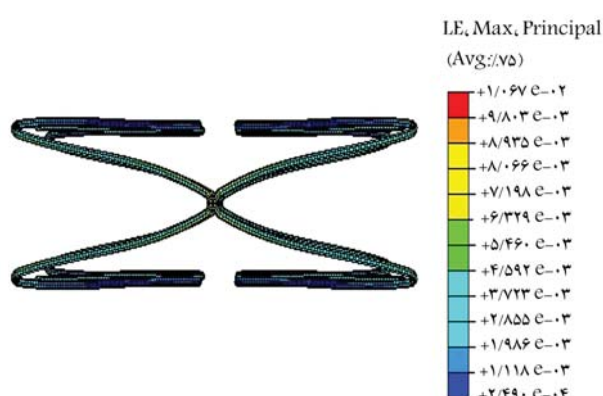
با افزایش درصد لهیدگی از ۷۰ درصد به ۹۰ درصد در نمونه‌های مورد بررسی استنت‌ها، مقایسه‌ی نمونه استنت با خواص ماده ۱ در جدول ۱، جدول ۶ و شکل‌های ۷ و ۸ و نمونه‌ی استنت با خواص ماده ۲ در جدول ۲، جدول ۶ و شکل‌های ۹ و ۱۰ مربوط به توزیع تنش و کرنش در منحنی درونی استنت‌ها بیان‌گر کاهش تنش از ۱۱۲۹  $MPa$  به ۷۵۱٫۴  $MPa$ ، افزایش کرنش از ۰٫۱۹۸ به ۰٫۲۱۱ و افزایش درصد مارتزیت تشکیل شده از ۰٫۱۸۸ به ۰٫۳۲۹ است. نسبت این تغییرات تقریباً ۳۳/۶۲، ۶/۵۶ و ۷۵ درصد است. بیشترین تنش در

منحنی درونی نمونه‌ی استنت با خواص ماده ۱ در جدول ۱ بیشتر از نمونه‌ی استنت با خواص ماده ۲ در جدول ۲ بوده، نمونه‌ی دومی نسبت به اولی به لحاظ مکانیکی (متأثر از تنش کمتر) برای کاربرد در عروق محیطی ترجیح داده می‌شود. کرنش بیشینه در منحنی درونی نمونه‌ی استنت با خواص ماده ۱ در جدول ۱ کمتر از نمونه‌ی استنت با خواص ماده ۲ در جدول ۲ بوده، نمونه‌ی دومی نسبت به اولی به دلیل رفتار دینامیکی مطلوب (متأثر از کرنش بیشتر) با عروق محیطی

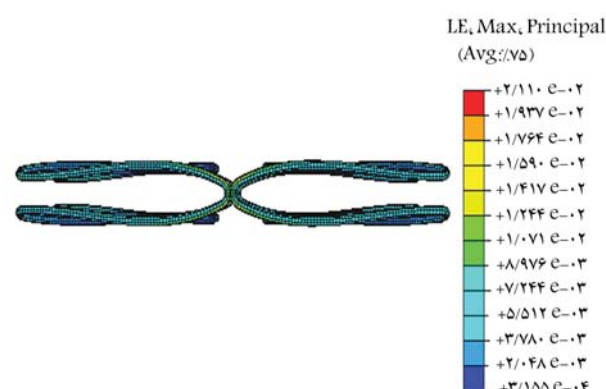




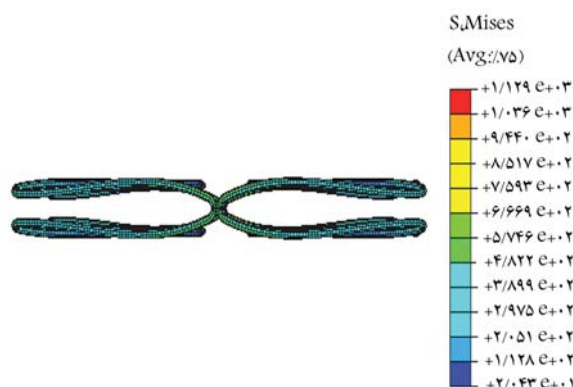
شکل ۹. تنش فون میسس به دست آمده ناشی از ۹۰ درصد لهیدگی انجام شده روی نمونه‌های استنت عروق محیطی در شکل ۱ و برای خواص ماده‌ی ۲ در جدول ۲.



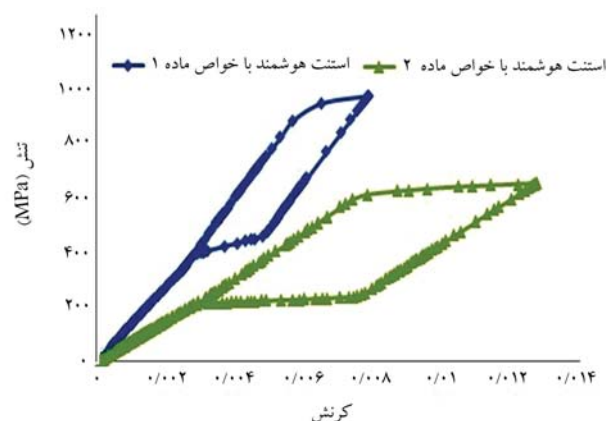
شکل ۶. کرنش به دست آمده ناشی از ۷۰ درصد لهیدگی انجام شده روی نمونه‌های استنت عروق محیطی در شکل ۱ و برای خواص ماده ۲ در جدول ۲.



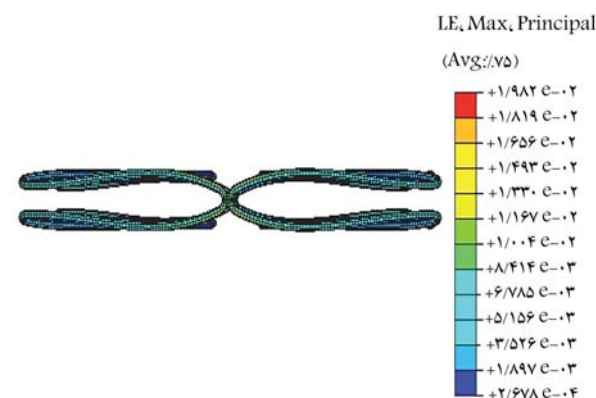
شکل ۱۰. کرنش به دست آمده ناشی از ۹۰ درصد لهیدگی انجام شده روی نمونه‌های استنت عروق محیطی در شکل ۱ و برای خواص ماده‌ی ۲ در جدول ۲.



شکل ۷. تنش فون میسس به دست آمده ناشی از ۹۰ درصد لهیدگی انجام شده روی نمونه‌های استنت عروق محیطی در شکل ۱ و برای خواص ماده‌ی ۱ در جدول ۱.



نمودار ۳. مقایسه‌ی رفتار ابرکشسان ناشی از ۹۰ درصد لهیدگی انجام شده روی نمونه‌های استنت عروق محیطی در شکل ۱ و برای خواص ماده‌ی ۱ در جدول ۱ و خواص ماده‌ی ۲ در جدول ۲.



شکل ۸. کرنش به دست آمده ناشی از ۹۰ درصد لهیدگی انجام شده روی نمونه‌های استنت عروق محیطی در شکل ۱ و برای خواص ماده‌ی ۱ در جدول ۱.

رفتار ابرکشسان ارائه کنند.<sup>[۲۸]</sup> مطابق جدول ۶ و نمودار ۳، هر دو نمونه‌ی استنت رفتار ابرکشسان متأثر از استحاله‌ی مارتنزیت تحت تنش در منحنی تنش و کرنش را ارائه دادند. لذا برای کاربرد در عروق محیطی مناسب‌اند، چرا که با توجه به تأثیرات دمای  $A_f$  آلیاژ استنت هوشمند، هر قدر دمای  $A_f$  پایین‌تر باشد، سطح بارگذاری

ترجیح داده می‌شود. درصد تشکیل مارتنزیت در منحنی درونی نمونه استنت با خواص ماده‌ی ۱ در جدول ۱ کمتر از نمونه‌ی استنت با خواص ماده‌ی ۲ در جدول ۲ بوده، نمونه‌ی دومی نسبت به اولی به دلیل انجام مطلوب استحاله‌ی مارتنزیتی با عروق محیطی ترجیح داده می‌شود. مطابق مطالعات پیشین، استنت‌های نایتینولی باید در منحنی تنش و کرنش مربوطه‌ی ناحیه مارتنزیت تحت تنش برای نشان دادن



نوشتار می‌تواند راهی مناسب برای تعیین رفتار مکانیکی استنت‌های مورد کاربرد در عروق محیطی، با توجه به اثرات خواص متالورژیکی و مکانیکی آنها ارائه کند.

## علائم و اختصارات

$E_A$ : مدول الاستیسیته استنت  $MPa$ ؛

$\nu_A$ : ضریب پواسون استنت؛

$E_M$ : مدول الاستیسیته مارتنزیت  $MPa$ ؛

$\nu_M$ : ضریب پواسون مارتنزیت؛

$\varepsilon^L$ : کرنش تغییرحالت؛

$(\frac{\delta \sigma}{\delta T})_L$ : تغییرات تنش به دما در حال بارگذاری  $MPa T^{-1}$ ؛

$\sigma_L^S$ : شروع تنش تغییرحالت بارگذاری  $MPa$ ؛

$\sigma_L^E$ : پایان تنش تغییرحالت بارگذاری  $MPa$ ؛

$(\frac{\delta \sigma}{\delta T})_U$ : تغییرات تنش به دما در حال باربرداری  $MPa T^{-1}$ ؛

$\sigma_U^S$ : شروع تنش تغییرحالت باربرداری  $MPa$ ؛

$\sigma_U^E$ : پایان تنش تغییرحالت باربرداری  $MPa$ ؛

$\sigma_{CL}^S$ : شروع تنش فشاری تغییرحالت باربرداری  $MPa$ ؛

$\varepsilon_V^L$ : کرنش حجمی تغییرحالت؛

$\varepsilon_{max}$ : کرنش ماکزیم؛

$\rho$ : چگالی  $Kg/m^3$ ؛

$K_A$ : ضریب هدایت حرارتی  $W/(m.K)$ ؛

$C_A$ : ظرفیت گرمایی استنت  $J/(kg.K)$ ؛

$\alpha_A$ : ضریب انبساط حرارتی استنت  $1/K$ ؛

$\alpha_M$ : ضریب انبساط حرارتی مارتنزیت  $1/K$ ؛

$\rho S_A$ : تغییرات تنش به دما در حال بارگذاری در حالت استنتی  $MPa/K$ ؛

$\rho S_M$ : تغییرات تنش به دما در حال بار برداری در حالت مارتنزیتی  $MPa/K$ ؛

$M_f$ : دمای پایان مارتنزیتی  $K$ ؛

$M_s$ : دمای شروع مارتنزیتی  $K$ ؛

$A_s$ : دمای شروع استنتی  $K$ ؛

$A_f$ : دمای پایان استنتی  $K$ ؛

$T$ : دمای مرجع  $K$ ؛

$COF$ : نیروی بیرونی مژمن  $N$ ؛

$RRF$ : نیروی مقاومتی شعاعی  $N$ .

## تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از معاونت محترم پژوهشی دانشگاه اراک به خاطر پشتیبانی از این طرح در قالب طرح پژوهشی تحت عنوان «بهینه‌سازی چند هدفی طراحی استنت» سپاسگزاری می‌کنند.

## پانویس‌ها

1. Chronic Outward Force
2. Radial Resistive Force

و باربرداری تنش در حلقه‌ی هیستریزیس مکانیکی ابرکشسانی بالاتر خواهد رفت (به‌ازای ۱ درجه پایین‌تر دمای  $A_f$  از دمای بدن، تنش بارگذاری و باربرداری در حد  $4 MPa$  افزایش می‌یابد) و هرچه دمای  $A_f$  استنت بالاتر بوده و به دمای بدن نزدیک‌تر باشد، تنش‌های کمتری هم به عروق وارد می‌کند. [۲۴-۲۹، ۳۲] با توجه به خواص مواد استفاده شده در جدول‌های ۱ تا ۴ که به‌ترتیب دمای  $A_f$  آنها  $293 K$  و  $303 K$  است. محدوده‌ی اختلاف تنش‌های سطح بارگذاری و باربرداری حدود  $40 MPa$  است، که با نتایج ارائه شده در نمودار ۳ تطابق مناسبی دارد. علاوه بر آن مطابق استانداردهای ارزیابی استنت‌های ناییتونولی در برابر بارگذاری‌های مکانیکی ایمن هستند، این موضوع با کارهای تحقیقاتی دیگران نیز تطابق دارد. [۲۸، ۳۲] همچنین با توجه به معادلات ۶ و ۷، جدول ۱ و ۲ و نمودار ۳، تغییرات تنش‌های سطح بالایی و پایینی با تغییرات دمایی بین دماهای کلینیکی و دمای پایان استنتی سیم‌های ارتودنسی نیز رابطه‌ی مستقیم دارد و با تغییر ۱۰ درجه‌ی دمای پایان استنتی از  $293 K$  تا  $303 K$  درجه کلون، تنش‌های سطح بالایی و پایینی حدود ۱۲ درصد (معادل حدود  $40 MPa$ ) افزایش به دست آمد. از این جهت نیز استنت هوشمند با خواص ماده ۲ به دلیل سطح بالاتر اختلاف تنش‌های سطح بالایی و پایینی در جهت عملکرد مناسب آنها گزینه مناسبی است.

در نهایت مطابق نمودار ۳ و معیارهای مطلوب کلینیکی و مکانیکی استنت‌ها مطابق استاندارد، استنت هوشمند با خواص ماده ۲ در جدول ۲، چون دارای COF کمتر، RRF نسبتاً بیشتر، کرنش تغییر حالت بالاتر، حلقه هیستریزیس مکانیکی مربوط به خاصیت ابرکشسانی کامل‌تر، تنش کمتر و کرنش بیشینه در منحنی درونی استنت است، عملکرد مکانیکی و کلینیکی بهتری دارد.

## ۴. نتیجه‌گیری

شبیه‌سازی رفتار لهدیگی استنت‌های هوشمند به دلایلی نظیر رفتار کاملاً غیرخطی ماده، هندسه‌ی پیچیده، تغییرشکل زیاد و مشکل تماس، بسیار دشوار است. به دلیل رفتار ابرکشسانی استنت هوشمند، از ایجاد تنش‌های اضافی در لبه به‌هنگام بارگذاری و باربرداری صرف نظر شد. از مدل آریشیو به دلیل تطابق بیشتر با نتایج تجربی نسبت به مدل لاگوداس، استفاده شد. این مدل بر اساس المان محدود غیرخطی سه‌بعدی، توانایی پیش‌بینی رفتارهای مکانیکی و کلینیکی استنت‌های هوشمند برای بازکردن عروق محیطی را دارند. با تغییر دمای پایان استنتی از  $293 K$  تا  $303 K$  درجه‌ی کلون (حدود ۱۰ درجه کلون)، اختلاف تنش‌های سطح بالایی و پایینی حدود ۴۰ مگاپاسکال (معادل حدود ۱۲ درصد) افزایش یافت. به طور کلی استنت هوشمند با دمای استنتی بالا به دلایلی نظیر نیروی بیرونی مژمن (COF) کم، نیروی مقاومتی شعاعی (RRF) زیاد، کرنش بالا، حلقه‌ی کامل هیستریزیس مکانیکی وابسته به رفتار ابرکشسانی و تنش کمتر در منحنی درونی استنت، رفتار مکانیکی مطلوبی را نشان داد. در نظر گرفتن نوع و جنس پلاک تشکیل شده در عروق محیطی به همراه درجه‌ی گرفتگی و انحنا آن، می‌تواند میزان دقت شبیه‌سازی را افزایش دهد. این

## منابع (References)

1. Stoeckel, D. and Pelton, A. "Self-expanding nitinol stents: material and design considerations", *European Radiology*, **14**, pp. 292-301 (2004).

2. Duerig, T. and Wholey, M. A. "comparison of balloon and self-expanding stents", *Minimal InvasTher Allied Technol*, **11**(4) p. 173 (2002).
3. Pelton, A.R., Schroeder, V., Mitchell, M.R. and et al. "Fatigue and durability of Nitinol stents", *Journal Mechanical Behavior Biomedical Material*, **1**(2), pp. 153-164 (2008).
4. Valiboy, A.R., Mwipatayi, B.P. and Sieunarine K. "Fracture of a carotid stent: an unexpected complication", *Social Vascular Surgical*, **45**(3), pp 603-606 (2007).
5. Runciman, A., Xu, D., Pelton, A.R. and et al. "An equivalent strain/coffin-manson approach to multiaxial fatigue and life prediction in superelastic nitinol medical devices", *Biomaterials*, **32**, pp. 4987-4993 (2011).
6. Kleinstreuer, C. and Li, Z. "Computational mechanics of Nitinol stent grafts", *Journal of Biomechanic*, **41**, pp. 2370-2378 (2008).
7. Wu, W. and Qi, M. "Delivery and release of nitinol stent in carotid artery and their interactions: a finite element analysis", *Journal of Biomechanic*, **40**(13), pp. 3034-3040 (2007).
8. Azaouzi, M., Makradi, A. and Belouettar, S. "Deployment of a self-expanding stent inside an artery: a finite element analysis", *Material Design*, **41** pp. 410-420 (2012).
9. Garcia, A., Pena, E. and Martinez, M.A. "Influence of geometrical parameters on radial force during self-expanding stent deployment. application for a variable radial stiffness stent", *Journal Mechanical Behavior Biomedical Material*, **10**, pp. 166-175 (2012).
10. Sanjay, P., Georges, L., Nick, P.C. and et al. "Multiobjective design optimization of coronary stents", *Biomaterials*, **32**, pp. 7755-7773 (2011).
11. Ning, L., Hongwu, Z. and Huajiang, O. "Shape optimization of coronary artery stent based on a parametric model", *Finite Element Analysis Design*, **45** pp. 468-475 (2009).
12. Nematzadeh, F. and Sadrnezhaad, S.K. "Effects of crimping on mechanical performance of nitinol stent designed for femoral artery: finite element analysis", *Journal of Materials Engineering and Performance*, **22**(11), pp. 3228-3236 (2014).
13. Wang, R., Zuo, H., Yang, Y.M. and et al. "Finite element simulation and optimization of radial resistive force for shape memory alloy vertebral body stent", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **28**(15), pp. 2140-2150 (2017).
14. Nematzadeh, F. "Computational evaluation of the impact of friction coefficient on self-expanding stent and peripheral artery during contact", *Journal of Environmental Friendly Materials*, **2**(2), pp. 29-35 (2018).
15. Zheng, Q., Mzafari, H., Li, Z. and et al. "Mechanical characterization of braided self-expanding stents: impact of design parameters", *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, **19**, pp.1-16 (2019).
16. Kumar, G.P., Commillus, A.L. and Cui, F. "A finite element simulation method to evaluate the crimpability of curved stents", *Medical Engineering & Physics*, **4** pp. 162-165 (2019).
17. Chen, C., Chen, J., Wu, W. and et al. "In vivo and in vitro evaluation of a biodegradable magnesium vascular stent designed by shape optimization strategy", *Biomaterials*, **221**, pp.1-30 (2019).
18. Rouhani, F., Fereidoonhezad, B. and Zakerzadeh, A.M.R. "A computational study on vascular damage caused by shape memory alloy self-expandable and balloon-expandable stents in a stenosed artery", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* (2019). DOI: <https://doi.org/10.1177/1045389X19880021>.
19. Jayendirana, R., Nourb, B. and Ruimia. "A Computational analysis of Nitinol stent-graft for endovascular aortic repair (EVAR) of abdominal aortic aneurysm (AAA): crimping, sealing and fluid-structure interaction (FSI)", *International Journal of Cardiology*, (2019). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijcard.2019.11.091>.
20. Lei, L., Qi, X., Li, S. and et al. "Finite element analysis for fatigue behavior of a self-expanding nitinol peripheral stent under physiological biomechanical conditions", *Computers in Biology and Medicine*, **104**, pp. 205-214 (2019).
21. Zhou, X.C., Yang, F., Yan Gong, X. and et al. "New Nitinol endovascular stent-graft system for abdominal aortic aneurysm with finite element analysis and experimental verification", *Rare Metals* (2019). DOI: <https://doi.org/10.1007/s12598-019-01250>.
22. Elsisy, M., Tillman, B., GO, C. and et al. "Comprehensive assessment of mechanical behavior of an extremely long stent graft to control hemorrhage in torso", *Journal of Biomedical Materials Research Part B Applied Biomaterials*, **108**(5), pp.2192-2203 (2020). DOI: <https://doi.org/10.1002/jbm.b.34557>.
23. Masoumi Khalil Abad, E., Pasini, D. and Cerere, R. "Shape optimization of stress concentration-free lattice for self-expandable nitinol stent-grafts", *Journal of Biomechanics*, **45**, pp. 1028-35 (2012).
24. Santillo, M. "Fracture and crack propagation study of a superficial femoral artery nitinol stent", Ms Thesis. University of Pavia, Italy (2008).
25. De Beule, M., Van Cauter, S., Mortier, P. and et al. "Virtual optimization of self-expandable braided wire stents", *Medical Engineering Physics*, **31**, pp. 448-53 (2009).
26. Nuutinen, J.-P., Clerc, C. and Tormala, P. "Theoretical and experimental evaluation of the radial force of self-expanding braided bioabsorbable stents", *Journal of Biomaterials Science Polymre Edition*, **14**(7), pp. 677-687 (2003).
27. Morgan, R. and Adam, A. "Use of metallic stents and balloons in the esophagus and gastrointestinal tract", *Journal Vascular Interventional Radiology*, **12**(3), pp. 283-297 (2001).
28. Petrini, L. and Migliavacca, F. "Computational studies of shape memory alloy behavior in biomedical applications", *Journal Iomechanics Engineering*, **127**(4), pp. 716-725 (2005).
29. Nematzadeh, F. and Sadrnezhaad, S. "Effects of material properties on mechanical performance of nitinol stent designed for femoral artery: finite element analysis", *Scientia. Irnica*, **19**(6), pp. 1564-1571 (2012).

30. Auricchio, F. and Taylor, R. "Shape-memory alloys: modeling and numerical simulations of the finite-strain super elastic behavior", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **143**, pp. 175-194 (1996).
31. Lubliner, J. and Auricchio, F. "Generalized plasticity and shape memory alloy", *International Journal of Solids and Structures*, **33**, pp. 991-1003 (1996).
32. Gong, X. and Duerig, T. "Finite element analysis and experimental evaluation of superelastic Nitinol stents", *In Proceedings of the International Conference on Shape Memory and Superelastic Technology Conference - SMST*, pp. 417-423 (2003).



# تحلیل المان محدود غیرخطی رشد پوست با استفاده از مدل غشای هایپرالاستیک

ناصر فیروزی (دانشجوی دکتری)

فرزام دادگراد\* (دانشیار)

سید رضا فلاحتگر (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان

مهندسی مکانیک شریف، بهار ۱۴۰۱  
دوره ۳-۲، شماره ۱، ص. ۳۳-۳۰ (پژوهشی)

هدف این مقاله فرمول‌بندی و شبیه‌سازی عددی پدیده‌ی رشد در پوست تحت بارگذاری مکانیکی است. ویژگی اصلی و نوآوری تحقیق حاضر آن است که پوست را به عنوان یک غشای دارای انحنای اولیه در نظر می‌گیرد که از معادلات ساختاری مواد هایپرالاستیک تبعیت می‌کند. در ابتدا سینماتیک غشاها تحت تغییر شکل‌های بزرگ فرمول‌بندی شده و تانسورهای اساسی مربوطه معرفی می‌شوند. سپس فرمول‌بندی مکانیک رشد و حالت خاص آن برای غشاها ارائه می‌شود. در ادامه، جهت حل عددی معادلات حاکم، یک فرمول‌بندی المان محدود غیرخطی لاگرانژی کامل توسعه داده می‌شود. در نهایت دو مثال عددی برای رشد و تغییر شکل بزرگ پوست به صورت صفحه‌ی تخت و با سه هندسه‌ی مربعی، دایره‌ای و مستطیلی و همچنین در حالت غیر تخت با انحنای اولیه به صورت یک قطاع استوانه‌ای تحت اعمال فشار خارجی مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرند. با وجود آن که مدل ارائه شده در این مقاله بسیار ساده‌تر از مطالعات پیشین است، اما نتایج حاصل از آن با نتایج موجود در مطالعات پیشین مطابقت می‌کند. همچنین، حجم محاسبات عددی و مقدار فضای حافظه‌ی مورد نیاز به میزان قابل توجهی توسط فرمول‌بندی حاضر کاهش می‌یابد، به طوری که تعداد المان‌های غشای به کار رفته در مدل‌سازی کنونی کم‌تر از ۱/۵ درصد تعداد المان‌های سه‌بعدی است که در تحقیقات پیشین مورد استفاده قرار گرفته است. همچنین، نسبت جرمی حاصل از رشد پوست نیز برای سطح مقطع‌های متفاوت محاسبه می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که جرم پوست حاصل از رشد در مثال‌های در نظر گرفته شده، بیش از سه برابر جرم پوست پیش از رشد است.

واژگان کلیدی: مکانیک رشد، پوست، غشا، هایپرالاستیسیت، المان محدود غیرخطی.

## ۱. مقدمه

غشاهای پلیمری دارد در این است که پوست یک موجود زنده است و رشد می‌کند.

در برخی موارد، بر سطح پوست ضایعه‌های بزرگی ایجاد می‌شود؛ به گونه‌ای که امکان ترمیم آن توسط پوست مجاور زخم فراهم نیست. برای این که باله‌ی پوستی<sup>۱</sup> کافی برای پوشاندن زخم فراهم شود نیاز است که پوست مجاور ضایعه پیش از ترمیم رشد یابد که این کار معمولاً توسط انبساط‌دهنده‌ها<sup>۲</sup> صورت می‌گیرد. انبساط‌دهنده در نزدیکی ضایعه کاشته می‌شود تا امکان رشد پوست را مهیا کند و همچنین پوست رشد یافته از نظر ضخامت، چگالی، رنگ، سختی و خواص دیگر مشابه پوست اطراف باشد.<sup>۳</sup> جنس انبساط‌دهنده‌ها الاستومر سیلیکونی بوده و به طور هفتگی با تزریق محلول نمکی<sup>۴</sup> باد می‌شوند و این عمل به مدت ۶ تا ۸ هفته ادامه می‌یابد. این الاستومرها در اندازه‌ها و شکل‌های گوناگون در دسترس‌اند که از آن جمله می‌توان

پوست یک غشای نازک است که تمام سطح بدن را می‌پوشاند و علاوه بر این که باید به اندازه‌ی کافی محکم باشد تا آسیب نبیند، باید به قدر کافی انعطاف‌پذیر باشد تا مانع از حرکت آزادانه‌ی بدن نشود. پوست پوششی است که از بدن در برابر میکروب‌های مضر و خطرات محیط اطراف و ضربه‌های مکانیکی جلوگیری می‌کند. همچنین بزرگ‌ترین اندام در بدن انسان است که ناحیه‌ی سطحی ۱/۸ تا ۲ متر مربع و ۱۶ درصد از وزن بدن را در بر می‌گیرد. از نظر متابولیکی نیز اندامی فعال با تنوعی از عملکردهای لازم در حفاظت از بدن است.<sup>[۱]</sup> تفاوت منحصر به فردی که پوست با سایر غشاها مانند

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۴۰۰/۳/۲۲، اصلاحیه ۱۴۰۰/۹/۱۳، پذیرش ۱۴۰۱/۱/۲۱.

DOI:10.24200/j40.2022.58307.1599

به هندسه‌های مستطیلی، دایره‌ای، مربعی و هلالی<sup>۴</sup> اشاره کرد.<sup>[۲]</sup> چرخه‌ی باد کردن انبساط‌دهنده، رشد و آرمیدگی<sup>۵</sup> بارها تکرار می‌شود تا پوست در حد مطلوبی رشد یابد. از این فرایند در جراحی ترمیمی<sup>۶</sup> استفاده می‌شود. نیومن<sup>[۵]</sup> برای اولین بار بسط پوست را برای ترمیم نقص موجود در گوش انجام داد و از یک بالون لاستیکی برای این کار استفاده کرد. انبساط یافت در ابتدا بیشتر برای ترمیم سر و چانه به کار می‌رفت، اما امروزه تقریباً برای ترمیم تمامی قسمت‌های بدن مورد استفاده قرار می‌گیرد.<sup>[۶]</sup>

در تحقیقی که در سال ۱۹۸۹ توسط بیوجنه و همکاران<sup>[۲]</sup> انجام شد، آزمایشی روی ۲۴ حیوان صورت گرفت. آنها به مدت ۳۲ روز پوست این جانوران را بسط دادند. نتایج به دست آمده نشان داد که کشش پوست در زمان باد شدن به شدت افزایش می‌یابد اما در پایان ۳۲ روز به مقادیر عادی کاهش یافته و ضخامت پوست که در ابتدا کاهش یافته بود، به حد عادی خود در انتهای آزمایش برمی‌گردد. در آزمایشی که توسط محققین<sup>[۷]</sup> انجام شد، آزمون برش خالص<sup>۷</sup> برای نمونه‌های بافت پوست خوک در ضخامت‌های مشخص بوده است. ژائو و همکاران<sup>[۸]</sup> به بررسی چروک روی پوست با توجه به افزایش سن پرداختند. این محققین با استفاده از مدل‌سازی سه‌بعدی المان محدود از پوست جوان و پیر به عنوان ماده‌ی کامپوزیتی از دو تا شش لایه‌ی مجزا، تأثیر سن روی پوست را تحلیل کردند. تونگه و همکاران<sup>[۹]</sup> آزمایش اعمال فشار روی پوست انسان را انجام دادند و از این آزمون برای اندازه‌گیری خواص ناهمسانگرد غیرخطی پوست انسان استفاده کردند. در مطالعه‌ی که توسط اسمالز و همکاران<sup>[۱۰]</sup> انجام شد، اثر ضخامت، ترکیب بافت و سن در خواص زیست‌مکانیکی پوست در سه بخش بدن تعیین شده است. این متغیرها، در قسمت کتف، ران و ساق ۳۰ فرد مختلف تعیین شده است. نتایج به دست آمده نشان داد که ضخامت پوست در سختی، جذب انرژی و الاستیسیته‌ی زیست‌شناختی در کتف اثرگذار است. در مقاله‌ی پایلر - متی و همکاران<sup>[۱۱]</sup> خواص مکانیکی ویسکوالاستیک پوست مصنوعی با استفاده از آزمایش نفوذ بار - آرمیدگی تعیین شد. همچنین، عفونت محل جراحی یکی از نکات مهمی است که توسط سجادی و همکاران<sup>[۱۲]</sup> مورد بررسی قرار گرفت و در آن از پوست یا زخم‌های پوستی به عنوان عاملی مهم در این نوع عفونت ذکر شد. در ادامه، سجادی و همکاران<sup>[۱۳]</sup> هوای اطراف زخم‌های پوستی و ارتباط آن با عفونت‌های محل جراحی را شبیه‌سازی کردند. کوماراسوامی و همکاران<sup>[۱۴]</sup> مدل ساختاری مناسب برای پوست و تعیین خواص جامع پوست را که مستقل از تغییرپذیری نوع بیمار باشد تعیین و کالیبره کردند. در تحقیقی که توسط باربارینو و همکاران<sup>[۱۵]</sup> انجام شد، تلاش بر این بوده که تعیین مشخصات مکانیکی در محیط زنده از بافت‌های سطحی چهره بهبود یابد. افسرکازرونی و همکاران<sup>[۱۶]</sup> رفتار ویسکوالاستیک پوست در بارگذاری تناوبی را مطالعه کردند. آنها مدل ویسکوالاستیک ارائه شده را با نتایج آزمایشگاهی انجام شده بر پوست موش و خوک مقایسه کردند. نتایج بیانگر آن است که مدل ارائه شده می‌تواند به خوبی بارگذاری، باربرداری و نیز بارگذاری مجدد روی پوست ویسکوالاستیک را مدل‌سازی کند. در تحقیقی که توسط جوبانپوترا و همکاران<sup>[۱۷]</sup> انجام گرفت، اثر سن بر خواص لمسی پوست مورد بررسی قرار گرفت. محققان برای این منظور، پوست را به صورت ماده‌ی چهارلایه‌ی هاپیرالاستیک مدل کرده و اثرکشیده شدن پوست روی یک سطح صلب را با استفاده از نرم‌افزار آباکوس مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. فلین و همکاران<sup>[۱۸]</sup> توانایی تابع انرژی آگدن<sup>۸</sup> با ویسکوالاستیسیته و تنش اولیه‌ی ناهمسانگرد در مدل‌سازی رفتار پوست انسان را مورد مطالعه قرار دادند. مقایسه‌ی رفتار پوست انسان و موش در قالب یک مدل هاپیرالاستیک ناهمسانگرد توسط گراوس و همکاران<sup>[۱۹]</sup> ارائه شد. در مطالعه‌ی پامپلونا و همکاران<sup>[۲۰]</sup> بافت پوست بدون در نظر گرفتن رشد، انبساط یافت.

از نرم‌افزار آباکوس برای تعیین پارامترهای معادله‌ی ساختاری الاستیک نمایی دلفینو و همکاران<sup>[۲۱]</sup> استفاده شده است. رماچه و همکاران<sup>[۲۲]</sup> اثرات کشش پی‌درپی و نیز آزمون‌های تنش - آرمیدگی را بر خواص مکانیکی پوست خوک مورد مطالعه قرار دادند.

سوکي و همکاران<sup>[۲۳]</sup> در مقاله‌ی خود، نخستین تحقیق غیرتجربی در مورد رشد پوست را ارائه دادند و رشد پوست با سطح مقطع دایره‌ای را به صورت متقارن محوری در نظر گرفتند. در تحقیقی که توسط تپوله و همکاران<sup>[۲۴]</sup> انجام شد، مدل ایزوتروپیک عرضی<sup>۹</sup> بر مبنای میکروساختار را که توسط آرودا و بويس<sup>[۲۵]</sup> برای مواد پلیمری پیشنهاد شده بود، در رشد پوست مورد استفاده قرار دادند. آنها از این مدل برای رشد حاصل از کاشت انبساط‌دهنده با هندسه‌های مختلف در زیر پوست در نرم‌افزار تجاری آباکوس استفاده کردند. در تحقیقی که توسط زولنرو همکاران<sup>[۲۶]</sup> انجام شد، با استفاده از تابع انرژی تئوهوکن<sup>۱۰</sup> تراکم‌پذیر، مدل‌سازی رشد در سه بخش شامل پوست سر، پیشانی و چانه صورت گرفت. در مدلی که زولنرو و همکاران<sup>[۲۷]</sup> برای رشد پوست سر ارائه دادند، از تابع انرژی تراکم‌پذیر تئوهوکن استفاده شده است. تپوله و همکاران<sup>[۲۸]</sup> در مطالعه‌ی رشد پوست، با استفاده از مدل هاپیرالاستیک ایزوتروپیک عرضی<sup>[۲۷]</sup>، مدلی برای بافت مردگی<sup>۱۱</sup> در جراحی پلاستیک ارائه کردند.

مطالعه‌ی مقالات گذشته نشان می‌دهد که برای مدل‌سازی رشد پوست، در تمامی موارد از مدل‌های سه‌بعدی و المان‌های محدود سه‌بعدی استفاده شده است. همچنین، تمامی شبیه‌سازی‌های در نرم‌افزارهای تجاری مانند آباکوس انجام شده است. هدف این مقاله، مدل‌سازی تغییرشکل‌های بزرگ پوست با استفاده از المان‌های دوبعدی غشا و با در نظر گرفتن اثرات رشد است. این المان‌ها به مراتب از المان‌های سه‌بعدی ساده‌تر است و حجم محاسباتی کم‌تری می‌طلبند. همچنین در این تحقیق نشان داده خواهد شد که کارایی آنها به خوبی المان‌های سه‌بعدی است.

در ادامه‌ی این مقاله، در بخش دوم سینماتیک تغییرشکل‌های بزرگ غشاها ارائه می‌شود. در بخش سوم، فرمول‌بندی رشد بیان شده و معادلات ساختاری حاکم بر تغییرشکل‌های بزرگ غشاها با در نظر گرفتن تأثیر پدیده‌ی رشد بیان می‌شوند. در بخش چهارم، فرمول‌بندی المان محدود غیرخطی برای حل عددی معادلات حاکم ارائه می‌شود. در بخش پنجم، به منظور اعتبارسنجی و بررسی عملکرد فرمول‌بندی ارائه شده، تغییرشکل و رشد پوست با سه هندسه‌ی متفاوت مورد بررسی قرار می‌گیرد و نتایج به دست آمده با مطالعات پیشین مقایسه می‌شود.

## ۲. سینماتیک تغییرشکل‌های بزرگ یک غشا

در این بخش، کمیت‌های سینماتیکی اساسی که تغییرشکل‌های بزرگ غشاها را در فضای سه‌بعدی را توصیف می‌کنند ارائه می‌شود. چنان‌که در شکل ۱ نشان داده شده، یک دستگاه مختصات کارتزین<sup>۱۲</sup>  $\{x_1, x_2, x_3\}$  با بردارهای پایه‌ی یک‌ه‌ی متعامد<sup>۱۳</sup>  $\{e_1, e_2, e_3\}$  در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود که  $\Omega$  یک غشای نازک دارای انحنا قبل از تغییر شکل باشد. همچنین  $S$  به عنوان صفحه‌ی میانی<sup>۱۴</sup>  $\Omega$  معرفی می‌شود. در ادامه، یک دستگاه مختصات منحنی الخط<sup>۱۵</sup>  $\{z^1, z^2, z^3\}$  در هر نقطه از سطح میانی در نظر گرفته می‌شود. غشای  $\Omega$  بعد از تغییرشکل به غشای  $\Omega$  در فضای سه‌بعدی تبدیل می‌شود. مکان یک نقطه‌ی دلخواه واقع بر سطح میانی غشا در قبل و بعد از تغییرشکل مطابق روابط ۱ و ۲ قابل نمایش هستند:

$$\mathbf{X}(z^1, z^2, z^3) = \mathbf{R}(z^1, z^2) + z^3 \mathbf{n}_0(z^1, z^2) \quad (1)$$

$$\mathbf{x}(\vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3) = \mathbf{r}(\vartheta^1, \vartheta^2) + \vartheta^3 \lambda_3 \mathbf{n}(\vartheta^1, \vartheta^2) \quad (2)$$

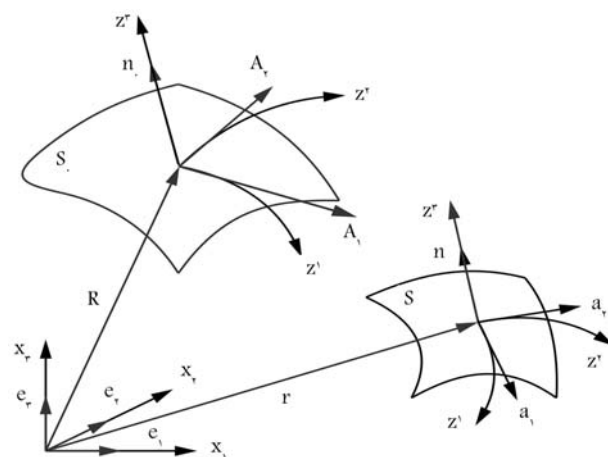
همچنین، مشتق جزئی ناورداهای اصلی  $I_A$  ( $A = 1, 2, 3$ ) و دترمینان ژاکوبین  $J = \sqrt{\det \mathbf{C}}$  نسبت به تانسور  $\mathbf{C}$  عبارت خواهد بود از [۲۸]:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr} \mathbf{C}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \left\{ (\text{tr} \mathbf{C})^2 - \text{tr} \mathbf{C}^2 \right\}, \\ I_3 &= J^2 = \det \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن  $\mathbf{I}$  تانسور همانی در فضای سه بعدی است. به علاوه، تانسور کرنش گرین-سن ونان  $\mathbf{E}^g$  و مؤلفه های غیرصفر آن به شکل زیر قابل محاسبه هستند:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}), \\ E_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (C_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}), \quad E_{rr} = \frac{1}{2} (\lambda_r^2 - 1) \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن اندیس های  $\alpha$  و  $\beta$  فقط مقادیر ۱ و ۲ را به خود می گیرند. همچنین  $\delta_{\alpha\beta}$  نیز بیانگر مؤلفه های دلتای کرونگر  $\delta_{ij}$  در فضای دوبعدی هستند.



شکل ۱. هندسه ی غشا و دستگاه های مختصات مختلف.

در این روابط  $\mathbf{r}$  و  $\mathbf{R}$  بردارهای مکان به ترتیب در پیکربندی مرجع و پیکربندی کنونی است. همچنین،  $\mathbf{n}$  و  $\mathbf{n}'$  بردارهای عمود بر غشا در فضای پیش و پس از تغییرشکل هستند که چنین محاسبه می شوند:

$$\mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|} \quad (3)$$

$\mathbf{a}_i$  و  $\mathbf{A}_i$  بردارهای پایه ی هموردا<sup>۱۶</sup> روی صفحه ی میانی به ترتیب در پیکربندی اولیه و کنونی بوده و از روابط ۴ قابل محاسبه اند:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\alpha &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial R_i}{\partial z^\alpha} \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3, \alpha = 1, 2) \\ \mathbf{a}_\alpha &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial r_i}{\partial z^\alpha} \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3, \alpha = 1, 2) \end{aligned} \quad (4)$$

در نهایت، کشیدگی<sup>۱۷</sup> در راستای ضخامت ( $\lambda_3$ ) و نیز بردار جابه جایی  $\mathbf{u}$  تعریف می شوند:

$$\lambda_3 = \frac{h}{h_0}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{R} \quad (5)$$

تانسور گرادیان تغییرشکل<sup>۱۸</sup> روی صفحه میانی از رابطه ی ۶ به دست می آید:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 + u_{1,1} & u_{1,2} & \lambda_3 n_1 \\ u_{2,1} & 1 + u_{2,2} & \lambda_3 n_2 \\ u_{3,1} & u_{3,2} & \lambda_3 n_3 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

نمایش ماتریسی تانسور راست کوشی-گرین در فضای سه بعدی و با در نظر گرفتن تغییرضخامت غشا به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix}, \quad C_{33} = \lambda_3^2. \quad (7)$$

به طور کلی، هر تانسور مثبت معین متقارن  $\mathbf{C}$  دارای سه مقدار ویژه ی مثبت  $\lambda_A$  ( $A = 1, 2, 3$ ) و سه ناوردای اصلی  $I_A$  ( $A = 1, 2, 3$ ) است. سه ناوردای اصلی تانسور  $\mathbf{C}$  چنین تعریف می شوند [۲۸]:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr} \mathbf{C}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \left\{ (\text{tr} \mathbf{C})^2 - \text{tr} \mathbf{C}^2 \right\}, \\ I_3 &= J^2 = \det \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (8)$$

### ۳. فرمول بندی رشد پوست تحت بارگذاری مکانیکی

در این قسمت، ابتدا مبانی فرمول بندی رشد تحت اعمال بارمکانیکی شرح داده می شود و سپس شکل خاص آن برای مسئله ی رشد غشا مورد استفاده قرار می گیرد. اساس نظریه ی رشد در فضای سه بعدی، تجزیه ی ضربی<sup>۲۲</sup> گرادیان تغییرشکل است که چنین بیان می شود: [۲۹، ۳۰]

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^g \quad (11)$$

که در آن تانسور گرادیان تغییرشکل به یک بخش الاستیک برگشت پذیر  $\mathbf{F}^e$  و به یک بخش رشد برگشت ناپذیر  $\mathbf{F}^g$  تجزیه شده است. اگر  $dV$  و  $dV_0$  حجم اولیه و حجم بعد از تغییرشکل یک المان کوچک باشند، آنگاه ژاکوبین کلی تغییرشکل از رابطه ی ۱۲ به دست می آید:

$$J = \frac{dV}{dV_0} = \det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}^e \mathbf{F}^g) = J^e J^g \quad (12)$$

که به نوبه ی خود به قسمت نسبت حجم برگشت پذیر  $J^e = \det(\mathbf{F}^e)$  و نسبت حجم برگشت ناپذیر  $J^g = \det(\mathbf{F}^g)$  تجزیه می شود. حال فرض می شود که  $\mathbf{n}_0$  بردار یکه ی عمود بر صفحه ی پوست قبل از تغییرشکل باشد. معمولاً فرض می شود که پاسخ پوست در راستای ضخامت  $\mathbf{n}_0$  کاملاً الاستیک است. بر این اساس، می توان تانسور رشد  $\mathbf{F}^g$  را به شکل ساده زیر با نمایش ماتریسی  $3 \times 3$  در نظر گرفت: [۲]

$$\mathbf{F}^g = \sqrt{\vartheta^g} (\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{A}_2) + \mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{n}_0. \quad (13)$$

حال با توجه به رابطه ی  $J^g = \det(\mathbf{F}^g) = (\sqrt{\vartheta^g})^2$ ، تساوی  $J^g = \vartheta^g$  برقرار خواهد بود. بر اساس رابطه ی فوق، مدل سازی رشد پوست ناشی از بارگذاری مکانیکی، توسط تعیین متغیر اسکالر  $\vartheta^g$  امکان پذیر خواهد بود که رشد سطحی پوست را توصیف می کند. مقدار کشیدگی سطحی<sup>۲۳</sup>، یعنی نسبت سطح تغییرشکل یافته به سطح اولیه، توسط فرمول نلسون<sup>۲۴</sup> [۳۱] و نیز با کمک گرفتن از روابط ۱۲ و ۱۳ قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{dA}{dA_0} = \left\| J (\mathbf{F}^e)^{-T} (\mathbf{F}^g)^{-T} \mathbf{n}_0 \right\| \\ &= \left\| J^e (\mathbf{F}^e)^{-T} \mathbf{n}_0 \right\|, \quad \vartheta^g = \vartheta^e \vartheta^g \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن  $\|\cdot\|$  نماد اندازه و همچنین  $dA$  و  $dA$  اندازه‌ی مساحت یک المان سطحی کوچک به ترتیب در قبل و بعد از تغییر شکل هستند. همچنین  $\vartheta^e = \|\mathbf{J}^e (\mathbf{F}^e)^{-T} \mathbf{n}_e\|$  قسمت الاستیک تغییر سطح است. فرمول فوق نشان می‌دهد که کشیدگی سطحی نیز از تجزیه ضریبی پیروی کرده و به دو بخش کشیدگی سطحی الاستیک برگشت پذیر  $\vartheta^e$  و کشیدگی سطح رشد یافته برگشت ناپذیر  $\vartheta^g$  قابل تجزیه خواهد بود.

نکته‌ی دیگری که باید بدان توجه داشت آن است که پدیده‌ی رشد با افزایش جرم همراه خواهد بود. اگر  $dM$  جرم اولیه‌ی یک المان دیفرانسیلی با حجم  $dV$  و چگالی  $\rho$  باشد، جرم آن در زمان  $t$  برابر با  $dm$  خواهد شد. رابطه‌ی بین  $dM$  و  $dm$  عبارت است از: [۳۰]

$$dm = dM + \int_V r_g^g dt dV. \quad (15)$$

که در آن پارامتر اسکالر  $r_g^g$  بیانگر نرخ نفوذ جرم بر واحد حجم اولیه به جسم در حال رشد است که از رابطه‌ی ۱۶ به دست می‌آید:

$$r_g^g = \rho_e \det(\mathbf{F}^g) \text{tr}(\mathbf{L}^g), \quad \mathbf{L}^g = \dot{\mathbf{F}}^g (\mathbf{F}^g)^{-1} \quad (16)$$

با توجه به رابطه‌ی ۱۳، تانسور گرادیان سرعت رشد از رابطه‌ی ۱۷ قابل محاسبه خواهد بود:

$$\mathbf{L}^g = \frac{\dot{\vartheta}^g}{\vartheta^g} (\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{A}_2) \quad (17)$$

لذا با مشخص شدن  $\dot{\vartheta}^g$  در روابط بعدی، مقدار  $r_g^g$  از رابطه‌ی ۱۶ قابل محاسبه خواهد بود که از آن مقدار  $dm$  به دست می‌آید. در علم مکانیک رشد، معمولاً رشد به صورت فرایندی در نظر گرفته می‌شود که بر اساس اعمال کرنش یا اعمال تنش قابل فرمول بندی است. در فرمول بندی بر اساس اعمال کرنش، معادله‌ی نرخ تغییرات رشد سطحی که به آن معادله‌ی تکاملی [۲۵] اطلاق می‌شود به صورت زیر است [۳۰]:

$$\dot{\vartheta}^g = k^g(\vartheta^g) \phi^g(\vartheta^e) \quad (18)$$

و در آن  $k^g(\vartheta^g)$  تابع وزن [۲۶] و  $\phi^g(\vartheta^g)$  تابع معیار رشد [۲۷] مشابه تابع تسلیم در نظریه‌ی پلاستیسیته است. برای تابع وزن، معمولاً رابطه‌ی ۱۹ پیشنهاد می‌شود که مقدار رشد بیشینه را کنترل می‌کند [۳۰]:

$$k^g = \frac{1}{\tau} \left( \frac{\vartheta^{\max} - \vartheta^g}{\vartheta^{\max} - 1} \right)^\gamma \quad (19)$$

در رابطه‌ی ۱۹، سرعت انطباق  $\tau$  و پارامتر شکل برای منحنی انطباق  $\gamma$ ، سرعت سازگاری و مطابقت را کنترل می‌کنند. همچنین رشد سطحی بیشینه  $\vartheta^{max}$  حالت تعادل زیست‌شناختی را تعریف می‌کند. برای معیار رشد، فرض می‌شود که رشد توسط کشیدگی سطحی الاستیک  $\vartheta^e$  تحریک شود:

$$\phi^g = \max\{0, \vartheta^e - \vartheta^{crit}\} \quad (20)$$

$\vartheta^{crit}$  مقداری از کشیدگی سطحی است که به ازای آن فرایند رشد آغاز می‌شود. در گام بعد، تابع چگالی انرژی کرنشی چنین در نظر گرفته می‌شود [۲۵]:

$$\Psi = \Psi(\mathbf{C}, \mathbf{F}^g) \quad (21)$$

در این صورت مقدار تنش دوم پیولا - کرشف [۲۹] از رابطه‌ی ۲۲ به دست خواهد آمد [۳]:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}_e} : \frac{\partial \mathbf{C}_e}{\partial \mathbf{C}} = (\mathbf{F}^g)^{-1} \mathbf{S}^e (\mathbf{F}^g)^{-T} \quad (22)$$

که در آن: نماد استاندارد ضرب داخلی دوگانه [۳۰] است. تابع انرژی کرنشی نتوهوگین تراکم پذیر در مقاله‌ی حاضر مطابق رابطه‌ی ۲۳ در نظر گرفته می‌شود [۲۸]:

$$\Psi = \frac{\mu}{\nu} \left( \mathbf{J}^{e-\nu/\nu} \mathbf{C}^e : \mathbf{I} - 3 \right) + \frac{1}{D_1} (J^e - 1)^2 \quad (23)$$

که در آن،  $\mu$  مدول برشی بوده و رابطه‌ی  $D_1 = E/\nu(1 - \nu)$  برقرار است. بدیهی است که  $E$  و  $\nu$  نیز به ترتیب مدول یانگ [۳۱] و نسبت پواسون [۳۲] هستند. در این حالت تانسور تنش دوم پیولا - کرشف ناشی از تغییر شکل الاستیک غشا به صورت زیر خواهد شد:

$$\mathbf{S}^e = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}_e} = \mu J^{e-\nu/\nu} \mathbf{I} + \left[ \frac{-\mu}{\nu} J^{e-\nu/\nu} I_1^e + \frac{2}{D_1} J^e (J^e - 1) \right] \mathbf{C}^{e-1} \quad (24)$$

با مشتق‌گیری از تانسور تنش  $\mathbf{S}^e$  نسبت به تانسور تغییر شکل راست کوشی - گرین الاستیک  $\mathbf{C}^e$ ، عبارت مربوط به تانسور مرتبه‌ی چهار الاستیک  $\mathbf{C}^e$  چنین به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^e = 2 \frac{\partial \mathbf{S}^e}{\partial \mathbf{C}_e} = & -\frac{2}{\nu} \mu J^{e-\nu/\nu} \left( \mathbf{I} \otimes \mathbf{C}^{e-1} + \mathbf{C}^{e-1} \otimes \mathbf{I} \right) \\ & + \left[ \frac{2}{\nu} \mu J^{e-\nu/\nu} I_1^e + \frac{2}{D_1} J^e (2J^e - 1) \right] \\ & \times (\mathbf{C}^{e-1} \otimes \mathbf{C}^{e-1}) + (\mathbf{C}^{e-1} \odot \mathbf{C}^{e-1}) \times \\ & \left[ \frac{\mu}{\nu} J^{e-\nu/\nu} I_1^e - \frac{2}{D_1} J^e (J^e - 1) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

در رابطه‌ی ۲۵ عبارت  $\mathbf{C}^{e-1} \odot \mathbf{C}^{e-1}$  مشاهده می‌شود که نیازمند توضیح بیشتر در خصوص ضرب تانسوری  $\odot$  است. در این راستا، اگر  $\tilde{\mathbf{A}}$  و  $\tilde{\mathbf{B}}$  دو تانسور مرتبه‌ی دوم باشند، ضرب تانسوری  $\tilde{\mathbf{A}} \odot \tilde{\mathbf{B}}$  به صورت رابطه‌ی ۲۶ تعریف می‌شود:

$$(\tilde{\mathbf{A}} \odot \tilde{\mathbf{B}})_{ijkl} = \tilde{A}_{ik} \tilde{B}_{jl} + \tilde{A}_{il} \tilde{B}_{jk} \quad (26)$$

که در آن  $\tilde{A}_{ik}$  و  $\tilde{B}_{jl}$  بیانگر مؤلفه‌های دو تانسور  $\tilde{\mathbf{A}}$  و  $\tilde{\mathbf{B}}$  هستند. همچنین، تانسور تنش پیولا - کرشف دوم کل از انتقال تنش  $\mathbf{S}^e$  روی جسم تغییر شکل نیافته از رابطه‌ی ۲۲ به دست می‌آید. لذا تانسور مرتبه چهار کل به شکل تقریبی زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$\mathbf{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} \approx (\mathbf{F}^g)^{-1} \mathbf{C}^e (\mathbf{F}^g)^{-T} \quad (27)$$

توجه شود که تانسور مرتبه چهار  $\mathbf{C}$  به  $\mathbf{F}^{g-1}$  و لذا به متغیر رشد  $\vartheta^g$  وابسته است که باید از حل معادله‌ی تکاملی ۱۸ تعیین شود. در ادامه، به منظور محاسبه  $\vartheta_n^g$  از روش تفاضلات متناهی [۳۳] برای متغیر زمان استفاده می‌شود. بر این اساس، اگر  $\vartheta_n^g$  و  $\vartheta_{n+1}^g$  بیانگر مقدار  $\vartheta^g$  در دو زمان  $t_n$  و  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  باشند، آنگاه مقدار  $\vartheta_n^g$  در زمان  $t_{n+1}$  بر اساس مشتق‌گیری پسروی اویلر [۳۴] به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\vartheta_{n+1}^g = (\vartheta_{n+1}^g - \vartheta_n^g) / \Delta t \quad (28)$$



در ادامه، صفحه‌ی میانی پیش از تغییر شکل  $S_0$  به صورت  $S_0 \approx \cup_{e=1}^m S_e^0$  به صورت گسسته‌سازی می‌شود که  $S_e^0$  یک المان بوده و  $m$  بیانگر تعداد المان‌ها در هندسه‌ی گسسته‌سازی شده<sup>۳۹</sup> است. در فرمول‌بندی کنونی، هندسه‌ی اولیه و میدان جابه‌جایی با استفاده از تابع درونیابی مشابه تقریب زده می‌شود. به عبارت دیگر، فرض می‌شود که المان به کار رفته در تحلیل از نوع ایزوپارامتریک<sup>۴۰</sup> است. در این صورت، بردار مکان  $\mathbf{R}$  و بردار جابه‌جایی  $\mathbf{u}$  در یک المان توسط روابط ۳۷ تقریب زده می‌شود:

$$\mathbf{R} = \sum_{I=1}^{n_e} N_I \mathbf{R}_I, \quad \mathbf{u} = \sum_{I=1}^{n_e} N_I \mathbf{u}_I, \quad (37)$$

که  $N_I$  توابع درونیابی،  $\mathbf{u}_I$  بردار جابه‌جایی در گره  $I$ ام و  $n_e$  تعداد گره در المان است. همچنین، مؤلفه‌های تانسور کرنش مجازی  $\delta \mathbf{E}$  چنین به دست می‌آید:

$$\delta E_{\alpha\beta} = \frac{1}{V} (F_{i\alpha} \delta F_{i\beta} + F_{i\beta} \delta F_{i\alpha}) \quad (38)$$

در نتیجه، با توجه به رابطه‌ی  $\delta F_{i\alpha} = \delta u_{i,\alpha}$ ، تقریب المان محدود نمایش برداری کرنش مجازی  $\delta \tilde{\mathbf{E}}$  به صورت رابطه‌ی ۳۹ نوشته می‌شود:

$$\delta \tilde{\mathbf{E}} = \sum_{I=1}^{n_e} \mathbf{B}_I \delta \mathbf{u}_I, \quad (39)$$

که در آن ماتریس کرنش - جابه‌جایی  $\mathbf{B}_I$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} N_{I,1} F_{11} & N_{I,1} F_{12} \\ N_{I,2} F_{12} & N_{I,2} F_{22} \\ N_{I,1} F_{12} + N_{I,2} F_{11} & N_{I,1} F_{22} + N_{I,2} F_{11} \end{bmatrix}. \quad (40)$$

در نتیجه با مقادیر به دست آمده می‌توان انرژی درونی  $\delta U^{\text{int}}$  را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\delta U^{\text{int}} = \mathbf{A}_{e=1}^m \sum_{I=1}^{n_e} \delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{f}_I^{\text{int}} = \mathbf{A}_{e=1}^m \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e^{\text{int}} \quad (41)$$

with  $\mathbf{f}_I^{\text{int}} = h_e \int_{A_e^e} \mathbf{B}_I^T \tilde{\mathbf{S}} dA_e^e,$

که در آن بردار نیروی داخلی در گره شماره‌ی  $I$  و  $\mathbf{A}_{e=1}^m$  عملگری<sup>۴۱</sup> است که اثر تمام المان‌ها را لحاظ می‌کند. همچنین  $\delta \mathbf{u}_e$  بردار جابه‌جایی مجازی تمام گره‌های المان است. به طور مشابه، فرم گسسته‌ی کار مجازی نیروهای خارجی را نیز می‌توان چنین نوشت:

$$\delta W^{\text{ext}} = \mathbf{A}_{e=1}^m \sum_{I=1}^{n_e} \delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{f}_I^{\text{ext}} = \mathbf{A}_{e=1}^m \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e^{\text{ext}}, \quad (42)$$

در رابطه‌ی ۴۲،  $\mathbf{f}_I^{\text{ext}}$  بردار نیروی خارجی است که برای هر گره از المان چنین تعریف می‌شود:

$$\mathbf{f}_I^{\text{ext}} = \int_{A_e^e} N_I \tilde{\mathbf{b}} dA_e^e + \oint_{\Gamma_e^e} N_I \tilde{\mathbf{t}} d\Gamma_e^e, \quad (43)$$

در نهایت اصل کار مجازی را می‌توان به شکل گسسته‌ی زیر بازنویسی کرد:

$$\delta U^{\text{int}} - \delta W^{\text{ext}} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{R}^* = \delta \mathbf{U}^T (\mathbf{f}^{\text{int}} - \mathbf{f}^{\text{ext}}) = \mathbf{A}_{e=1}^m \delta \mathbf{u}_e^T (\mathbf{f}_e^{\text{int}} - \mathbf{f}_e^{\text{ext}}) = 0, \quad (44)$$

هدف اصلی یافتن مقدار  $\vartheta_{n+1}^g$  است. در ادامه اندیس  $n+1$  جهت سادگی روابط حذف می‌شود. با جایگزینی معادله‌ی ۲۸ در رابطه‌ی ۱۸، معادله‌ی جبری غیرخطی  $0 = \vartheta^g - \vartheta_n^g - k^g \phi^g \Delta t$  به دست می‌آید که توسط روش تکراری<sup>۴۵</sup> نیوتن قابل حل است. بر این اساس، ابتدا مقدار باقی‌مانده<sup>۴۶</sup> به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$R_\vartheta = \vartheta^g - \vartheta_n^g - k^g \phi^g \Delta t \quad (29)$$

که باید در نهایت به سمت صفر میل کند. با مشتق‌گیری از باقی‌مانده نسبت به  $\vartheta^g$ ، شیب منحنی  $R_\vartheta$  نسبت به  $\vartheta^g$  به صورت رابطه‌ی ۳۰ قابل بیان است:

$$K_\vartheta = \frac{\partial R_\vartheta}{\partial \vartheta^g} = 1 - \left( \frac{\partial k^g}{\partial \vartheta^g} \phi^g + \frac{\partial \phi^g}{\partial \vartheta^g} k^g \right) \Delta t \quad (30)$$

در نتیجه در هر نماز روش نیوتن، مقدار پارامتر رشد  $\vartheta^g$  چنین به روز<sup>۴۷</sup> می‌شود:

$$(\vartheta^g)_{n+1} = \vartheta^g + \Delta \vartheta^g = \vartheta^g - R_\vartheta / K_\vartheta \quad (31)$$

این فرایند تا آن‌جا که مقدار  $\Delta \vartheta^g = -R_\vartheta / K_\vartheta$  به سمت صفر میل کند تکرار خواهد شد و بدین ترتیب مقدار  $\vartheta_{n+1}^g$  محاسبه خواهد شد.

#### ۴. فرمول‌بندی المان محدود غیرخطی

به منظور حل عددی معادلات حاکم، یک فرمول‌بندی المان محدود غیرخطی لاگرانژی کامل<sup>۴۸</sup> برای تغییرشکل‌های بزرگ غشاهای هاپیرالاستیک ارائه می‌شود. مهم‌ترین ابزار برای ارائه‌ی این فرمول‌بندی، اصل کار مجازی است به صورت زیر بیان می‌شود:<sup>[۳۲]</sup>

$$\delta U^{\text{int}} = \delta W^{\text{ext}}, \quad (32)$$

که در آن  $\delta U^{\text{int}}$  انرژی درونی مجازی و  $\delta W^{\text{ext}}$  کار مجازی حاصل از نیروهای خارجی است. برای یک غشای نازک، این مقادیر را می‌توان چنین نوشت:

$$\delta U^{\text{int}} = h_e \int_{A_e} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dA_e, \quad (33)$$

$$\delta W^{\text{ext}} = \int_{A_e} \tilde{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{u} dA_e + \oint_{\Gamma_e} \tilde{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma_e, \quad (34)$$

که در آن  $\tilde{\mathbf{b}}$  نیرو بر واحد سطح میانی غشا و  $\tilde{\mathbf{t}}$  نیرو بر واحد طول منحنی محیطی سطح میانی آن است. همچنین،  $A_e$  و  $\Gamma_e$  به ترتیب مساحت و منحنی مرزی در صفحه‌ی میانی پیش از تغییرشکل هستند. برای به دست آوردن فرمول‌بندی المان محدود با نمایش ماتریسی، به نمایش برداری کرنش مجازی  $\delta \mathbf{E}$  و تانسور تنش دوم پیولا - کرشف  $\mathbf{S}$  نیاز است. بیان برداری این دو کمیت برای مدل غشا که یک هندسه‌ی دوبعدی دارای انحنا در فضا است مطابق رابطه‌ی ۳۵ انجام خواهد شد:

$$\delta \tilde{\mathbf{E}} = \{\delta E_{11}, \delta E_{22}, 2\delta E_{12}\}^T, \quad \tilde{\mathbf{S}} = \{S_{11}, S_{22}, S_{12}\}^T \quad (35)$$

بر این اساس، انرژی درونی مجازی غشا به صورت رابطه‌ی ۳۶ قابل نمایش خواهد بود:

$$\delta U^{\text{int}} = h_e \int_{A_e} \delta \tilde{\mathbf{E}}^T \tilde{\mathbf{S}} dA_e. \quad (36)$$

که در آن  $\delta U$  بردار جابه‌جایی مجازی کل شده بوده و  $\mathbf{R}^*$  بردار باقی‌مانده‌ی کل شده است که می‌توان آن را به صورت رابطه‌ی ۴۵ نوشت:

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{A}_{e=1}^m \mathbf{R}_e^* = \mathbf{A}_{e=1}^m (\mathbf{f}_e^{\text{int}} - \mathbf{f}_e^{\text{ext}}) = \mathbf{0}, \quad (45)$$

که در آن  $\mathbf{R}_e^*$  نیز بردار باقی‌مانده‌ی المان است. رابطه‌ی ۴۵ یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی برحسب جابه‌جایی‌های گرهی است که با استفاده از روش نیوتون - رافسون قابل حل است. برای این منظور، باید فرم خطی‌سازی شده‌ی اصل کار مجازی را محاسبه کرد. در این راستا، نمو<sup>۴۲</sup> انرژی درونی مجازی چنین بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \Delta \delta U^{\text{int}} &= \mathbf{A}_{e=1}^m h_e \int_{A_e^e} [(\delta \vec{\mathbf{E}}^T \Delta \vec{\mathbf{S}} + \Delta \delta \vec{\mathbf{E}}^T \vec{\mathbf{S}}) dA_e^e] \\ &= \mathbf{A}_{e=1}^m \sum_{I=1}^{n_e} \sum_{J=1}^{n_e} \delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{K}_{IJ} \Delta \mathbf{u}_J \\ &= \mathbf{A}_{e=1}^m \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e \Delta \mathbf{u}_e, \end{aligned} \quad (46)$$

در رابطه‌ی ۴۶  $\mathbf{K}_{IJ}$  بلوک شماره‌ی  $IJ$  از ماتریس سفتی المان  $\mathbf{K}_e$  است که چنین تعریف می‌شود:

$$\mathbf{K}_{IJ} = h_e \int_{A_e^e} (\mathbf{B}_I^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{B}_J + \mathbf{G}_{IJ}) dA_e^e. \quad (47)$$

در رابطه‌ی ۴۷،  $\tilde{\mathbf{C}}$  ماتریس سفتی مادی است که در واقع نمایش ماتریسی تانسور مرتبه چهار  $\mathbf{C}$  است که در رابطه‌ی ۲۷ ارائه شد. به عبارت دیگر، با توجه به ترتیب مؤلفه‌های تنش و کرنش در معادله‌ی ۳۵، ماتریس  $\tilde{\mathbf{C}}$  برحسب مؤلفه‌های تانسور نمایش داده می‌شود:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} \end{bmatrix} \quad (48)$$

همچنین در رابطه‌ی ۴۸، بلوک ماتریسی  $\mathbf{G}_{IJ}$  بخش هندسی ماتریس سفتی است که چنین بیان می‌شود:

$$\mathbf{G}_{IJ} = \left( \begin{bmatrix} N_{I,1} & N_{I,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{J,1} \\ N_{J,2} \end{bmatrix} \right) \mathbf{I}. \quad (49)$$

یادآوری می‌شود که تانسور مرتبه چهار  $\mathbf{C}$  و لذا ماتریس  $\tilde{\mathbf{C}}$  به متغیر رشد  $\vartheta^g$  وابسته است. بنابراین قبل از محاسبه‌ی  $\mathbf{K}_{IJ}$ ، باید از الگوریتم تعیین  $\vartheta^g$  که در روابط ۲۸ تا ۳۱ شرح داده شد، در هر نقطه‌ی گاوسی اجرا شود. پس از تعیین  $\vartheta^g$  مقدار ماتریس  $\tilde{\mathbf{C}}$  محاسبه شده و براساس آن بلوک  $\mathbf{K}_{IJ}$  قابل محاسبه خواهد بود. پس از محاسبه‌ی ماتریس سفتی و بردار باقی‌مانده‌ی هر المان (یعنی  $\mathbf{K}_e$  و  $\mathbf{R}_e^*$ ) و لحاظ کردن اثر تمام المان‌ها، دستگاه معادلات جبری خطی به دست می‌آید:

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{U} = \mathbf{A}_{e=1}^m \mathbf{K}_e \Delta \mathbf{u}_e = -\mathbf{R}^*, \quad (50)$$

که از آن بردار نمو جابه‌جایی تمام گره‌ها (یعنی  $\Delta \mathbf{U}$ ) حاصل می‌شود. به عبارت دیگر، در فرایند حل کافی است بلوک شماره‌ی  $IJ$  از ماتریس سختی المان توسط روابط ۲۷، ۴۷ و ۴۸ محاسبه شود. بر اساس آن، ماتریس سفتی المان محاسبه می‌شود. سپس با سرهم‌بندی<sup>۴۳</sup> المان‌ها، رابطه‌ی ۴۹ به دست می‌آید که یک دستگاه معادلات جبری خطی است. یعنی در کل روش اجزای

محدود غیرخطی، ابتدا معادلات غیرخطی و پیچیده‌ی حاکم بر سیستم - که توسط رابطه‌ی ۴۵ بیان شده است - به دست می‌آید. سپس این معادلات توسط روش معروف نیوتون - رافسون خطی‌سازی می‌شود. کل فرایند خطی‌سازی در رابطه‌ی ۴۶ مشاهده می‌شود که منجر به پیدایش ماتریس سختی در رابطه‌ی ۴۷ شده است. در نهایت، این روش به معادله‌ی ساده‌ی خطی<sup>۵۰</sup> می‌رسد که با روش‌های بسیار متنوعی مانند روش ژاکوبی، روش حذفی گاوس، روش تجزیه‌ی چولسکی<sup>۴۴</sup> و روش گرادیان‌های مزدوج<sup>۴۵</sup> قابل حل است. شایان ذکر است که برای ماتریس متقارن  $\mathbf{K}$ ، نرم‌افزار متلب از روش تجزیه‌ی چولسکی استفاده می‌کند. پس از یافتن بردار نمو جابه‌جایی، جابه‌جایی کل گره‌ها توسط رابطه‌ی  $\mathbf{U} \leftarrow \mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}$  به روز می‌شود.

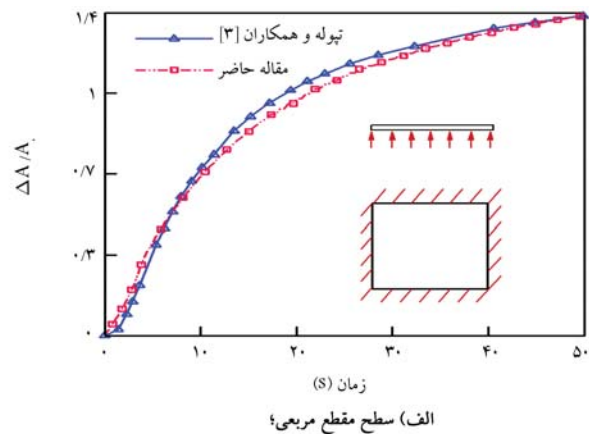
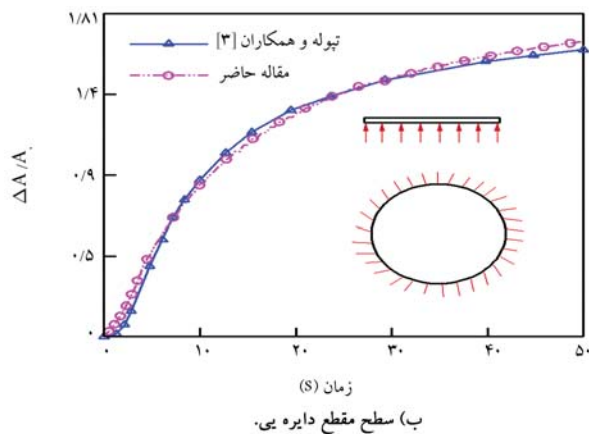
## ۵. مثال عددی

در این بخش، به منظور اعتبارسنجی و نیز بررسی عملکرد فرمول‌بندی ارائه شده در بخش‌های قبل، از آن‌جا که نرم‌افزارهای تجاری قابلیت مدل‌سازی پدیده‌ی رشد را ندارند، ابتدا یک کد المان محدود غیرخطی در محیط نرم‌افزار متلب نوشته شده است. به عبارت دیگر، از هیچ نرم‌افزار تجاری برای تولید هندسه، مش‌بندی یا حل معادلات جبری استفاده نشده است. در کلیه‌ی شبیه‌سازی‌ها از المان‌های چهارضلعی چهارگره‌ای با سه درجه آزادی  $\{u_1, u_2, u_3\}$  در هر گره برای گسسته‌سازی هندسه استفاده می‌شود. توجه شود که فرمول‌بندی المان محدود ارائه شده در بخش قبل به ازای المان با هر تعداد گره قابل استفاده است. همچنین از قاعده‌ی انتگرال‌گیری گاوسی  $2 \times 2$  برای محاسبه‌ی انتگرال‌ها استفاده می‌شود.

### ۱.۵. رشد پوست به صورت هندسه‌ی تخت

در این بخش یک مثال عددی ارائه می‌شود که شامل بررسی رشد پوست به صورت صفحه‌ی تخت با سه مقطع مربعی، دایره‌یی و مستطیلی است. مشابه کار محققین قبلی<sup>[۲]</sup>، قسمتی از پوست با سه نوع سطح مقطع مربعی، دایره‌یی و مستطیلی در نظر گرفته می‌شود. ضخامت پوست در همه‌ی موارد برابر ۲ میلی‌متر در نظر گرفته می‌شود. برای سطح مقطع دایروی و مربعی مقدار مساحت اولیه برابر ۳۷ سانتی‌متر مربع است. همچنین مرزهای پوست بدون حرکت در نظر گرفته می‌شوند (مشابه شکل‌های داخلی ۲ الف و ۲ ب). در شبیه‌سازی‌های انجام شده در این تحقیق، از مدل نئوهوکیان تراکم‌پذیر که در رابطه‌ی ۲۳ ارائه شد استفاده می‌شود. مطابق مطالعات قبلی<sup>[۲]</sup>، مقادیر مدول برشی  $\mu = 0.385$  و مگاپاسکال و نسبت پواسون  $\nu = 0.46$  در نظر گرفته می‌شوند. سرعت انقباض و پارامتر شکل برای منحنی انقباض به ترتیب  $\tau = 1$  و  $\gamma = 2$  فرض می‌شود. همچنین، مقدار رشد سطحی بحرانی و بیشینه نیز به ترتیب به صورت  $\vartheta^{\text{crit}} = 1/0.1$  و  $\vartheta^{\text{max}} = 2/4$  لحاظ می‌شود.

شایان ذکر است که کاربرد عملی این مثال در جراحی ترمیمی پوست است که هدف آن ترمیم ناهنجاری‌های پوستی است. مواردی مانند خال‌های گوشتی مادرزادی، ناحیه‌ی آسیب‌دیده توسط سرطان پستان یا ناحیه‌ی تخریب شده توسط سوختگی از مهم‌ترین مثال‌های ناهنجاری پوستی به شمار می‌رود. به لحاظ عملی، پوست در ناحیه‌ی دارای ناهنجاری برش خورده و یک انبساط‌دهنده‌ی سیلیکونی معمولاً با سطح مقطع مربعی، دایره‌یی یا مستطیلی در زیر آن قرار داده می‌شود. سپس، با تزریق آب نمک دارای فشار به داخل انبساط‌دهنده، پوست نیز تحت فشار قرار می‌گیرد و اصطلاحاً دچار فراکشش می‌شود. در واقع همین فشار مکانیکی که



شکل ۲. تغییرات  $\Delta A/A_0$  برحسب زمان برای سطح مقطع مربعی و دایره‌یی.

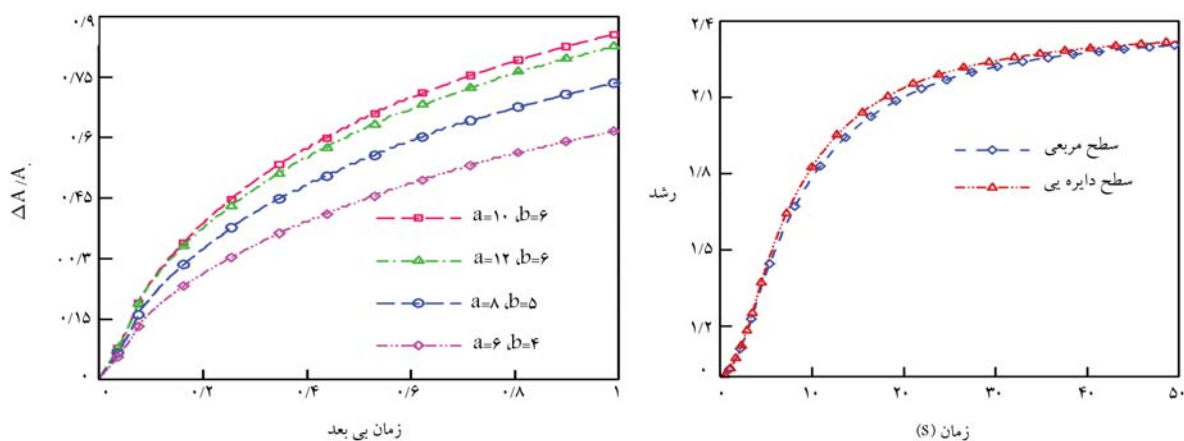
برای سطح مقطع دایره‌یی قابل مشاهده است، نتایج حاصل از این مدل‌سازی که فقط با ۲۵ المان در مدل یک‌چهارم به دست آمده است، با نتایج پیشین<sup>[۳]</sup> مطابقت بسیار خوبی دارد. شایان ذکر است که در مدل‌سازی المان محدود ارائه شده توسط این محققین، از ۱۷۲۸ المان سه‌بعدی هشت‌گره‌ی (۲۵۰۰ گره) برای مدل‌سازی در نرم‌افزار آباکوس استفاده شده است. باید توجه داشت که در مطالعات پیشین<sup>[۳]</sup> سه ردیف المان ۸ گره‌ی در راستای ضخامت قرار داده شده است، در حالی که در تحقیق حاضر کل پوست با یک المان سطحی غشا مدل‌سازی می‌شود. این نکته نشان می‌دهد که فرمول‌بندی ارائه شده در مقاله، به لحاظ محاسباتی بسیار کاراتر از فرمول‌بندی پیشین<sup>[۳]</sup> است و حجم محاسبات بسیار کم‌تری می‌طلبد. نمودار متغیر رشد  $\vartheta^g$  برحسب زمان در شکل ۳ الف برای سطح مقطع‌های مربعی و دایره‌یی نشان داده شده است. بر اساس منحنی‌های به دست آمده، مقدار نهایی متغیر رشد در مدل‌سازی کنونی برای سطح مقطع مربعی  $\vartheta^g = 2/33$  و برای سطح مقطع دایره‌یی  $\vartheta^g = 2/34$  به دست می‌آید. این مقادیر بسیار نزدیک به مقادیر متناظر  $\vartheta^g = 2/35$  و  $\vartheta^g = 2/36$  گزارش شده در مطالعات محققین<sup>[۳]</sup> است.

در گام بعد، رشد پوست در سطح مقطع مستطیلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. طول و عرض مستطیل به ترتیب با  $a$  و  $b$  نشان داده شده و نسبت منظر به صورت  $b/a$  تعریف می‌شود. شکل ۳ ب منحنی تغییرات زمانی  $\Delta A/A_0$  (افزایش مساحت به مساحت اولیه) به ازای مقادیر متفاوت  $a$  و  $b$  برحسب سانتی‌متر را نمایش می‌دهد. آزمایش‌های بالینی با هندسه‌های مشابه توسط ون - پررد و همکاران<sup>[۳۵]</sup> بر روی پوست بافت زنده (پوست خوک) انجام گرفته است. شایان ذکر است که خواص پوست خوک بسیار شبیه به پوست انسان است.<sup>[۳۵]</sup> نتایج حاصل از شبیه‌سازی حاضر و آزمایش‌های بالینی در جدول ۱ ارائه شده است. چنان که مشاهده می‌شود، سطح حاصل از مدل‌سازی مقاله‌ی حاضر مطابقت خوبی با آزمایش بالینی انجام شده دارد، به طوری که مقدار متوسط خطا حدود ۴ درصد است. شایان ذکر است که در مرجع<sup>[۳۵]</sup> تنها از یک تک فرمول ساده‌ی ریاضی جهت پیش‌بینی مقدار رشد استفاده شده بود. در مقاله‌ی کنونی، از نظریه‌ی مکانیک رشد در ترکیب با علم تغییرشکل‌های بزرگ استفاده شده است. لذا نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که نظریه‌ی مکانیک رشد قابلیت پیش‌بینی رشد پوست با دقت مناسب را دارد. در ادامه، توزیع متغیر رشد  $\vartheta^g$  برای سطح مقطع مربعی در شکل ۴ نشان داده شده است. به صورت مشابه، پروفیل توزیع متغیر رشد  $\vartheta^g$  برای سطح مقطع دایره‌یی در شکل ۵ الف و ۵ ب به ترتیب در زمان‌های ۴ و ۵۰ ثانیه به تصویر کشیده شده

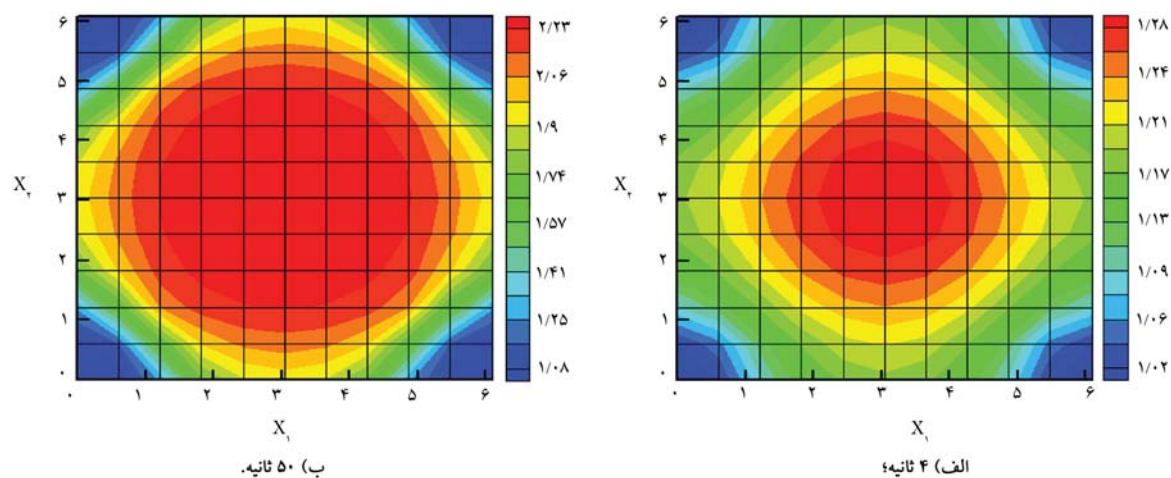
از طریق انبساط‌دهنده به پوست اعمال می‌شود، با گذشت زمان سبب رشد پوست با اعمال تنش و کرنش مکانیکی می‌شود. در واقع بدن موجود زنده، به منظور کاهش درد ناشی از کشیده شدن پوست به دلیل اعمال فشار، شروع به تولید پوست جدید می‌کند تا با بزرگ‌تر شدن سطح مقطع، مقدار تنش و درد را کاهش دهد. به عبارت دیگر، اعمال فشار توسط انبساط‌دهنده بدن موجود زنده را وادار به تولید پوست جدید می‌کند. پس از آن که رشد پوست به اندازه‌ی کافی صورت گرفت، توسط عمل جراحی، قسمت‌های نامطلوب پوست (مانند خال گوشتی) بریده و حذف شده و قسمت‌های جدید رشد یافته و بدون عیب، به هم دوخته می‌شود. لذا پوست آسیب دیده با پوست تازه‌ی بدون عیب جایگزین می‌شود. نکته‌ی اساسی استفاده از پوست رشد یافته آن است که ساختار آن دقیقاً از نوع پوست در ناحیه‌ی آسیب دیده است. لذا استفاده از این نوع عمل جراحی، به لحاظ کیفیت پوست، بهتر از جایگزینی پوست با پوست‌های برداشته شده از نواحی دیگر بدن است.

نکته‌ی دیگری که باید بدان اشاره شود آن است که انبساط‌دهنده بین درم و هایپودرم جاسازی می‌شود و در واقع اپیدرم و درم روی انبساط‌دهنده قرار می‌گیرند. اما در شبیه‌سازی این مقاله، پوست به صورت یک لایه مدل‌سازی می‌شود. مطالعات تجربی نشان می‌دهند که نقش اصلی را درم بر عهده دارد و میزان نقش اپیدرم در رفتار پوست در مقایسه با درم بسیار ناچیز است، زیرا که درم ضخامت و مدول بزرگ‌تری نسبت به اپیدرم دارد و اجزای مهم پوست شامل فولیکول‌های مو و رگ‌های خونی را در بر می‌گیرد.<sup>[۳۲، ۳۳]</sup>

فرایند بارگذاری بدین گونه است که پوست در بازه زمانی  $0 < t < 4 \text{ s}$  تحت فشار قرار می‌گیرد، به گونه‌یی که مقدار آن از صفر شروع شده و با افزایش به صورت خطی به مقدار بیشینه  $p_{max}$  می‌رسد. سپس فشار بیشینه‌ی فوق در بازه  $4 < t < t_{max} = 50 \text{ s}$  ثابت نگه داشته می‌شود تا به پوست اجازه‌ی رشد داده شود. برای پوست با سطح مقطع دایره‌یی و مربعی مقدار بیشینه فشار  $200 \text{ N/m}^2$  و  $112 \text{ N/m}^2$  به ترتیب برای سطح مقطع مستطیلی این مقدار  $112 \text{ N/m}^2$  و  $100 \text{ N/m}^2$  مگاپاسکال در نظر گرفته شده است. به دلیل تقارن، در هر سه سطح مقطع تنها یک‌چهارم غشا در شبیه‌سازی المان محدود در نظر گرفته می‌شود. آنالیز همگرایی نشان می‌دهد که در هر سه مورد یک مش‌بندی با  $4 \times 4 = 16$  المان برای دست یافتن به منحنی همگرا کفایت می‌کند. با این وجود، یک مش‌بندی با  $5 \times 5 = 25$  المان در نظر گرفته می‌شود که منحنی‌های هموارتری حاصل شود. در شکل ۲، منحنی تغییرات نسبت تغییر سطح به سطح اولیه (یعنی  $\Delta A/A_0$ ) برحسب زمان ترسیم شده است. چنان که در شکل ۲ الف برای سطح مقطع مربعی و در شکل ۲ ب



شکل ۳. نمودار بیشینه پارامتر رشد پوست بر حسب زمان برای سطح مقطع مربعی و دایره‌یی.



شکل ۴. توزیع متغیر رشد  $v_g$  در پوست با سطح مقطع مربعی در زمان.

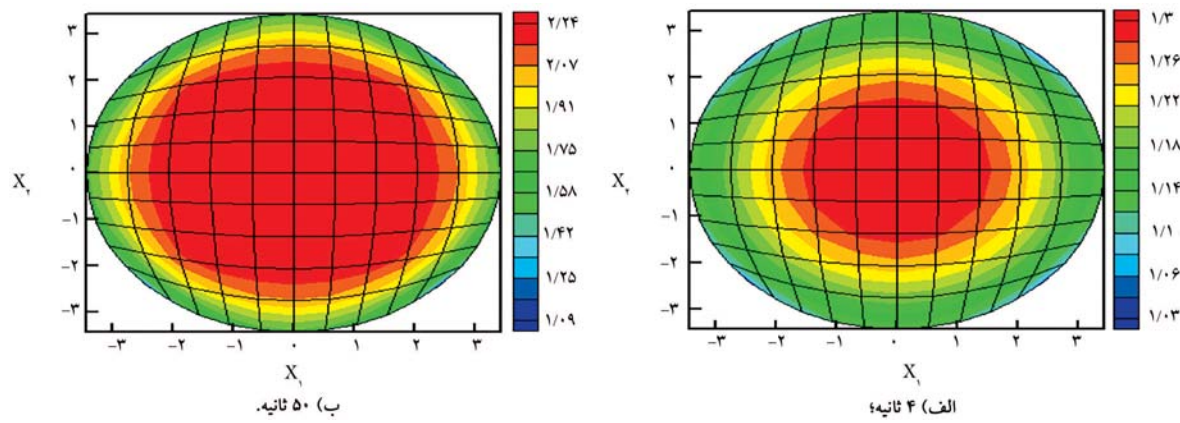
جدول ۱. مقایسه‌ی مقدار افزایش سطح ناشی از رشد پوست در نوشتار حاضر نسبت به مطالعه‌ی بالینی پیشین [۳۵] برای پوست با سطح مقطع مستطیلی (ابعاد بر حسب سانتی متر بوده و مساحت بر حسب سانتی متر مربع است).

طول و عرض انبساط‌دهنده	افزایش سطح مرجع [۳۵]	افزایش سطح مقاله حاضر	درصد خطا (%)
$a = 12, b = 6$	۶۲/۹۰	۶۰/۱۲	۴/۴
$a = 10, b = 6$	۴۶/۵۵	۴۹/۸۷	۶/۷
$a = 8, b = 5$	۴۰/۰۴	۳۸/۹۶	۲/۷
$a = 6, b = 4$	۱۶/۲۴	۱۵/۴۳	۴/۹

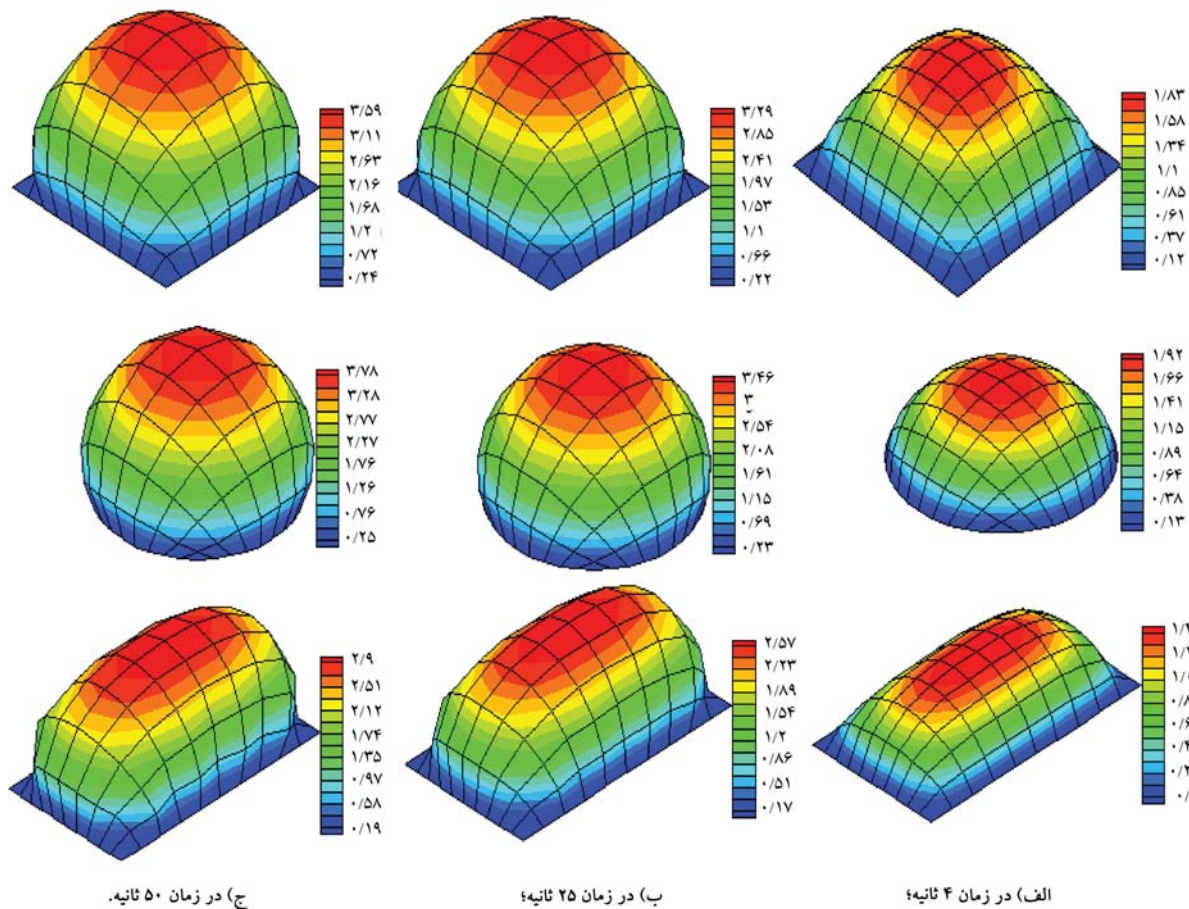
که سبب تغییر شکل بیشتر پوست در کنار افزایش مقدار  $v_g$  می‌شود. همچنین توزیع نسبت جرم کنونی به جرم اولیه، یعنی  $dm/dM$ ، برای پوست با هندسه‌های مربعی، دایره‌یی و نیز مستطیلی با نسبت منظر ۹/۱۶ و در زمان ۵۰ ثانیه در شکل ۷ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که نسبت جرم در قسمت‌های میانی این سه هندسه کمی بیشتر از ۳ است. به عبارت دیگر، اگر جرم اولیه‌ی یک المان کوچک دیفرانسیلی در مرکز هندسه برابر  $dm$  باشد، در اثر رشد پوست و نفوذ جرم جدید به داخل آن، جرم جدید حدود  $3dm$  خواهد شد. همچنین بیشترین افزایش جرم در پوست با سطح مقطع مربعی رخ می‌دهد که مقدار بیشینه  $dm/dM$  حدوداً ۳/۲۴ است.

است. از شکل‌های ۴ و ۵ می‌توان دریافت که متغیر رشد  $v_g$  که در زمان ۴ ثانیه به مقدار حدود ۱/۳ رسیده و تمرکز آن در بخش مرکزی پوست بوده، پس از گذشت زمان و در فشار ثابت، افزایش قابل توجهی یافته و به حدود ۲/۵ می‌رسد و همچنین به مناطق وسیع‌تری از سطح پوست توزیع می‌شود. در نهایت، شکل‌های مربوط به تغییر شکل و رشد پوست در زمان‌های مختلف برای سطح مقطع‌های مربعی، دایره‌یی و مستطیلی به‌ازای فشار یکسان ۰/۰۲ مگاپاسکال برای همه‌ی هندسه‌ها در شکل ۶ نمایش داده شده است.

یادآوری می‌شود که مقدار فشار در زمان ۴ ثانیه بیشینه می‌شود و پس از آن ثابت می‌ماند. لذا در بازه زمانی  $4 < t < 50$  ثانیه صرفاً رشد پوست رخ می‌دهد



شکل ۵. توزیع متغیر رشد  $u_3$  در پوست با سطح مقطع دایره‌ای در زمان.



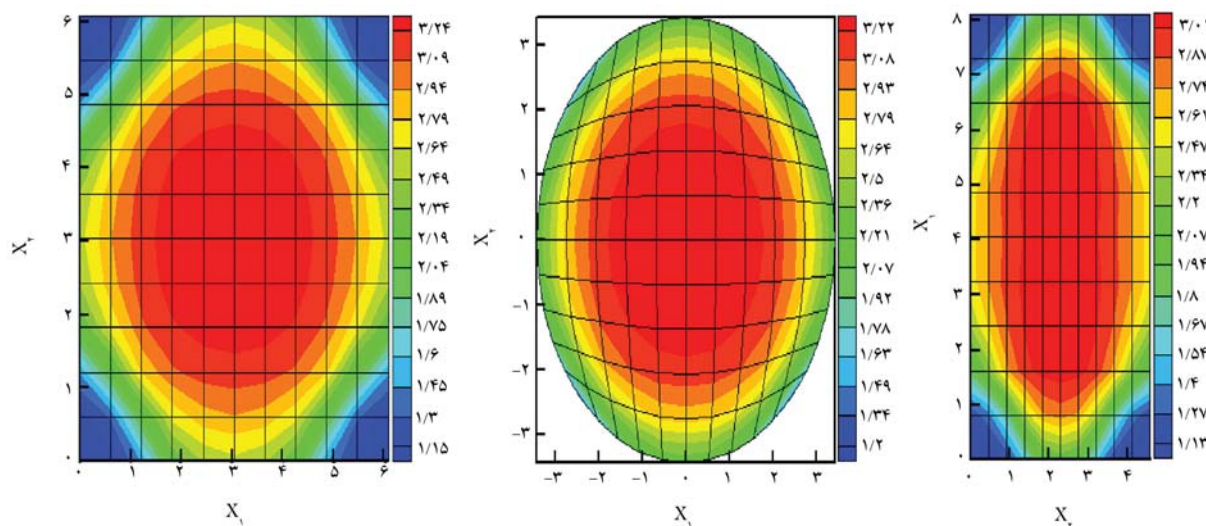
شکل ۶. توزیع مؤلفه‌ی جابه‌جایی  $u_3$  برای حالت تغییر شکل یافته‌ی پوست به ترتیب برای سطح مقطع مربعی، دایره‌ای و مستطیلی (با نسبت منظر ۹/۱۶) در زمان‌های مختلف.

در نظر گرفته می‌شود. تمامی لبه‌های قطاع ثابت فرض می‌شوند. فرایند بارگذاری بدین گونه است که پوست در بازه زمانی  $0 < t < 4S$  تحت فشار قرار می‌گیرد، به گونه‌ی که مقدار آن از صفر شروع شده و با افزایش به صورت خطی به مقدار بیشینه‌ی  $p = 0.00035$  می‌رسد. سپس فشار بیشینه‌ی  $p = 0.00035$  در بازه‌ی  $4 < t < 50S$  ثابت نگه داشته می‌شود تا به پوست اجازه‌ی رشد داده شود. از مدل نئوهوئین تراکم‌پذیر برای مدل‌سازی استفاده می‌شود. تمامی خواص مادی و

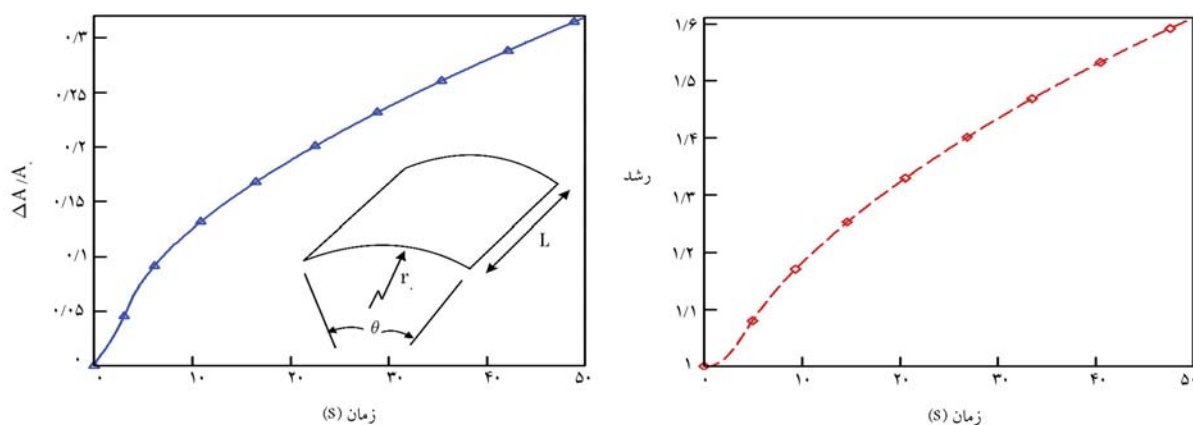
## ۲.۵. رشد پوست به صورت قطاع استوانه‌ای

در این مثال، رشد پوست به صورت غشایی با انحنای اولیه مورد بررسی قرار می‌گیرد. به دلیل این که پوست در تمامی سطح بدن دارای انحناست، لذا در نظر گرفتن انحنای اولیه تعبیر درست‌تری از فیزیک مسئله به دست خواهد داد. یک قطاع استوانه‌ای با شعاع  $r_0 = 50$  و طول  $L = 20$  سانتی‌متر و زاویه‌ی  $\theta = 4^\circ$  رادیان

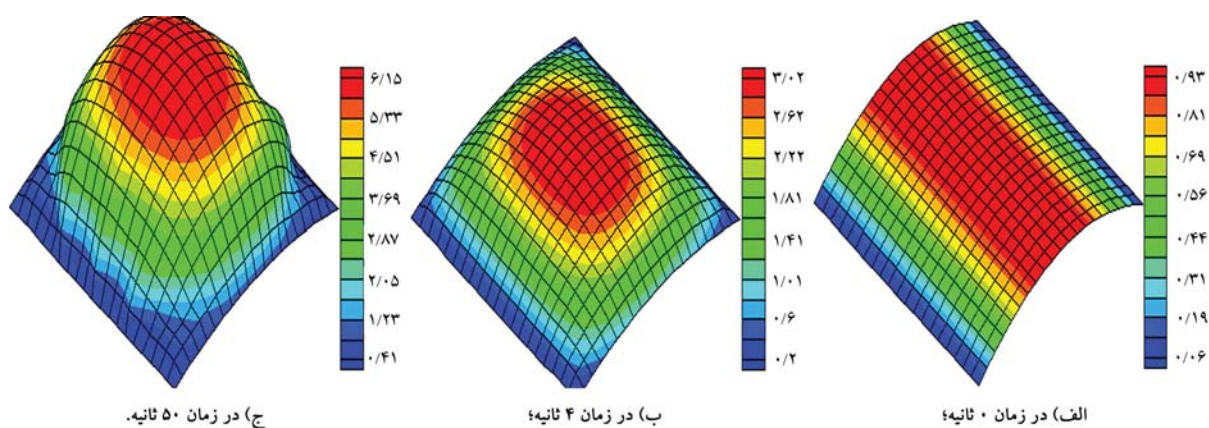




شکل ۷. توزیع نسبت جرمی  $dm/dM$  به ترتیب از چپ به راست برای پوست با سطح مقطع مربعی، دایره‌ای و مستطیلی (با نسبت منظر ۹/۱۶) در زمان ۵۰ ثانیه.



شکل ۸. نمودار بیشینه میزان پارامتر رشد پوست برحسب زمان.



شکل ۹. توزیع مؤلفه‌ی  $x_3$  برای حالت تغییر شکل یافته‌ی پوست به صورت قطاع استوانه‌ای.

هموارتری حاصل شود. نمودار متغیر رشد  $\Delta^g$  برحسب زمان در شکل ۸ الف نشان داده شده است. همچنین، شکل ۸ ب منحنی تغییرات زمانی  $\Delta A/A_0$  را نمایش می‌دهد. شکل‌های مربوط به تغییر شکل پوست در زمان‌های مختلف در شکل ۹ نشان داده شده است.

پارامترهای مربوط به رشد مانند مسئله‌ی قبل در نظر گرفته می‌شود. به دلیل تقارن، تنها یک چهارم مقطع مدل می‌شود. تحلیل همگرایی نشان می‌دهد که یک مش‌بندی با  $8 \times 8$  المان برای دست یافتن به منحنی همگرا کفایت می‌کند. با این وجود، یک مش‌بندی با  $100 = 10 \times 10$  المان در نظر گرفته می‌شود که منحنی‌های

## ۶. نتیجه‌گیری

بسیار نزدیک به مقادیر متناظر گزارش شده در مطالعات پیشین هستند. از دیدگاه محاسباتی، از آن‌جا که در فرمول‌بندی حاضر المان دوبعدی غشا (با ۱۲ درجه آزادی در المان ۴ ضلعی) جایگزین المان‌های سه‌بعدی (با ۲۴ درجه آزادی در المان ۸ گرهی) شده است، مدل کنونی به مراتب ساده‌تر از تحقیقات پیشین بوده و حجم محاسبات را به میزان قابل توجهی کاهش می‌دهد. به عبارت دیگر، تعداد المان‌ها در تحقیق حاضر کم‌تر از ۱/۵ درصد تعداد المان‌های در نظر گرفته شده در تحقیقات مشابه است. همچنین توزیع نسبت جرم کنونی به جرم اولیه نیز مورد بررسی قرار گرفت و ملاحظه شد که در اثر رشد پوست و نفوذ جرم جدید به داخل آن، جرم جدید در مثال‌های بررسی شده بیش از ۳ برابر جرم اولیه خواهد شد. برای پوست با سطح مقطع مستطیلی، سطح حاصل از رشد بر اساس فرمول‌بندی ارائه شده در این مقاله با نتایج بالینی گزارش شده در مرجع<sup>[۳۵]</sup> مقایسه شد و مطابقت خوبی بین نتایج کنونی و نتایج مرجع مذکور حاصل شد. همچنین، مسئله‌ی رشد برای سطح دارای انحنا ی اولیه نیز مورد بررسی قرار گرفت و بر اساس بارگذاری صورت گرفته، بیش از ۳۰ درصد رشد در مساحت پوست حاصل شد.

در این مقاله، پدیده‌ی رشد در پوست تحت اعمال بار مکانیکی مورد بررسی قرار گرفت. به عنوان نقطه‌ی تمایز این تحقیق از تحقیقات مشابه، پوست به صورت یک غشای هایپرلاستیک مدل‌سازی شد. فرمول‌بندی لازم برای ترکیب رشد و تغییر شکل مکانیکی ارائه شد و رشد پوست توسط یک کمیت اسکالر به همراه یک معادله‌ی تکاملی مناسب در محاسبات مد نظر قرار گرفت. سپس یک فرمول‌بندی المان محدود در شکل لاگرانژی کامل توسعه داده شد. جهت اعتبارسنجی، مدل‌سازی رشد پوست تحت اعمال فشار بازای هندسه‌های مختلف در دو حالت، یعنی غشای اولیه ی تخت (بدون انحنا) و نیز غشای دارای انحنای اولیه صورت گرفت. نتایج حاصل نشان می‌دهد که مدل غشای ارائه شده برای رشد پوست به خوبی با نتایج مطالعات پیشین مطابقت می‌کند. به ویژه آن که منحنی‌های مقدار رشد سطحی پوست بسیار نزدیک به منحنی‌های موجود در مطالعات پیشین هستند. همچنین مقدار نهایی متغیر رشد در مدل‌سازی کنونی برای سطح مقطع‌های مربعی و دایره‌یی

## پانویس‌ها

1. skin flap
2. expanders
3. saline solution
4. crescent shape
5. relaxation
6. reconstructive surgery
7. pure shear
8. Ogden strain energy
9. transversely isotropic
10. neo-Hookean
11. tissue necrosis
12. Cartesian coordinate system
13. orthonormal
14. midsurface
15. curvilinear coordinate system
16. covariant basis vectors
17. stretch
18. deformation gradient tensor
19. invariant
20. Green-Saint Venant strain tensor
21. Kronecker delta
22. multiplicative decomposition
23. area stretch
24. Nanson's formula
25. evolution equation
26. weighting function
27. growth criterion
28. adaptation speed
29. second Piola-Kirchhoff stress tensor
30. double contraction
31. Young's modulus
32. Poisson's ratio
33. finite difference
34. Euler backward differentiation
35. iterative
36. residual

37. update
38. Total Lagrangian
39. discretized geometry
40. isoparametric
41. assembly operator
42. increment
43. assembly of elements
44. Cholesky factorization method
45. Conjugate gradients method

## منابع (References)

1. Albanna, M.Z. and Holmes, J.H. *Skin Tissue Engineering and Regenerative Medicine*, Academic Press, pp.1-17 (2016).
2. Beauchenne, J.G., Chambers, M.M., Peterson, A.E. and et al. "Biochemical, biomechanical, and physical changes in the skin in an experimental animal model of the therapeutic tissue expansion", *Journal of Surgical Research*, **47**, pp. 507-514 (1989).
3. Tepole, A.B., Ploch, C.J., Wong, J. and et al. "Growing skin: A computational model for skin expansion in reconstructive surgery", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, bf 59, pp. 2177-2190 (2011).
4. Tepole, A.B., Gosain, A.K. and Kuhl, E. "Stretching skin: The physiological limit and beyond", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **47**, pp. 938-949 (2012).
5. Neumann, C.G. "The expansion of an area of skin by progressive distension of a subcutaneous balloon; use of the method for securing skin for subtotal reconstruction of the ear", *Plastic and Reconstructive Surgery*, **19**, pp. 124-130 (1957).

6. Agrawal, K. and Agrawal, S. "Tissue regeneration during tissue expansion and choosing an expander", *Indian Journal of Plastic Surgery*, **45**, pp. 7-15 (2012).
7. Hollestein, M., Ehert, A.E., Itskov, M. and et al. "A novel experimental procedure based on pure shear testing of dermatome-cut samples applied to porcine skin", *Journal of Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, **10**, pp. 651-661 (2011).
8. Zhao, Y., Feng, B., Lee, J. and et al. "A multi-layered computational model for wrinkling of human skin predicts aging effects", *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, **103**, 103552 (2019).
9. Tonge, T.K., Altan, L.S., Voo, L.M. and et al. "Full-field bulge test for planar anisotropic tissues: Part I- experimental methods applied to human skin tissue", *Acta Biomaterialia*, **9**, pp. 5913-5925 (2013).
10. Smalls, L.K., Wickett, R. and Visscher, M.O. "Effect of dermal thickness, tissue composition, and body site on skin biomechanical properties". *Journal of Skin Research and Technology*, **12**, pp. 43-49 (2006).
11. Pailler-Mattei, C., Laquieze, L., Debret, R. and et al. "Rheological behavior of reconstructed skin", *Journal of Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, **37**, pp. 251-263 (2014).
12. Sajadi, B., Saidi, M.H. and Ahmadi, G. "Numerical evaluation of the operating room ventilation performance: Ultra-Clean Ventilation (UCV) systems", *Scientica Iranica B*, **26**, pp. 2394-2406 (2019).
13. Sajadi, B., Saidi, M.H. and Ahmadi, G. "Computer modeling of the operating room ventilation performance in connection with surgical site infection", *Scientica Iranica B*, **27**, pp. 704-714 (2020).
14. Kumaraswamy, N., Khatam, H., Reece, G.P. and et al. "Mechanical response of human female breast skin under uniaxial stretching", *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, **74**, pp. 164-175 (2017).
15. Barbarino, G.G., Jabareen, M. and Mazza, E. "Experimental and numerical study on the mechanical behavior of the superficial layers of the face", *Journal of Skin Research and Technology*, **17**, pp. 434-444 (2011).
16. Afsar Kazerooni, N., Srinivasa, A.R. and Criscione, J.C. "A multinetwork inelastic model for the hysteretic response during cyclic loading of pig and rat skin", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **126**, 103555 (2020).
17. Jobanputra, R.D., Boyle, C.J., Dini, D. and et al "Modelling the effects of age-related morphological and mechanical skin changes on the stimulation of tactile mechanoreceptors", *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, **112**, 104073 (2020).
18. Flynn, C., Taberner, A. and Nielsen, P. "Mechanical characterisation of in vivo human skin using a 3D force-sensitive micro-robot and finite element analysis", *Journal of Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, **10**, pp. 27-38 (2011).
19. Groves, R.B., Coulman, S.A., Birchall, J.C. and et al. "An anisotropic, hyperelastic model for skin: experimental measurements, finite element modelling and identification of parameters for human and murine skin", *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, **18**, pp. 167-180 (2013).
20. Pamplona, D.C., Velloso, R.Q. and Radwanski, H.N. "On skin expansion", *Journal of Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, **29**, pp. 655-662 (2014).
21. Delfino, A., Stergiopoulos, N., Moore, J.E. and et al. "Residual strain effects on the stress field in a thick wall finite element model of the human carotid bifurcation", *Journal of Biomechanics*, **30**, pp. 777-786 (1997).
22. Rémache, D., Caliez, M., Gratton, M. and et al. "The effects of cyclic tensile and stress-relaxation tests on porcine skin", *Journal of Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, **77**, pp. 242-249 (2018).
23. Socci, L., Rennati, G., Gervaso, F. AND ET AL. "An axisymmetric computational model of skin expansion and growth", *Journal of Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, **6**, pp. 177-188 (2007).
24. Zollner, A.M., Tepole, A.B. and Kuhl, E. "On the biomechanics and mechanobiology of growing skin", *Journal of Theoretical Biology*, **297**, pp. 166-175 (2012).
25. Zollner, A.M., Tepole, A.B., Gosain, A.K. and et al. "Growing skin: tissue expansion in pediatric forehead reconstruction", *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, **11**, pp. 855-867 (2012).
26. Tepole, A.B., Gosain, A.K. and Kuhl, E. "Computational modeling of skin: Using stress profiles as predictor for tissue necrosis in reconstructive surgery", *Computers & Structures*, **143**, pp.32-39 (2014).
27. Holzapfel, G.A., Gasser, T.C. and Ogden, R.W. "A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models", *Journal of Elasticity*, **61**, pp. 1-48 (2000).
28. Holzapfel, G.A. *Nonlinear Solid Mechanics*, Wiley- Lane, pp.55-108(2000).
29. Rodriguez, E.K., Hoger, A. and McCulloch, A.D., "Stress-dependent finite growth in soft elastic tissues", *Journal of Biomechanics*, **27**, 455-467 (1994).
30. Lubarda, A. and Hoger, A. "On the mechanics of solids with a growing mass", *International Journal of Solids and Structures*, **39**, pp. 4627-4664 (2002).
31. Ogden, R.W. *Nonlinear Elastic Deformations*, Ellis Horwood (1984).
32. Wriggers, P. *Nonlinear Finite Element Methods*, Springer-Verlag, pp.103-148 (2008).
33. Joodaki, H. and Panzer, M. B. "Skin mechanical properties and modeling: A review", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine*, **232**, pp. 323-343 (2018).
34. Lynch B., Paegeon, H., Le Blay H. and et al. "A mechanistic view on the aging human skin through ex vivo layer-by-layer analysis of mechanics and microstructure of facial and mammary dermis", *Scientific Reports*, **12**, pp. 849, (2022).
35. van Rappard, J.H.A., Molenaar, J., van Doorn, K. and et al. "Surface-area increase in tissue expansion", *Plastic and Reconstructive Surgery*, **82**, pp. 833-839 (1988).



## حل تحلیلی معادله‌ی انتقال جرم در شبکه‌ی رودخانه

محمد جواد فردادی شیل سر (دانشجوی کارشناسی ارشد)

مهدی مظاهری\* (دانشیار)

جمال محمد ولی سامانی (استاد)

گروه مهندسی و مدیریت آب، دانشکده‌ی کشاورزی، دانشگاه تربیت مدرس

مهندسی مکانیک شریف (بهار ۱۴۰۱)  
دوری ۳-۲، شماره ۱، ص. ۳۵-۴۹، (پژوهشی)

در این پژوهش، با روش تبدیل لاپلاس حل تحلیلی معادله‌ی انتقال آلودگی در دامنه‌ی محدود برای شبکه‌ی رودخانه به ازای شرایط مرزی بالادست و پایین دست دیریکله و شرط اولیه‌ی صفر استخراج شد و شبیه‌سازی برای دو شبکه‌ی شاخه‌یی و حلقه‌یی با شرایط مرزی ثابت و متغیر انجام شد. بعد از نام‌گذاری گره‌ها، با تشکیل ماتریس‌های نحوه‌ی اتصال، مشخصات جریان و هندسی رودخانه برای هر شبکه به عنوان ورودی مسئله، ماتریس انتشار براساس تابعی از متغیر  $s$  لاپلاس ایجاد می‌شود که با حل دستگاه پیچیده‌ی ایجاد شده و استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس، مقدار غلظت در هر گره محاسبه می‌شود. در نهایت برای اعتبارسنجی، حل تحلیلی با حل عددی مقایسه و سپس شاخص‌های خطای آماری محاسبه شد. در شبیه‌سازی‌های انجام شده، به علت تغییر دبی ورودی به هر شاخه و تغییر سطح مقطع جریان در هر شاخه، در محل‌های اتصال شاخه‌ها به یکدیگر تغییرات غلظت آلودگی به صورت افزایشی یا کاهش رخ می‌دهد. نتایج حاکی از عملکرد مطلوب و توانایی بالای حل تحلیلی در مدل‌سازی دو شبکه‌ی مذکور و انطباق خوب آن با حل عددی است که به دلیل دقت و سرعت محاسبات بالا می‌تواند جایگزین حل عددی شود. همچنین از حل تحلیلی موجود می‌توان به عنوان ابزاری برای صحت‌سنجی سایر حل‌های تحلیلی در شبکه‌ی رودخانه استفاده کرد.

m.fardadi@modares.ac.ir  
m.mazaheri@modares.ac.ir  
samani-j@modares.ac.ir

واژگان کلیدی: حل تحلیلی، روش تبدیل لاپلاس، معادله‌ی جابه‌جایی - پراکندگی - واکنش، شبکه‌ی رودخانه، تابع توزیع غلظت.

## ۱. مقدمه

آلودگی یک شبکه‌ی رودخانه صدمات شدیدی به انسان‌ها، موجودات زنده و محیط زیست وارد خواهد کرد و هزینه‌ی پاک‌سازی آن نسبت به یک شاخه‌ی رودخانه بیشتر است. همچنین با توجه به این که یک شبکه‌ی رودخانه می‌تواند به تعدادی روستا یا شهر یا حتی کشور متصل باشد، از این رو خسارات ناشی از آلودگی بین عوامل ذکر شده تقسیم می‌شود. بنابراین می‌توان از طریق مدل‌سازی ریاضی سهم هریک از عوامل را در آلوده‌سازی شبکه‌ی رودخانه پیدا کرد.<sup>[۷]</sup>

معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر انتقال و انتشار آلاینده‌ها در رودخانه معادله‌ی جابه‌جایی<sup>۱</sup> - پراکندگی<sup>۲</sup> - واکنش (ADER)<sup>۳</sup> بوده که از نوع معادلات دیفرانسیل خطی با مشتقات جزئی نسبت به مکان و زمان است. این معادله از قانون اول فیک<sup>۴</sup> به دست آمده و پاسخ آن یک تابع توزیع غلظت برحسب مکان و زمان در رودخانه خواهد بود. برای یک شبکه‌ی رودخانه، استفاده از مدل‌های دوبعدی و سه‌بعدی معادله‌ی ADRE به دلیل وقت‌گیر بودن محاسبات آنها و کمبود داده برای اعتبارسنجی آنها امکان‌پذیر نیست و استفاده از مدل یک‌بعدی ADRE برای پیش‌بینی غلظت آلاینده در یک شبکه‌ی رودخانه توصیه می‌شود.<sup>[۸]</sup>

گزارش‌ها حاکی از آن است که تقریباً تمامی پژوهش‌های انجام گرفته تاکنون برای حل معادله‌ی ADRE، در یک شاخه از رودخانه بوده و آن هم به صورت

نقش آب به عنوان یک ماده‌ی حیاتی برای حفظ حیات، فعالیت‌های بشر، محیط زیست و منابع آن انکارناپذیر است. ورود مواد آلاینده یک تهدید بسیار جدی برای منابع آب محسوب می‌شود، از این رو مسئله‌ی انتقال آلودگی و میزان آن از عوامل مهم و قابل بررسی در محیط زیست است. رودخانه‌ها یکی از مهم‌ترین منابع آب در جهان به شمار می‌روند که وظیفه‌ی تأمین آب شرب و آب لازم در بخش صنعت و کشاورزی را بر عهده دارند، پس بایستی بیشتر از لحاظ کیفیت آب و آلودگی آن مورد توجه قرار گیرند.

«شبکه‌ی رودخانه» متشکل از تمامی مسیرهایی است که توسط هر شاخه‌ی رودخانه‌ی اصلی در حوضه زهکشی خود تشکیل شده است. شبکه‌های رودخانه‌یی به عنوان اتصالات ایستایی بین گره‌های ثابت که بر اساس توپوگرافی زمین تعریف شده‌اند تصور می‌شوند.<sup>[۱-۳]</sup> عملکرد زیست‌محیطی شبکه‌های رودخانه‌یی می‌تواند به طور قابل توجهی توسط شرایط هیدرولیکی نامساعد که موجودات زنده‌ی موجود در آب مانند ماهی‌ها و ... را به چالش می‌کشد، کاهش یابد.<sup>[۴-۶]</sup> بنابراین مسئله‌ی

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۴۰۰/۵/۳۱، اصلاحیه ۱۴۰۰/۸/۱۷، پذیرش ۱۴۰۰/۸/۱۸.

DOI:10.24200/J40.2021.58767.1613

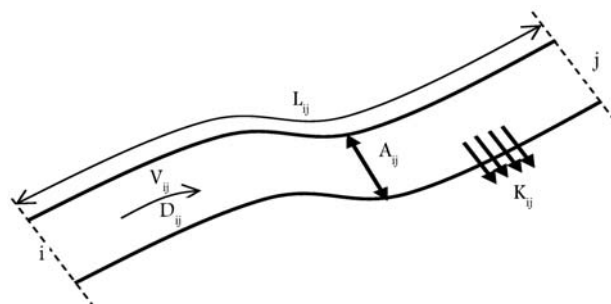
عددی یا تحلیلی است. اما تاکنون برای شبکه‌ی رودخانه حل تحلیلی انجام نشده و تنها حل‌های عددی، آن هم به صورت محدود، انجام گرفته است که از آن جمله می‌توان به پژوهش ژانگ و همکاران<sup>[۹]</sup> اشاره کرد که در آن، یک مدل هیدرودینامیکی و کیفی آب مبتنی بر روش اتصال رودخانه برای شبکه‌ی رودخانه به صورت عددی با استفاده از روش جداسازی معادله‌ی ADE ارائه شد. هیتون و همکاران<sup>[۱۰]</sup> نیز در پژوهشی، معادله‌ی انتقال املاح و مواد را در یک سیستم زیست‌ساختی و ژئوفیزیکی گیاهی شبکه‌های قارچی میسلیوم (قسمت رویشی قارچ، که املاح از طریق آن جذب می‌شود) با استفاده از تبدیل لاپلاس به صورت تحلیلی با در نظر گرفتن شرایط مرزی ثابت در همه‌ی گره‌ها، حل کردند و با در نظر گرفتن آمینواسید به عنوان منبع مغذی و با استفاده از آزمایش ردیاب رادیویی، داده‌های حاصل از آزمایش‌ها و عکس‌برداری و نیز نحوه‌ی پخش و انتقال آن را به کل انشعابات بررسی کردند. تقریباً تمامی معادلات دیفرانسیل را می‌توان با روش‌های عددی حل کرد و این یک مزیت حل‌های عددی نسبت به حل‌های تحلیلی است، ولی گاهی روش‌های عددی زمان‌بر و هزینه‌بر است و از این رو روش‌های حل تحلیلی بیشتر توصیه می‌شود. به طور کلی حل‌های تحلیلی به دلیل بالا بودن سرعت انجام محاسبات و میزان دقت بر روش‌های عددی ارجحیت دارند و از آنها به عنوان ابزاری برای صحت‌سنجی روش‌های عددی استفاده می‌شود.<sup>[۱۱]</sup>

تا به امروز حل‌های تحلیلی بسیاری برای معادله‌ی ADRE در یک شاخه‌ی رودخانه توسط محققین ارائه شده است، از این رو می‌توان گفت که عموماً حل‌های تحلیلی صورت گرفته برای معادله‌ی ADRE مبتنی بر چهار روش حل -- روش تابع گرین<sup>۵</sup>، روش تبدیل انتگرال تعمیم یافته<sup>۶</sup>، روش تبدیل لاپلاس<sup>۸</sup> هستند. در زمینه‌ی حل تحلیلی با استفاده از روش تابع گرین، پارک و ژان<sup>[۱۲]</sup> در پژوهشی، معادله‌ی یک بعدی، دوبعدی و سه بعدی انتقال آلودگی را با ضرایب ثابت و صرف‌نظر از گرادیان سرعت در راستای عرض و عمق در یک آبخوان محصور حل کردند. در پژوهشی دیگر معادله‌ی ADE، با فرض یکنواختی جریان و ثابت بودن ضرایب به صورت تحلیلی حل شد.<sup>[۱۳]</sup> از کاربردهای دیگر روش تابع گرین نیز می‌توان به مدل‌سازی انتقال آلودگی با حل معادله‌ی ADE در حالت یک بعدی، دوبعدی و سه بعدی در دامنه‌های محدود، نیمه محدود و نامحدود در محیط متخلخل اشاره کرد.<sup>[۱۴]</sup> در این راستا، سانسکریتیان و همکاران<sup>[۱۵]</sup> معادله‌ی یک بعدی ADE را با استفاده از ترکیب روش تابع گرین و تغییر متغیر با الگوی آلودگی نقطه‌یی و با در نظر گرفتن سرعت و ضریب پراکندگی به صورت تابعی از زمان و مکان حل کردند. آنان در پژوهشی دیگر<sup>[۱۶]</sup> معادله‌ی دوبعدی ADE را با روش تابع گرین و با در نظر گرفتن سرعت و ضریب پراکندگی در راستای طولی و عرضی تابعی از زمان و مکان در محیط آب زیرزمینی حل کردند و اثرات سرعت و ضریب پراکندگی را با الگوی آلودگی نقطه‌یی نشان دادند. در زمینه‌ی کاربرد روش تابع گرین در رودخانه، مشهد گرما و همکاران<sup>[۱۷]</sup> در پژوهشی معادله‌ی یک بعدی و دوبعدی انتقال جرم را با استفاده از روش تابع گرین به ازای چند منبع آلاینده‌ی نقطه‌یی با الگوی نامنظم در محیط رودخانه حل کردند و نتایج حل تحلیلی را با حل عددی اعتبارسنجی کردند. یکی دیگر از روش‌های حل تحلیلی استفاده از روش انتگرال تعمیم یافته‌ی GITT است، که مبتنی بر روش توابع ویژه است.<sup>[۱۸]</sup> یکی از کاربردهای مهم این روش توانایی بالای آن در حل مسائل پیچیده‌ی معادله‌ی دیفرانسیل جزئی، شرایط مرزی و دامنه‌ی حل است.<sup>[۱۹]</sup> آدریان و همکاران<sup>[۲۰]</sup> معادله‌ی ADRE را با روش تبدیل انتگرالی تعمیم یافته با فرض ضرایب ثابت در دامنه‌ی نیمه محدود با در نظر گرفتن شرایط مرزی بالادست دیریشلت و حد غلظت در بی‌نهایت در پایین دست حل کردند؛ سپس رابطه‌ی استخراج شده را با دو حل تحلیلی درسناک و دابینز<sup>[۲۱]</sup> و یو

همکاران<sup>[۲۲]</sup> صحت‌سنجی کردند. همچنین محققینی از جمله چن و همکاران<sup>[۲۳]</sup> و گورو و اسکاگس<sup>[۲۴]</sup> استفاده از روش GITT را مورد نظر داشته‌اند.

روش تبدیل فوریه یکی از روش‌های قدیمی حل تحلیلی بوده که همچنان مورد توجه محققینی مانند بهارانی و همکاران<sup>[۲۵]</sup> و شاکلا<sup>[۲۶]</sup> است. یانگ و همکاران<sup>[۲۷]</sup> در پژوهشی با استفاده از تبدیل معکوس فوریه<sup>۹</sup> و توزیع گسترده‌ی گاوسی<sup>۱۰</sup>، معادله‌ی ADE یک بعدی را با مشتق سازگار توسعه دادند و به معادله‌ی CADE<sup>۱۱</sup> تبدیل کردند و نشان دادند که از راه حل استخراج شده می‌توان برای توصیف دقیق جریان سیال و انتقال املاح بهره جست. از دیگر مزایای روش تبدیل فوریه می‌توان به توانایی آن برای مدل‌سازی انتقال املاح و اکسیدناپذیر در محیط ناهمگن با ضرایب متغیر اشاره کرد.<sup>[۲۸]</sup> در پژوهشی که توسط سیمپسون و الری<sup>[۲۹]</sup> انجام شد، معادله‌ی یک بعدی ADE را با استفاده از تبدیل لاپلاس و سری مک‌لورن و با در نظر گرفتن ضرایب ثابت و دامنه‌ی نیمه محدود حل کردند و نتایج را با حل عددی اعتبارسنجی کردند. ویلیامز و توماسکو<sup>[۳۰]</sup> معادله‌ی ADE را در حالی حل کردند که از ترم منبع صرف‌نظر کردند و معادله را با ضرایب ثابت و در دامنه‌ی نیمه محدود با روش تبدیل لاپلاس حل کردند. اخیراً نیز محققین برای حل معادله‌ی انتقال آلودگی به صورت تحلیلی، از ترکیب روش لاپلاس با روش انتگرال تعمیم یافته استفاده می‌کنند. کومار و سادهندرا<sup>[۳۱]</sup> طی پژوهشی معادله‌ی انتقال آلودگی را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس و GITT با در نظر گرفتن شرایط مرزی نوع اول و سوم در بالادست به صورت الگوی زمانی تابع نامی در محیط متخلخل و به صورت تحلیلی حل کردند. همچنین در پژوهشی دیگر، از ترکیب روش لاپلاس و GITT به منظور حل معادله‌ی انتقال جرم با در نظر گرفتن ترم‌های مختلف منبع در محیط متخلخل استفاده شده است.<sup>[۳۲]</sup> روش تبدیل لاپلاس یک ابزار تحلیلی قدرتمند برای حل مسائل پیچیده‌ی ریاضی است. در تحقیقی کار<sup>[۳۳]</sup> با استفاده از روش تبدیل لاپلاس معادله‌ی انتقال جرم را در یک محیط متخلخل m لایه با شرایط مرزی بالادست و پایین دست نوع سوم، به صورت نیمه تحلیلی حل کرد و از الگوریتم‌های لاپلاس‌گیری معکوس عددی استفاده کرد و نهایتاً حل خود را با حل عددی و سایر روش‌های تحلیلی مقایسه کرد. یداو و کومار<sup>[۳۴]</sup> معادله‌ی دوبعدی انتقال آلودگی را در یک دامنه‌ی نیمه محدود با در نظر گرفتن شرط مرزی بالادست نوع اول، شرط اولیه و ترم منبع حل کردند. در پژوهشی دیگر نیز معادله‌ی سه بعدی انتقال جرم با استفاده از تبدیل لاپلاس، در یک دامنه‌ی نیمه محدود و با شرط مرزی بالادست نوع اول (دریکله) به صورت غلظت ثابت در محیط متخلخل حل شد.<sup>[۳۵]</sup> اخیراً، پژوهشگران از روش تبدیل لاپلاس برای حل معادله‌ی ADE در یک شاخه از رودخانه استفاده کرده و راه حل‌های تحلیلی مفیدی با استفاده از این روش برای محیط رودخانه ارائه کردند.<sup>[۳۶، ۳۷]</sup> همچنین استفاده از روش تبدیل لاپلاس در محیط متخلخل مورد توجه بسیاری از محققین نظیر کومار و همکاران<sup>[۳۸]</sup> و بیتس<sup>[۳۹]</sup> بوده است. با توجه به مروری بر تحقیقات انجام شده، امروزه حل یک بعدی معادله‌ی انتقال آلودگی با ضرایب ثابت یا متغیر در رودخانه‌ی مورد نظر بسیاری از پژوهشگران ایرانی بوده است و در این زمینه راه حل‌های مفیدی ارائه کرده‌اند.<sup>[۴۰-۴۲]</sup> همچنین برآورد ضریب پراکندگی در رودخانه‌ها نیز امری مهم بوده که در خصوص برآورد و تخمین آن، محققین بسیاری در این راستا با به کارگیری روش‌های مختلفی تلاش کرده‌اند.<sup>[۴۳، ۴۴]</sup>

امروزه شبکه‌های رودخانه‌ی بسیاری در ایران و جهان وجود دارد و برای شبیه‌سازی آلودگی ناشی از غلظت آلاینده‌ها در این شبکه‌ها، از مدل‌های عددی مبتنی بر روش‌های عددی یا روش‌های جداسازی عددی استفاده می‌شود؛ این مدل‌ها دارای خطا هستند و تاکنون حل تحلیلی برای آنها ارائه نشده است. از طرفی حل‌های تحلیلی خود مبنا بوده و به دلیل دقت بالاتر نسبت به روش‌های عددی، ابزاری برای



شکل ۱. ویژگی های یک شاخه ی رودخانه در یک شبکه ی رودخانه.

با فرایندهای جابه جایی و پراکندگی حرکت می کند؛ در این صورت فرض می شود که سیستم اختلاط کامل در گره ها وجود دارد. در شکل ۱ یک شاخه ی رودخانه ی شماتیک ملاحظه می شود که در آن، گره  $i$  به عنوان گره ورودی (بالادست رودخانه)، گره  $j$  به عنوان گره خروجی (پایین دست رودخانه)،  $L_{ij}$  طول یک شاخه ی رودخانه،  $A_{ij}$  سطح مقطع جریان،  $D_{ij}$  مقدار ضریب پراکندگی در راستای  $x$ ،  $K_{ij}$  بیانگر ضریب زوال واکنش و  $V_{ij}$  سرعت متوسط جریان در یک شاخه است و زمانی مقدار آن مثبت خواهد بود که جهت جریان از گره  $i$  به  $j$  باشد ( $V_{ij} = -V_{ji}$ ).

## ۲.۲. معادلات اساسی مدل سازی

برای یک شبکه ی رودخانه فرض می شود که آلودگی با سازوکارهای جابه جایی و پراکندگی حرکت می کند و در سرتاسر شبکه پخش می شود؛ در نتیجه تغییر غلظت در هر نقطه انجام می گیرد. با توجه به شکل ۱، معادله ی انتقال و انتشار آلودگی برای یک شاخه ی رودخانه در دامنه ی محدود  $0 \leq x \leq L_{ij}$  به صورت معادله ی ۱ در نظر گرفته می شود:

$$\frac{\partial c_{ij}}{\partial t} = D_{ij} \frac{\partial^2 c_{ij}}{\partial x^2} - V_{ij} \frac{\partial c_{ij}}{\partial x} - K_{ij} c_{ij} \quad (1)$$

$$IC : c_{ij}(x, 0) = 0 \quad (2)$$

که در آن،  $c_{ij}$  تابع غلظت آلودگی در واحد طول در مکان  $x$  و زمان  $t$ ،  $D_{ij}$  ضریب پراکندگی در راستای  $x$ ،  $V_{ij}$  سرعت متوسط جریان و  $K_{ij}$  ضریب زوال واکنش است. همچنین معادله ی ۲ نشان دهنده ی شرط اولیه ی رودخانه است. در این پژوهش، شرط اولیه برابر با صفر در نظر گرفته شده است، دلیل این امر این است که در پژوهش حاضر فرض شده است که غلظت آلاینده ی ورودی از شرط اولیه، آلاینده یی باشد که غلظت آن ناچیز بوده است. همچنین در بسیاری از تحقیقات، محققین بسیاری از شرط اولیه برای حل تحلیلی معادله ی انتقال آلودگی صرف نظر کرده اند.<sup>[۲۷، ۲۹، ۳۰]</sup> لازم به ذکر است که حل تحلیلی موجود برای شرایط اولیه ی غیر صفر نیز محدودیتی ندارد و می تواند قابل حل باشد. با توجه به این که  $c_{ij}$  در واحد طول در نظر گرفته شده است، برای تبدیل آن در واحد حجم با توجه به مساحت مقطع عرضی  $A_{ij}$  که باید در معادلات بعدی ظاهر شود از معادله ی ۳ استفاده می شود که بیانگر شرایط مرزی بالادست و پایین دست رودخانه است، لذا:

$$\begin{cases} c_i(t) = \frac{c_{ij}(0, t)}{A_{ij}} \\ c_j(t) = \frac{c_{ij}(L_{ij}, t)}{A_{ij}} \end{cases} \Rightarrow BC : \begin{cases} c_{ij}(0, t) = A_{ij} c_i(t) \\ c_{ij}(L_{ij}, t) = A_{ij} c_j(t) \end{cases} \quad (3)$$

چنان که ذکر شد، معادله ی ۳ بیانگر شرط مرزی بوده که در پژوهش حاضر، شرط مرزی بالادست و پایین دست از نوع اول (دیریکله) در نظر گرفته شده است.

صحت سنجی حل های عددی یا مدل های عددی محسوب می شوند. بنابراین ارائه ی یک راه حل دقیق تحلیلی، هم می تواند غلظت آلودگی شبکه های رودخانه را به طور دقیق محاسبه کند و هم در مشکلات ناشی از آن، به عنوان یک ابزار مدیریتی برای غربالگری سریع قبل از استفاده از مدل های پیچیده تر کاربرد دارد. طی پژوهش های صورت گرفته تاکنون، تقریباً تمام حل های انجام شده برای معادله ی انتقال آلودگی (جرم)، در یک شاخه از رودخانه بوده که به صورت عددی یا تحلیلی است و حل برای این معادله در شبکه ی رودخانه محدود و آن هم به صورت عددی است. بنابراین چنان که ذکر شد، استخراج یک راه حل تحلیلی برای معادله ی انتقال جرم در شبکه ی رودخانه در بین پژوهش های صورت گرفته تاکنون وجود نداشته است. دلیل این امر پیچیدگی زیاد کار شبکه ی رودخانه، حجم محاسبات زیاد، محدودیت های روش حل تحلیلی، پیچیدگی حل و سیستم، تشکیل ماتریس های پیچیده و ... است. در این پژوهش، مهم ترین دستاورد آن، استخراج یک راه حل تحلیلی عام برای معادله ی انتقال جرم (آلودگی) در شبکه ی رودخانه با استفاده از روش تحلیلی تبدیل لاپلاس در شرایط مرزی بالادست و پایین دست از نوع دیریکله (که شرط مرزی معمول و رایج در رودخانه است) و شرط اولیه ی صفر است. به منظور کاربرد حل تحلیلی موجود در این پژوهش، شبیه سازی روی دو نوع شبکه ی شاخه یی<sup>۱۲</sup> و حلقه یی<sup>۱۳</sup> به ازای الگوی آلودگی ثابت و متغیر برای شرایط مرزی انجام خواهد شد. در انتها نیز حل تحلیلی انجام گرفته به منظور اعتبارسنجی با حل عددی مقایسه و شاخص های خطای آماری برای دو حل تحلیلی و عددی محاسبه می شود.

## ۲. مبانی نظری و روش ها

### ۲.۱. رویکرد حل تحلیلی

به طور کلی سه نوع تبدیل انتگرالی رایج شامل تبدیل فوریه، تبدیل لاپلاس و تبدیل انتگرالی تعمیم یافته GITT در حل معادله ی انتقال جرم (آلودگی) به کار می رود. در پژوهش حاضر، چون اولویت اصلی محاسبه ی غلظت در محل اتصال شاخه های رودخانه به یکدیگر (یعنی گره های اتصال) است؛ لذا از شرایط مرزی بالادست و پایین دست از نوع دیریکله استفاده می شود. بدین منظور، چون تبدیل فوریه برای دامنه ی نامحدود بین منفی بی نهایت تا مثبت بی نهایت کاربرد دارد و از نظر دامنه ی حل محدودیت ایجاد می کند و نیز در استفاده از آن برای حل تحلیلی در شبکه ی رودخانه اثر شرایط مرزی در نظر گرفته نمی شود، کاربرد این روش توصیه نمی شود. همچنین از تبدیل انتگرال تعمیم یافته GITT به دلیل وجود مشکلاتی نظیر همگن سازی شرایط مرزی بالادست و پایین دست، بالا بودن هزینه ی محاسبات و تشکیل دستگاه معادلات از نوع دیفرانسیل معمولی توصیه نمی شود. بنابراین در این پژوهش استفاده از روش تبدیل لاپلاس به دلیل عدم وجود مشکل دامنه ی حل (نیمه محدود بودن آن)، همگن سازی شرایط مرزی و پایین بودن هزینه ی محاسبات مورد نظر خواهد بود. لازم به ذکر است که روش حل تبدیل لاپلاس می تواند ابزار مفیدی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی باشد. تبدیل لاپلاس یک تبدیل انتگرالی است که استفاده از روش های ترسیمی برای پیش بینی عملکرد سیستم را بدون حل واقعی معادلات دیفرانسیل میسر می سازد. یکی دیگر از مزایای آن این است که با حل معادله ی دیفرانسیل، می توان هر دو مؤلفه ی گذار و حالت ماندگار جواب را یکجا محاسبه کرد.<sup>[۴۵]</sup> رویکرد مدل سازی در این پژوهش بدین صورت است که فرض می شود منابع آلاینده ی ورودی با یک ضریب زوال واکنش معین در شبکه مصرف یا تحویل داده می شود. این در حالی است که منبع باقی مانده در شبکه

و ریشه‌های این معادله فقط به ازای  $s > 0$  دارای جواب است. در این صورت با یافتن ریشه‌های این معادله ثابت‌های  $B_1$  و  $B_2$  نمایان می‌شود.

$$C_{ij}(x, s) = B_1 e^{\frac{V_{ij} + \alpha_{ij}(s)}{\tau D_{ij}} x} + B_2 e^{\frac{V_{ij} - \alpha_{ij}(s)}{\tau D_{ij}} x} \quad (10)$$

که در آن:

$$\alpha_{ij}(s) = \sqrt{V_{ij}^2 + 4D_{ij}(s + K_{ij})} \quad (11)$$

به منظور یافتن ضرایب  $B_1$  و  $B_2$  از شرایط مرزی لاپلاس‌گیری شده معادله‌ی ۸ استفاده می‌شود. با جایگذاری شرایط مرزی در نقاط  $x = L_{ij}$  و  $x = 0$ ، معادلات ۱۲ به صورت زیر می‌آید:

$$\begin{aligned} C_{ij}(0, s) &= B_1 + B_2 = A_{ij} C_i(s) \\ C_{ij}(L_{ij}, s) &= B_1 e^{\left(\frac{V_{ij} L_{ij}}{\tau D_{ij}} + \frac{\alpha_{ij}(s) L_{ij}}{\tau D_{ij}}\right)} + B_2 e^{\left(\frac{V_{ij} L_{ij}}{\tau D_{ij}} - \frac{\alpha_{ij}(s) L_{ij}}{\tau D_{ij}}\right)} = A_{ij} C_j(s) \end{aligned} \quad (12)$$

همچنین برای هر شاخه‌ی  $ij$  دو نسبت بدون بعد در نظر گرفته می‌شود:

$$\theta_{ij} = \frac{V_{ij} L_{ij}}{\tau D_{ij}}, \quad \xi_{ij}(s) = \frac{\alpha_{ij}(s) L_{ij}}{\tau D_{ij}} \quad (13)$$

علت در نظر گرفتن دو نسبت بی‌بعد  $\theta_{ij}$  و  $\xi_{ij}(s)$  در معادلات ۱۳ صرفاً برای اختصارسازی روند حل است. با جایگذاری معادلات ۱۳ در معادلات ۱۲، ضرایب  $B_1$  و  $B_2$  محاسبه می‌شود:

$$B_1 = \frac{A_{ij} C_j(s) e^{-\theta_{ij}} - A_{ij} C_i(s) e^{-\xi_{ij}(s)}}{2 \sinh(\xi_{ij}(s))} \quad (14)$$

و به طور مشابه:

$$B_2 = \frac{A_{ij} C_i(s) e^{\xi_{ij}(s)} - A_{ij} C_j(s) e^{-\theta_{ij}}}{2 \sinh(\xi_{ij}(s))} \quad (15)$$

با جایگذاری ضرایب  $B_1$  و  $B_2$  معادلات ۱۴ و ۱۵ در معادله‌ی ۱۰، تابع غلظت آلودگی  $C_{ij}(x, s)$  برای یک شاخه‌ی رودخانه به صورت معادله‌ی ۱۶ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} C_{ij}(x, s) &= A_{ij} C_i(s) \frac{\sinh\left(\frac{L_{ij}-x}{L_{ij}} \xi_{ij}(s)\right)}{\sinh(\xi_{ij}(s))} e^{\frac{x \theta_{ij}}{L_{ij}}} \\ &+ A_{ij} C_j(s) \frac{\sinh\left(\frac{x}{L_{ij}} \xi_{ij}(s)\right)}{\sinh(\xi_{ij}(s))} e^{\frac{x-L_{ij}}{L_{ij}} \theta_{ij}} \end{aligned} \quad (16)$$

که در آن،  $C_{ij}(x, s)$  تابع غلظت آلودگی برحسب متغیر مکان و  $s$  لاپلاس در یک شاخه از رودخانه است.

## ۴.۲. تعمیم حل معادله‌ی انتقال آلودگی در یک شاخه‌ی رودخانه به شبکه‌ی رودخانه

پس از حل معادله‌ی انتقال آلودگی در یک شاخه‌ی رودخانه، اکنون به بررسی مسئله‌ی نحوه‌ی اتصال شاخه‌های شبکه‌ی رودخانه می‌پردازیم، به گونه‌ی که با حرکت از یک شاخه به شاخه‌ی دیگر غلظت به طور مداوم تغییر کند. برای تعمیم حل انجام شده در یک شاخه‌ی رودخانه به شبکه‌ی رودخانه معادله‌ی ۹ که لاپلاس شار عبوری از گره

دلیل انتخاب شرایط مرزی این است که شرط مرزی رایج برای رودخانه در بالادست و پایین‌دست دیریکله بوده، که در بسیاری از نرم‌افزارهای تخصصی مربوط به رودخانه هم صادق است. همچنین در این پژوهش، برای شبکه‌ی رودخانه چون مهم است که غلظت در محل اتصال شاخه‌ها یعنی گره‌ها محاسبه شود، از شرایط مرزی بالادست و پایین‌دست دیریکله استفاده شده است. چنانچه در شبکه‌ی مورد نظر، مسیری بین گره  $i$  و  $j$  وجود نداشته باشد، در این صورت  $A_{ij} = 0$  و در نتیجه  $c_{ij}(x, t) = 0$  خواهد بود. با توجه به قانون فیک برای یک منبع از گره  $i$  معادله‌ی ۴ صادق بوده که از مجموع سازوکارهای جابه‌جایی و پراکندگی حاصل شده است.

$$J_{ij}(t) = \left[ V_{ij} c_{ij}(x, t) - D_{ij} \frac{\partial c_{ij}(x, t)}{\partial x} \right]_{x=0} \quad (4)$$

در رابطه‌ی ۴،  $J_{ij}(t)$  شار عبوری حاصل از مجموع سازوکارهای جابه‌جایی و پراکندگی بوده و نشان‌دهنده‌ی ورود یک منبع به گره  $j$  است. اگر چندین شاخه به گره  $j$  وارد شود، معادله‌ی ۴ به صورت معادله‌ی ۵ بازنویسی می‌شود:

$$I_i(t) = \sum_j \left[ V_{ij} c_{ij}(x, t) - D_{ij} \frac{\partial c_{ij}(x, t)}{\partial x} \right]_{x=0} \quad (5)$$

که در آن،  $I_i(t)$  جریان خالص آلودگی خارج شده از هر گره  $i$  است.

## ۳.۲. حل معادله‌ی جابه‌جایی - پراکندگی - واکنش برای یک شاخه‌ی رودخانه

برای حل معادله‌ی ۱ در دامنه‌ی محدود  $0 \leq x \leq L_{ij}$  و شرایط مرزی  $X_{11}$  (شرط مرزی بالادست و پایین‌دست هر دو از نوع اول دیریکله<sup>۱۴</sup>) ابتدا از معادلات ۱ و ۳ (معادله‌ی انتقال جرم و شرایط مرزی آن) نسبت به  $t$  لاپلاس گرفته می‌شود. دلیل اعمال تبدیل لاپلاس در معادله‌ی انتقال جرم بر روی متغیر  $t$  این است که دامنه‌ی آن نیمه‌محدود بوده ( $0 < t < +\infty$ ) و اعمال آن بر متغیر مکان که دامنه‌ی آن محدود ( $0 < x < L$ ) است امکان‌پذیر نیست، بدین منظور:

$$\begin{aligned} s C_{ij}(x, s) - c_{ij}(x, 0) + K_{ij} C_{ij}(x, s) \\ + V_{ij} \frac{\partial C_{ij}(x, s)}{\partial x} - D_{ij} \frac{\partial^2 C_{ij}(x, s)}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

در نتیجه:

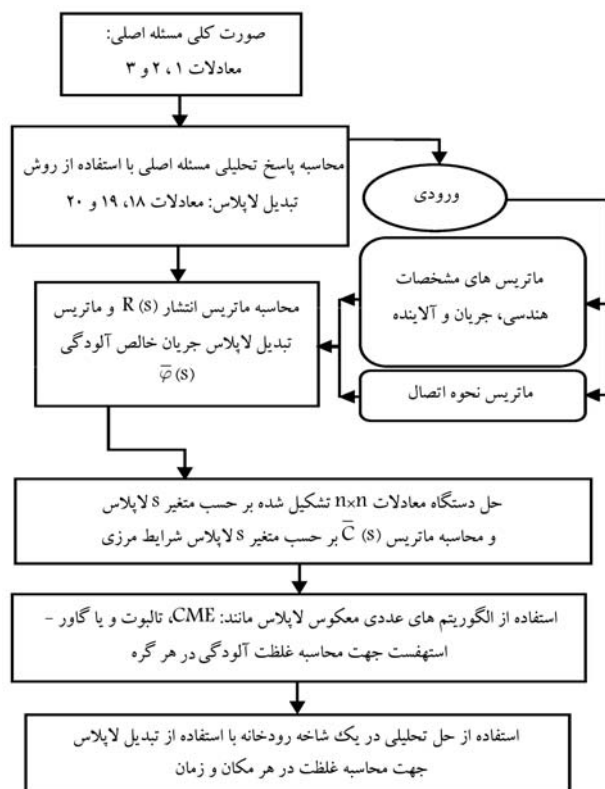
$$(s + K_{ij}) C_{ij} + V_{ij} \frac{\partial C_{ij}}{\partial x} - D_{ij} \frac{\partial^2 C_{ij}}{\partial x^2} = 0 \quad (7)$$

$$BC : \begin{cases} C_{ij}(0, s) = A_{ij} C_i(s) \\ C_{ij}(L_{ij}, s) = A_{ij} C_j(s) \end{cases} \quad (8)$$

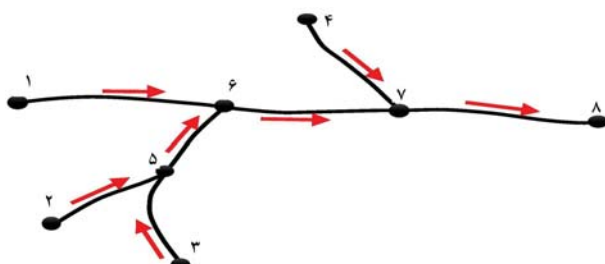
علاوه بر لاپلاس‌گیری از معادلات ۱ و ۳ از معادله‌ی ۵ نیز نسبت به  $t$  لاپلاس گرفته می‌شود:

$$\varphi_i(s) = \sum_j \left[ V_{ij} C_{ij}(x, s) - D_{ij} \frac{\partial C_{ij}(x, s)}{\partial x} \right]_{x=0} \quad (9)$$

که در آن،  $\varphi_i(s)$  بیانگر تبدیل لاپلاس  $I_i(t)$ ، شار عبوری از گره  $i$  است. به منظور حل معادله‌ی جابه‌جایی - پراکندگی - واکنش یعنی معادله‌ی ۱ و با لاپلاس‌گیری از این معادله، رابطه ۶ به دست آمد که یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی<sup>۱۵</sup> همگن بوده



شکل ۲. فلوچارت کلی مدل سازی تحلیلی شبکه‌ی رودخانه با استفاده از روش تبدیل لاپلاس.



شکل ۳. شماتیک شبکه‌ی شاخه‌یی با جهت جریان در هر مسیر.

### ۳. الگوریتم حل

در فلوچارت شکل ۲ روند کلی مدل سازی آمده است. به منظور شبیه سازی کلی یک شبکه‌ی رودخانه با توجه به رابطه‌ی تحلیلی استخراج شده از روش تبدیل لاپلاس براساس معادلات ۱۸ تا ۲۰، داده‌های ورودی برای شبکه شامل ماتریس نحوه‌ی اتصال شاخه‌ها، ماتریس میانگین سرعت، ماتریس ضرایب پراکندگی، ماتریس ضریب زوال واکنش، ماتریس طول رودخانه، ماتریس سطح مقطع عرضی شاخه‌ها، الگوی غلظت ورودی مربوط به شرایط مرزی و مدت زمان لازم برای شبیه سازی است. لازم به ذکر است که ماتریس نحوه‌ی اتصال یک ماتریس  $n \times n$  است که  $n$  برابر با تعداد گره‌ها بوده و این ماتریس به صورت درایه‌های صفر و ۱ بیان می‌شود. به عبارت دیگر، برای یک شبکه‌ی معمول اگر اتصالی وجود داشته باشد مقدار درایه برای دو گره مورد نظر برابر با ۱ خواهد بود و اگر اتصالی وجود نداشته باشد، درایه مورد نظر برابر با صفر خواهد شد. در یک توضیح تکمیلی تر، با توجه به شبکه‌ی رودخانه‌ی شاخه‌یی شکل ۳، ماتریس نحوه‌ی اتصال چنین است:

ز است، مد نظر بوده است. در این صورت با در نظر گرفتن معادله‌ی ۱۶ و اعمال تغییرات لازم آن برای جایگذاری در معادله‌ی ۹، معادلات ۱۷ به دست می‌آید:

$$\begin{cases} D_{ij} \frac{dC_{ij}(x, s)}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{-A_{ij}C_i(s)D_{ij} \cosh(\xi_{ij}(s))\xi_{ij}(s)}{L_{ij} \sinh(\xi_{ij}(s))} \\ + \frac{A_{ij}C_i(s)D_{ij}\theta_{ij}}{L_{ij}} + \frac{A_{ij}C_j(s)D_{ij}\xi_{ij}(s)e^{-\theta_{ij}}}{L_{ij} \sinh(\xi_{ij}(s))} \\ V_{ij}C_{ij}(0, s) = V_{ij}A_{ij}C_i(s) \end{cases} \quad (17)$$

با جایگذاری معادلات ۱۳ و ۱۷ در معادله‌ی ۹، نهایتاً معادله‌ی ۱۸ به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \varphi_i(s) = \sum_j \left[ A_{ij}C_i(s) \left\{ \frac{V_{ij}}{2} + \frac{\alpha_{ij}(s)}{2 \tanh(\xi_{ij}(s))} \right\} \right. \\ \left. - A_{ij}C_j(s) \left\{ \frac{\alpha_{ij}(s)e^{-\theta_{ij}}}{2 \sinh(\xi_{ij}(s))} \right\} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

بنابراین با دانستن تبدیل لاپلاس غلظت گره  $\bar{C}(s) = \{C_1(s), \dots, C_m(s)\}$  جایی که  $m$  تعداد گره‌هاست، می‌توان با توجه به  $\bar{I}(t) = \{I_1(t), \dots, I_m(t)\}$  (جریان خالص آلودگی خارج شده از هر گره)،  $\bar{\varphi}(s) = \{\varphi_1(s), \dots, \varphi_m(s)\}$  (تبدیل لاپلاس  $\bar{I}$ ) را محاسبه کرد و  $\bar{C}(s)$  را به دست آورد. به عبارت دیگر برای هر گره  $i$ ، یک معادله‌ی خطی در  $C_1(s), C_2(s), \dots, C_m(s)$  وجود دارد. از این رو  $\bar{C}(s)$  و  $\bar{\varphi}(s)$  بردارهای ستونی خواهند بود:

$$R(s)\bar{C}(s) = \bar{\varphi}(s) \quad (19)$$

که در آن:

$$R_{ij}(s) = \begin{cases} \sum_k A_{ik} \left[ \frac{V_{ik}}{2} + \frac{\alpha_{ik}(s)}{2 \tanh(\xi_{ik}(s))} \right] & i = j \\ \frac{-A_{ij}\alpha_{ij}(s)e^{-\theta_{ij}}}{2 \sinh(\xi_{ij}(s))} & otherwise \end{cases} \quad (20)$$

$R(s)$  به عنوان ماتریس انتشار در نظر گرفته می‌شود و برای هر گره در شبکه، یک ردیف و یک ستون دارد. ماتریس  $R(s)$  یک ماتریس نامتقارن و پراکنده  $n \times n$  تعداد گره‌هاست که عناصر قطری (مورب) آن همگی مثبت اند. همچنین اگر اتصالی بین نقاط  $i$  و  $j$  وجود نداشته باشد، درایه‌های آن صفر و اگر اتصالی وجود داشته باشد عناصر آن منفی خواهد بود. با توجه به توابع  $R(s)$  و  $\bar{\varphi}(s)$  می‌توان  $\bar{C}(s)$  را با استفاده از الگوریتم‌های حل عددی دستگاه معادلات محاسبه کرد و در نهایت برای یافتن مقادیر  $c_1(t), c_2(t), \dots, c_m(t)$  می‌توان از الگوریتم‌های لاپلاس‌گیری معکوس عددی مانند CME [۴۶]، گاور - استهفست [۴۷]، تالبوت [۴۸]، تالبوت [۴۹] و ... استفاده کرد. در این پژوهش از الگوریتم لاپلاس‌گیری معکوس عددی CME به دلیل بالا بودن سرعت و دقت محاسبات، نسبت به دو الگوریتم گاور - استهفست و تالبوت استفاده شده است. در روش مذکور، لاپلاس‌گیری معکوس عددی بر اساس توزیع نمایی ماتریس متمرکز (CME) انجام می‌شود، که ضمن حفظ دقت نتایج در مرتبه‌ی  $10^{-6}$  نیز از نظر عددی پایدار است. این در حالی است که سایر روش‌ها برای مرتبه‌ی  $10^{-6}$  ناپایدار می‌شوند، همچنین روش CME هنگام کار با توزیع احتمالاتی، روشی ایده‌آل است. [۴۶]

جدول ۱. مشخصات جریان و آلاینده تخلیه شده در شبکه‌ی شاخه‌یی.

مسیر	s	V(m/s)	D(m <sup>۲</sup> /s)	Q(m <sup>۳</sup> /s)
۱۶	۰/۰۰۰۱	۰/۴	۸	۱۵
۶۷	۰/۰۰۰۱	۰/۸۶	۱۵	۳۳
۷۸	۰/۰۰۰۱	۱/۰۲	۱۰	۴۰
۲۵	۰/۰۰۰۱	۰/۲۳	۱۸	۸
۵۶	۰/۰۰۰۱	۰/۴۸	۱۰	۱۸
۳۵	۰/۰۰۰۱	۰/۲۸۵	۵	۱۰
۴۷	۰/۰۰۰۱	۰/۱۸۶	۲۰	۷

#### ۴. نتایج و بحث

به منظور استفاده از حل تحلیلی صورت گرفته در این پژوهش برای شبکه‌ی رودخانه، ابتدا کاربرد حل مذکور برای دو نوع شبکه‌ی شاخه‌یی و حلقه‌یی با شرایط مرزی ثابت و متغیر مورد بررسی قرار گرفته است. سپس با توجه به این که برای شبکه‌ی رودخانه راه حل تحلیلی وجود ندارد، به منظور ارزیابی و اعتبارسنجی حل انجام شده، از حل عددی تمام ضمنی<sup>۱۹</sup> تفاضل محدود<sup>۲۰</sup> با تقریب مشتق مرکزی در مکان<sup>۲۱</sup> با هدف کاهش مقدار پراکندگی عددی استفاده شده است. در نهایت با استفاده از شاخص‌های آماری نظیر ضریب همبستگی ( $R^2$ )، جذر میانگین مربع خطاها (RMSE) و میانگین خطای مطلق (MAE) دو حل عددی و تحلیلی با یکدیگر مقایسه شده است.

#### ۱.۴. مثال اول: ارزیابی و کاربرد حل تحلیلی در مدل‌سازی شبکه‌ی رودخانه شاخه‌یی

در مثال اول، شبکه‌ی رودخانه شاخه‌یی به صورت شکل ۳ در نظر گرفته شده است. برای نام‌گذاری گره‌ها از اعداد استفاده شده و جهت جریان در آن مشخص شده است. در تمامی شاخه‌ها مقطع از نوع کانال مستطیلی به عرض ۵ متر و طول ۴ کیلومتر است و تمامی مشخصات جریان و کانال در جدول ۱ آمده است. در ادامه نیز دو شرط مرزی ثابت و متغیر برای کاربرد حل تحلیلی برای شبکه‌ی شاخه‌یی مورد نظر در نظر گرفته شده است.

##### ۱.۴.۱. مدل‌سازی شبکه‌ی رودخانه شاخه‌یی با شرایط مرزی ثابت

برای شبیه‌سازی شبکه‌ی شاخه‌یی مدنظر با شرایط مرزی ثابت، زمان شبیه‌سازی ۱۰ ساعت و غلظت در نقاط ورودی ۱، ۲، ۳ و ۴ به ترتیب برابر با ۸، ۵، ۷ و ۴ کیلوگرم بر مترمکعب در نظر گرفته شده است. شکل ۴ نتایج حاصل از مدل‌سازی شبکه‌ی شاخه‌یی شکل ۳ را در دو زمان ۵/۰ و ۸/۰ (زمان بی‌بعد شده) برای چهار مسیر ۱۶۷۸، ۲۵۶۷۸، ۳۵۶۷۸ و ۴۷۸ نشان می‌دهد. چنان که در شکل ۴ و مقایسه‌ی آماری دو حل تحلیلی و عددی در جدول ۲ مشاهده می‌شود، دو حل تحلیلی و عددی دارای انطباق خوبی نسبت به هم هستند.

با توجه به شکل ۴، در مسیر ۴۷۸، ابتدا آلودگی با غلظت ثابت ۴ کیلوگرم بر مترمکعب از نقطه ۴ وارد مسیر مورد نظر شده و سپس در کیلومتر ۵/۰ به علت ورود برآیند غلظت از شاخه‌ی ۶۷ با گذشت زمان، غلظت در مسیر تقویت شده و افزایش می‌یابد. در مسیر ۱۶۷۸، غلظت ثابت ۸ کیلوگرم بر مترمکعب از مرز بالادست گره

$$= \text{ماتریس نحوه‌ی اتصال} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

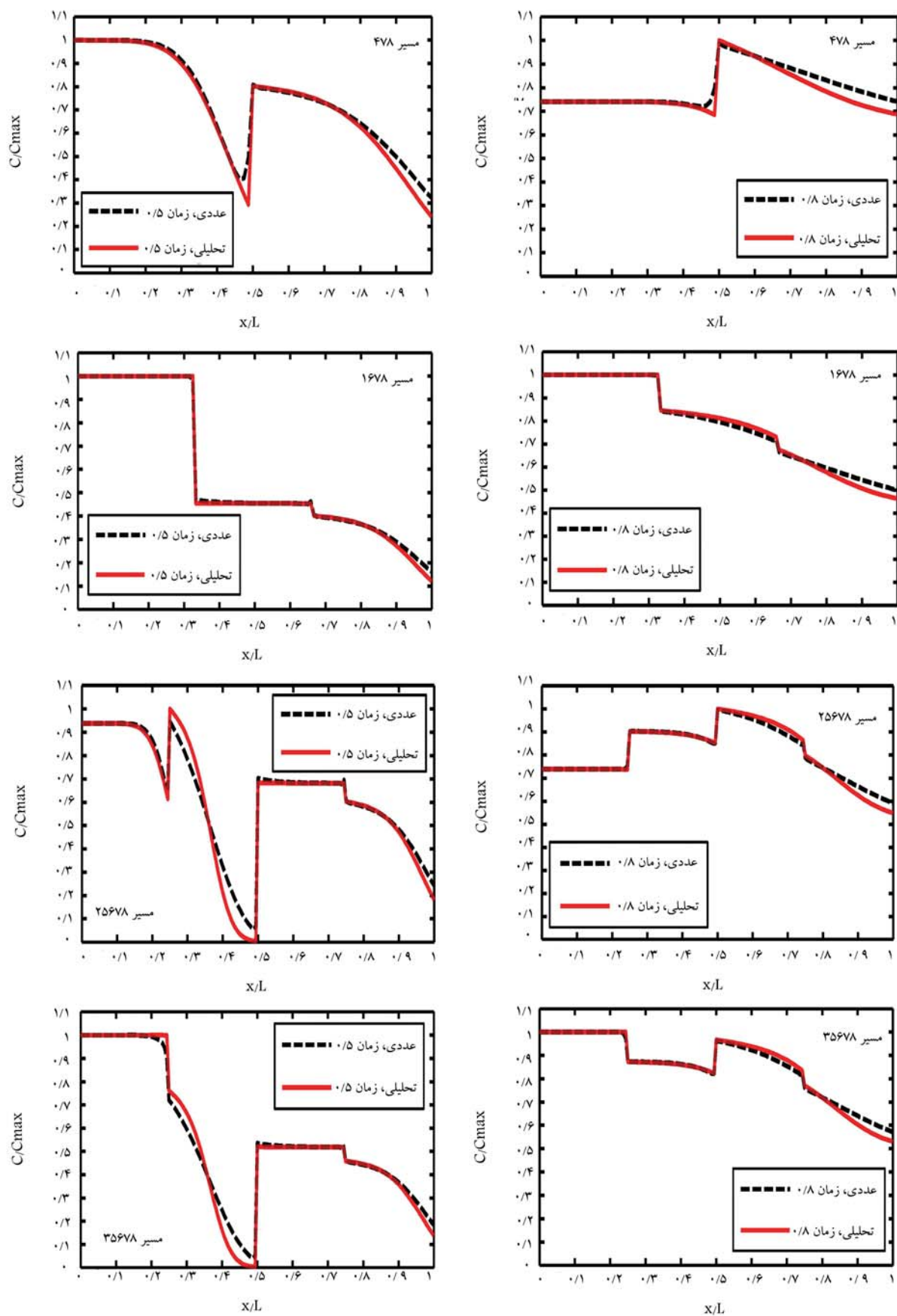
ماتریس نحوه‌ی اتصال در ماتریس رابطه‌ی ۲۱، به طور مثال، سطر اول و ستون ششم برابر با یک شده است که اتصال گره نقطه ۱ به ۶ را نشان می‌دهد. در خصوص توضیحات تکمیلی در مورد ماتریس‌های مشخصات هندسی، جریان و آلاینده، این ماتریس‌ها همگی براساس ماتریس نحوه‌ی اتصال پر و مقداردهی می‌شود. به طور مثال، با توجه به شبکه‌ی رودخانه شاخه‌یی شکل ۳، ماتریس‌های ذکر شده عبارت‌اند از:

$$V\left(\frac{m}{s}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & V_{25} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & V_{25} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{27} & 0 \\ 0 & V_{52} & V_{52} & 0 & 0 & V_{56} & 0 & 0 \\ V_{61} & 0 & 0 & 0 & V_{65} & 0 & V_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_{72} & 0 & V_{76} & 0 & V_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{87} & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$D\left(\frac{m^2}{s}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{25} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{25} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{27} & 0 \\ 0 & D_{52} & D_{52} & 0 & 0 & D_{56} & 0 & 0 \\ D_{61} & 0 & 0 & 0 & D_{65} & 0 & D_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{72} & 0 & D_{76} & 0 & D_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{87} & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$A(m^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{25} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{25} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{27} & 0 \\ 0 & A_{52} & A_{52} & 0 & 0 & A_{56} & 0 & 0 \\ A_{61} & 0 & 0 & 0 & A_{65} & 0 & A_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{72} & 0 & A_{76} & 0 & A_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{87} & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

در ماتریس‌های ۲۲ تا ۲۴، V بیان‌گر ماتریس جریان، D بیان‌گر ماتریس آلاینده و A بیان‌گر ماتریس مشخصات هندسه‌ی رودخانه است. پس از شبیه‌سازی، خروجی کار به صورت پروفیل غلظت آلودگی در زمان و مکان دلخواه خواهد بود.

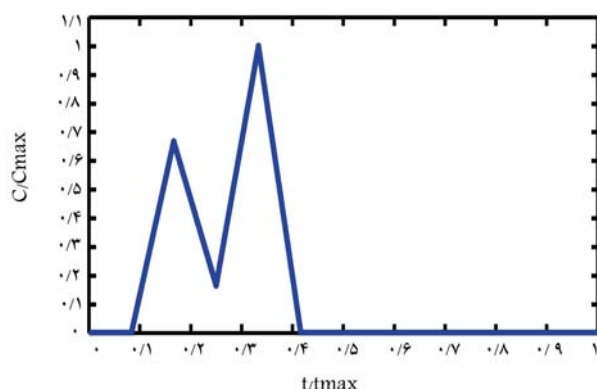


شکل ۴. مقایسه‌ی پروفیل مکانی غلظت دو حل تحلیلی و عددی برای زمان‌های بی بعد شده ۰/۵ و ۰/۸ برای مثال ۱-۴.

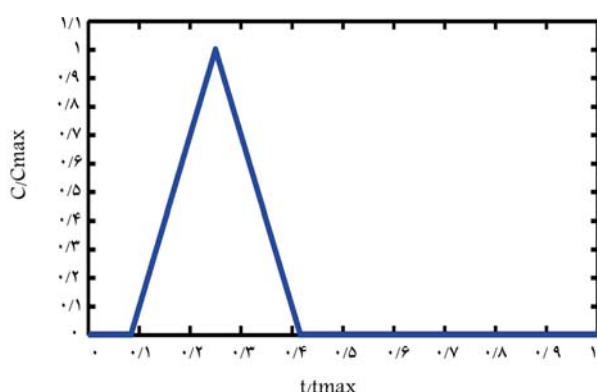


جدول ۲. مقایسه پروفیل مکانی دو حل تحلیلی و عددی با استفاده از شاخص‌های آماری برای شبکه‌ی رودخانه شاخه‌یی با شرط مرزی ثابت.

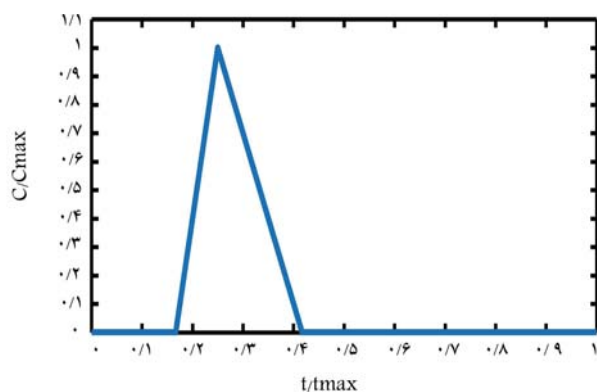
مسیر و زمان	$RMSE$ ( $kg/m^3$ )	$MAE$ ( $kg/m^3$ )	$R^2$ (%)
مسیر ۴۷۸، زمان ۵/۵	۰/۱۴۰۵	۰/۰۷۳۵	۹۸/۸۴
مسیر ۱۶۷۸، زمان ۵/۵	۰/۰۸۵۴	۰/۰۴۰۸	۹۹/۹۲
مسیر ۲۵۶۷۸، زمان ۵/۵	۰/۲۳۶	۰/۱۴۲۸	۹۸/۵۶
مسیر ۳۵۶۷۸، زمان ۵/۵	۰/۲۴۳۲	۰/۱۴۴۵	۹۹/۱
مسیر ۴۷۸، زمان ۸/۸	۰/۱۷۰۲	۰/۱۰۸۱	۹۰/۷۸
مسیر ۱۶۷۸، زمان ۸/۸	۰/۱۴۴۱	۰/۰۹۹۹	۹۹/۳۴
مسیر ۲۵۶۷۸، زمان ۸/۸	۰/۱۲۵۱	۰/۰۷۸۳	۹۹/۰۲
مسیر ۳۵۶۷۸، زمان ۸/۸	۰/۱۲۶	۰/۰۷۸۹	۹۹/۱۵



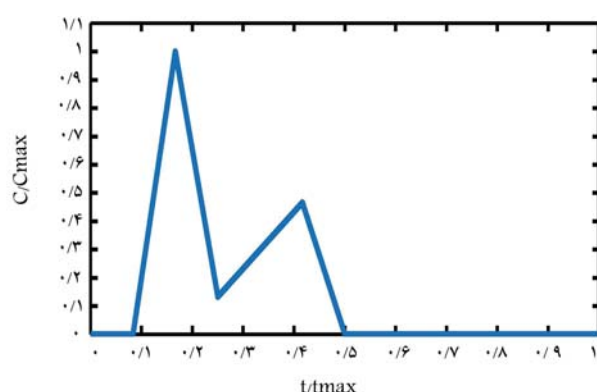
شکل ۵. الگوی غلظت ورودی از نقطه ۱.



شکل ۶. الگوی غلظت ورودی از نقطه ۲.



شکل ۷. الگوی غلظت ورودی از نقطه ۳.



شکل ۸. الگوی غلظت ورودی از نقطه ۴.

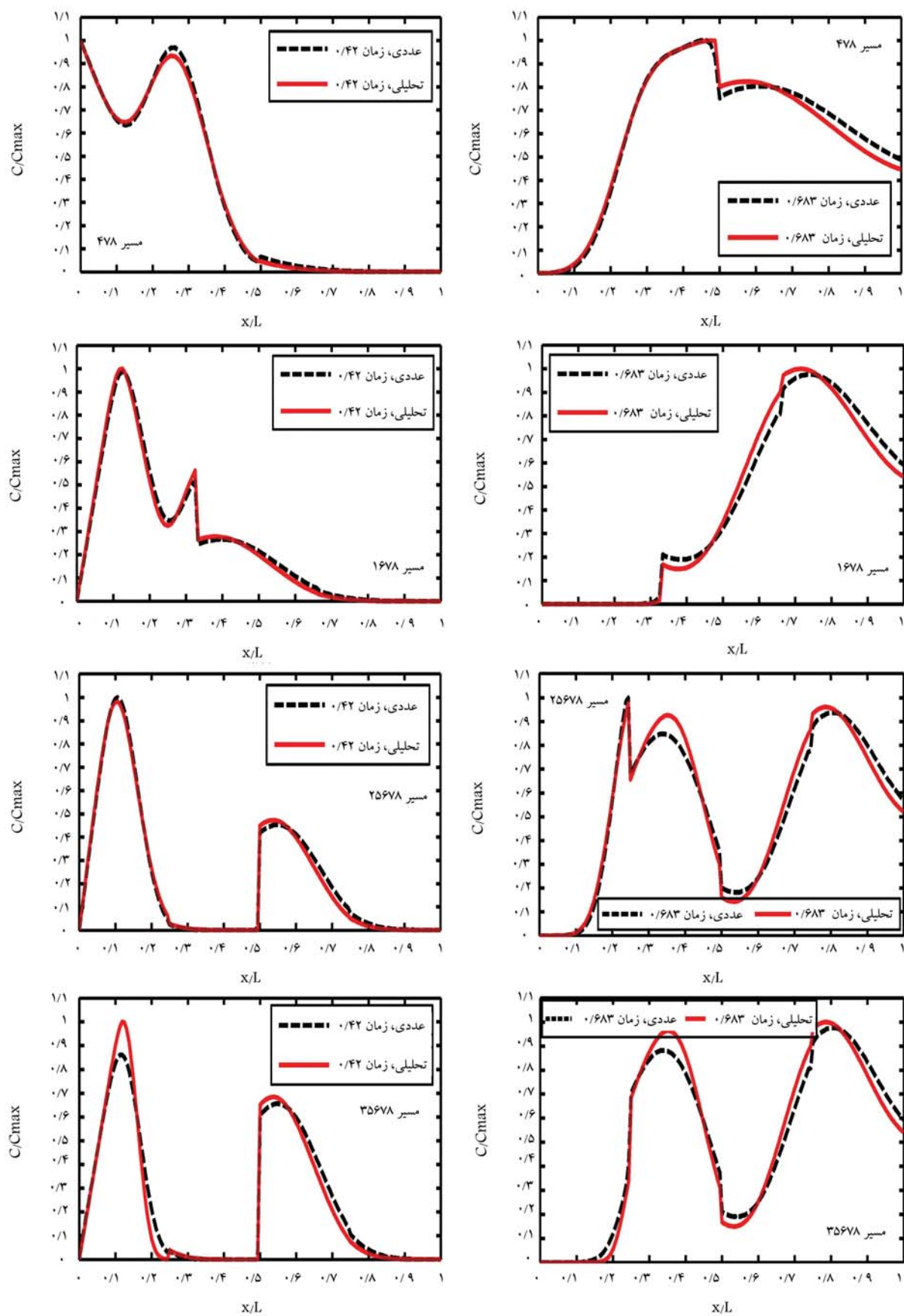
۱ وارد مسیر شده و در کیلومتر ۳۳/۰ به دلیل بارگذاری ناشی از برآیند غلظت شاخه‌ی ۵۶، با گذشت زمان غلظت کاهش می‌شود. سپس در شاخه‌ی ۶۷ و در گره ۷ به علت بارگذاری ناشی از شاخه‌ی ۴۷، برآیند غلظت‌ها کاهش یافته و غلظت در کیلومتر ۶۶/۰ در زمان ۸/۰ کاهش می‌یابد. لازم به ذکر است که اصطلاح «بارگذاری» به حاصل ضرب دبی در غلظت گفته می‌شود. در مسیر ۲۵۶۷۸، در کیلومتر ۲۵/۰ به علت ورود موج غلظت از مسیر ۳۵، غلظت تقویت شده و این افزایش غلظت در کیلومتر ۵/۰ به دلیل بارگذاری ناشی از مسیر ۱۶ ادامه می‌یابد و در کیلومتر ۷۵/۰ با گذشت زمان کاهش پیدا می‌کند. در انتها برای مسیر ۳۵۶۷۸، در کیلومترهای ۲۵/۰ و ۷۵/۰ به دلیل بارگذاری‌های ناشی از مسیرهای ۲۵ و ۴۷ برآیند غلظت کاهش یافته و با گذشت زمان غلظت کاهش پیدا می‌کند. به همین ترتیب به دلیل موج تقویتی غلظت از مسیر ۱۶، مسیر ۶۷ در کیلومتر ۵/۰ افزایش غلظت را به دنبال خواهد داشت.

بنابراین، با توجه به شکل ۴، در محل‌های اتصال شاخه‌ها به یکدیگر یعنی نقاط ۵، ۶ و ۷، تغییر غلظت آلودگی رخ می‌دهد که این تغییرات در برخی مسیرها روند افزایشی و در برخی دیگر روند کاهشی دارد، دلیل این امر تغییرات دبی و سطح مقطع جریان در هر شاخه است. در شکل ۴ در زمان ۸/۰ برای مسیر ۴۷۸ مقدار ناچیزی اختلاف در انتها بین حل عددی با تحلیلی وجود دارد که علت آن وجود خطاهای رایج در حل‌های عددی، مانند خطای پراکندگی عددی، خطای گرد کردن<sup>۲۲</sup> و خطای کوتاه کردن جملات ریاضی<sup>۲۳</sup> بسط تیوراست که این خطاها در حل‌های تحلیلی وجود ندارد.

#### ۲.۱.۴. مدل‌سازی شبکه‌ی رودخانه شاخه‌یی با شرایط مرزی متغیر

در این بخش به منظور مدل‌سازی شبکه‌ی شاخه‌یی شکل ۳، زمان شبیه‌سازی ۱۲ ساعت و الگوی غلظت ورودی در نقاط ۱، ۲، ۳ و ۴ به ترتیب مطابق شکل‌های ۵ تا ۸ است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی شبکه‌ی شاخه‌یی شکل ۳ برای چهار مسیر ۴۷۸، ۱۶۷۸، ۲۵۶۷۸ و ۳۵۶۷۸ در دو زمان ۴۲/۰ و ۶۸۳/۰ (زمان بی‌بعد شده) مطابق با شکل ۹ است. همچنین شاخص‌های آماری محاسبه شده حاصل از دو حل تحلیلی و عددی در جدول ۳ قابل مشاهده است. با توجه به شکل ۹، آلودگی‌های مورد نظر به صورت الگوهای مثلثی منظم و نامنظم متغیر با زمان، از چهار نقطه‌ی ۱، ۲، ۳ و ۴ وارد سیستم می‌شوند و به دلیل این که آلودگی به صورت ثابت و پیوسته نیست، آلودگی در انتها با گذشت زمان خارج می‌شود. در شکل ۹، در مسیر ۴۷۸، در ابتدا آلودگی مورد نظر با الگوی مثلثی نامنظم با دو پیک غلظت وارد مسیر شده و در کیلومتر ۵/۰ به علت ورود برآیند





شکل ۹. مقایسه‌ی پروفیل مکانی غلظت دو حل تحلیلی و عددی برای زمان‌های بی بعد شده  $0.42$  و  $0.683$  برای مثال ۴-۱-۲.

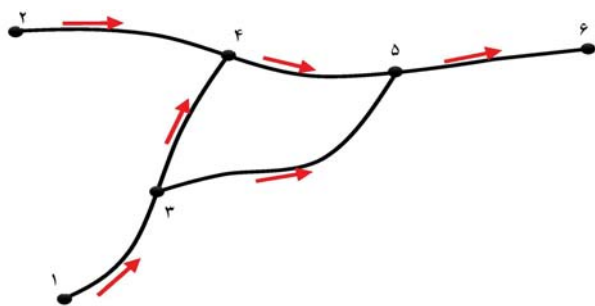
جدول ۳. مقایسه‌ی پروفیل مکانی دو حل تحلیلی و عددی با استفاده از شاخص‌های آماری برای شبکه‌ی رودخانه‌ی شاخه‌یی با شرط مرزی متغیر.

مسیر و زمان	$RMSE$ ( $kg/m^3$ )	$MAE$ ( $kg/m^3$ )	$R^2$ (%)
۴۷۸، زمان ۰/۴۲	۰/۰۰۹۳	۰/۰۰۶۳	۹۹/۹
۱۶۷۸، زمان ۰/۴۲	۰/۰۱۹۷	۰/۰۱۵	۹۹/۵۸
۲۵۶۷۸، زمان ۰/۴۲	۰/۰۱۰۶	۰/۰۰۷۲	۹۹/۶۶
۳۵۶۷۸، زمان ۰/۴۲	۰/۰۱۸۸	۰/۰۱۱۵	۹۸/۱۸
۴۷۸، زمان ۰/۶۸۳	۰/۰۱۶	۰/۰۱۲	۹۹/۱۳
۱۶۷۸، زمان ۰/۶۸۳	۰/۰۱۸۶	۰/۰۱۳۶	۹۸/۷۹
۲۵۶۷۸، زمان ۰/۶۸۳	۰/۰۲۰۸	۰/۰۱۶۹	۹۸/۲۲
۳۵۶۷۸، زمان ۰/۶۸۳	۰/۰۲۱۶	۰/۰۱۷۶	۹۸/۴۱

بارگذاری ناشی از شاخه‌ی ۶۷، با گذشت زمان الگوی غلظت کاهش می‌یابد. تاخیر در زمان تزریق آلودگی در هریک از بارگذاری‌ها می‌تواند یکی از عوامل کاهش غلظت در مسیر ۴۷۸ باشد. در مسیر ۱۶۷۸، آلودگی با دو پیک غلظت از گره ۱ وارد مسیر مورد نظر شده و در کیلومتر ۰/۳۳ به علت کاهش برآیند غلظت در اثر بارگذاری ناشی از برآیند غلظت در مسیر ۵۶، غلظت شاخه‌ی ۶۷ کاهش می‌یابد. اما با گذشت زمان در اثر ورود موج تقویتی مثبت غلظت از کیلومترهای ۰/۳۳ و ۰/۶۶ یعنی نقاط ۶ و ۷ (مربوط به شاخه‌های ۴۷ و ۵۶) وارد مسیر شده و در زمان ۰/۸ غلظت افزایش می‌یابد. در مسیر ۲۵۶۷۸، در ابتدا آلودگی به صورت یک پیک غلظت از گره ۲ وارد شده و در کیلومتر ۰/۲۵ (گره ۵) به دلیل تأخیر در زمان تزریق غلظت از شاخه‌ی ۳۵، شاخه‌ی ۵۶ غلظت آن ناچیز بوده و در کیلومتر ۰/۵ (گره ۶) به دلیل موج تقویتی غلظت از شاخه‌ی ۲۶، غلظت مسیر ۶۷ افزایش می‌یابد. با گذشت زمان و در زمان ۰/۸ به دلیل برآیند بارگذاری مثبت وارده از شاخه‌ی ۳۵، غلظت روند افزایشی در طول مسیر پیدا کرده و در انتها با گذشت زمان کم‌تر شده و خارج می‌شود. در مسیر ۳۵۶۷۸ نیز، همانند مسیر ۲۵۶۷۸ بوده و آلودگی در ابتدا در کیلومتر ۰/۲۵ به دلیل تأخیر در بارگذاری ورودی از شاخه‌ی ۲۵، غلظت در شاخه‌ی ۵۶ ناچیز بوده که در طول گذشت زمان، غلظت روند افزایشی پیدا کرده و کم‌کم در انتها خارج می‌شود. در شکل ۹، نتایج نشان می‌دهد که اختلاف بین حل تحلیلی و عددی ناچیز بوده و دو حل تقریباً بر هم منطبق‌اند و برای بالا بردن دقت می‌توان گام مکانی و گام زمانی را در هر دو حل تا حد ممکن کوچک‌تر در نظر گرفت تا این اختلاف بسیار کم‌تر شود. عمده اختلاف‌ها برای دو حل معمولاً در محل‌قله نمودارها روی می‌دهد که دلیل اصلی آن وجود خطای پراکندگی عددی در حل عددی است.

## ۲.۴. مثال دوم: ارزیابی و کاربرد حل تحلیلی در مدل‌سازی شبکه‌ی رودخانه حلقه‌یی

در مثال دوم، شبکه‌ی رودخانه حلقه‌یی به صورت شکل ۱۰ در نظر گرفته شده است. در این شبکه گره‌ها به صورت اعداد نام‌گذاری شده و جهت جریان مشخص شده است، همچنین تمامی مقاطع در این شبکه از نوع کانال مستطیلی



شکل ۱۰. شکل شماتیک شبکه‌ی حلقه‌یی با جهت جریان در هر مسیر.

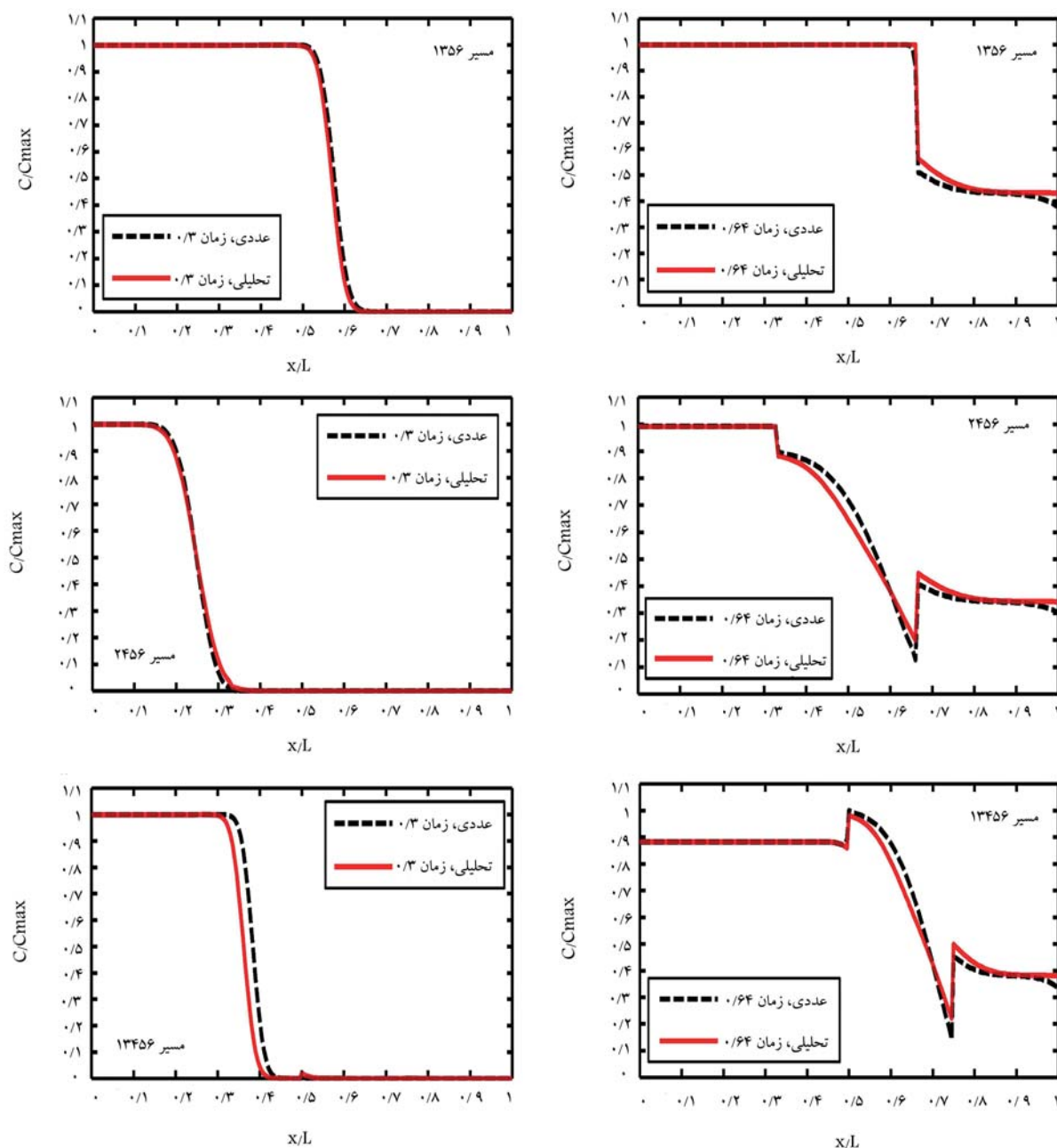
جدول ۴. مشخصات جریان و آلاینده‌ی تخلیه شده در شبکه‌ی حلقه‌یی.

مسیر	$s$	$V(m/s)$	$D(m^2/s)$	$Q(m^3/s)$
۲۴	۰/۰۰۰۱	۰/۳۵	۲۰	۸
۴۵	۰/۰۰۰۴	۰/۵	۸	۱۴/۲
۵۶	۰/۰۰۰۱	۰/۷۳	۱۲	۲۵
۱۳	۰/۰۰۰۵	۱/۳۲	۵	۱۷
۳۴	۰/۰۰۰۵	۰/۳۳	۱۵	۶/۲
۳۵	۰/۰۰۰۹	۰/۵۳	۱۰	۱۰/۸

با عرض ۵ متر و طول ۵ کیلومتر است. مشخصات جریان و کانال شامل شیب ( $S$ )، سرعت ( $V$ )، ضریب پراکندگی ( $D$ ) و دبی جریان ( $Q$ ) برای هر شاخه در جدول ۴ آمده است. به منظور کاربرد حل تحلیلی صورت گرفته در مدل‌سازی شبکه‌ی حلقه‌یی، دو شرایط مرزی ثابت و متغیر در نظر گرفته شده است.

### ۱.۲.۴. مدل‌سازی شبکه‌ی رودخانه‌ی حلقه‌یی با شرایط مرزی ثابت

به منظور شبیه‌سازی شبکه‌ی مورد نظر با شرایط مرزی ثابت در این بخش، زمان شبیه‌سازی ۱۰ ساعت و غلظت در نقاط ورودی ۱ و ۲ به ترتیب برابر با ۴ و ۵ کیلوگرم بر مترمکعب در نظر گرفته شده است. همچنین نتایج حاصل از شبیه‌سازی در زمان‌های ۰/۳ و ۰/۶۴ (زمان بی‌بعد شده) برای سه مسیر ۱۳۴۵۶، ۱۳۵۶ و ۱۳۵۶ مطابق شکل ۱۱ است. با توجه به شکل ۱۱، در مسیر ۱۳۵۶، ابتدا آلودگی با غلظت ثابت ۴ کیلوگرم بر مترمکعب از مرز ۱ وارد مسیر مورد نظر شده و در کیلومتر ۰/۳۳ غلظت آلاینده ثابت مانده و در کیلومتر ۰/۶۶ با گذشت زمان در زمان ۰/۶۴، به دلیل برآیند غلظت ناشی از شاخه‌ی ۴۵، در شاخه‌ی ۵۶ از میزان غلظت آلودگی کسر می‌شود. در مسیر ۲۴۵۶، ابتدا آلودگی با غلظت ۵ کیلوگرم بر مترمکعب از گره ۲ وارد سیستم شده و در طول مسیر حرکت می‌کند و در کیلومتر ۰/۳۳ به دلیل موج منفی برآیند بارگذاری ناشی از شاخه‌ی ۳۴، در شاخه‌ی ۴۵، کاهش غلظت رخ می‌دهد و در انتها نیز، در کیلومتر ۰/۶۶ به دلیل موج تقویتی غلظت از شاخه‌ی ۳۵، برآیند غلظت در شاخه‌ی ۵۶ تقویت شده و افزایش می‌یابد. در مسیر ۱۳۴۵۶، غلظت آلودگی ۴ کیلوگرم بر مترمکعب از نقطه ۱ حرکت کرده و به دلیل بارگذاری برابر با شاخه‌ی ۳۵، در کیلومتر ۰/۲۵ تا ۰/۵، غلظت آلاینده همان‌طور ثابت می‌ماند و در کیلومتر ۰/۵ (گره ۴) به علت موج مثبت غلظت از شاخه‌ی ۲۴، غلظت در شاخه‌ی ۴۵ افزایش یافته و به طور مشابه نیز، در نتیجه بارگذاری مثبت شاخه‌ی ۳۵، در ادامه مسیر برای شاخه‌ی ۵۴ نیز، افزایش غلظت با گذشت زمان روی می‌دهد. چنان‌که در شکل ۱۱ ملاحظه می‌شود،



شکل ۱۱. مقایسه پروفیل مکانی غلظت دو حل تحلیلی و عددی برای زمان‌های بی‌بعد شده ۰/۳ و ۰/۶۴ برای مثال ۴-۳-۱.

جدول ۵. مقایسه‌ی پروفیل مکانی دو حل تحلیلی و عددی با استفاده از شاخص‌های آماری برای شبکه‌ی رودخانه حلقه‌یی با شرط مرزی ثابت.

مسیر و زمان	$RMSE$ ( $kg/m^3$ )	$MAE$ ( $kg/m^3$ )	$R^2$ (%)
۱۳۵۶، زمان ۰/۳	۰/۰۷۹۳	۰/۰۲۴۶	۹۹/۸۵
۲۴۵۶، زمان ۰/۳	۰/۰۶۲	۰/۰۲۵۱	۹۹/۹۲
۱۳۴۵۶، زمان ۰/۳	۰/۰۸۲	۰/۰۸۸	۹۷/۵۶
۱۳۵۶، زمان ۰/۶۴	۰/۰۶۴۸	۰/۰۳۰۴	۹۹/۸۱
۲۴۵۶، زمان ۰/۶۴	۰/۱۴۷۳	۰/۰۹۶۴	۹۹/۱۴
۱۳۴۵۶، زمان ۰/۶۴	۰/۱۲۸۱	۰/۰۷۳۶	۹۸/۸۶

نتایج حاصل از حل عددی انطباق خوبی با حل تحلیلی در این پژوهش دارد. مقایسه‌ی آماری دو حل تحلیلی و عددی برای شبکه‌ی حلقه‌یی شکل ۱۰ در هریک از مسیرها با استفاده از شاخص‌های آماری در جدول ۵ به ازای دو زمان مذکور آمده است. نتایج آماری نشان می‌دهد که دو حل تحلیلی و عددی انطباق خوبی دارند.

چنان که ذکر شد، با توجه به شکل ۱۱، با افزایش زمان، تغییراتی در نمودارهای سه مسیر ایجاد می‌شود که دلیل آن، تغییرات غلظت در محل‌های اتصال یعنی نقاط ۳، ۴ و ۵ است. این تغییرات به دلیل تغییر مشخصات جریان و سطح مقطع عرضی جریان در هر شاخه رخ می‌دهد و باعث کاهش یا افزایش غلظت از یک شاخه به شاخه‌ی دیگر می‌شود.

جدول ۶. مقایسه‌ی پروفیل مکانی دو حل تحلیلی و عددی با استفاده از شاخص‌های آماری برای شبکه‌ی رودخانه حلقه‌یی با شرط مرزی متغیر.

مسیر و زمان	$RMSE$ ( $kg/m^3$ )	$MAE$ ( $kg/m^3$ )	$R^2$ (%)
۱۳۵۶، زمان ۴۲/۰	۰/۰۶۰۱	۰/۰۳۵۸	۹۷/۴۵
۲۴۵۶، زمان ۴۲/۰	۰/۰۱۰۸	۰/۰۰۰۶	۹۹/۷۹
۱۳۴۵۶، زمان ۴۲/۰	۰/۰۵۶۱	۰/۰۲۷۹	۹۷/۶۵
۱۳۵۶، زمان ۶/۰	۰/۰۶۹۱	۰/۰۴۲۳	۹۷
۲۴۵۶، زمان ۶/۰	۰/۰۳۴۲	۰/۰۲۵۳	۹۶/۴۷
۱۳۴۵۶، زمان ۶/۰	۰/۰۸۰۳	۰/۰۴۳۷	۸۸/۴۷

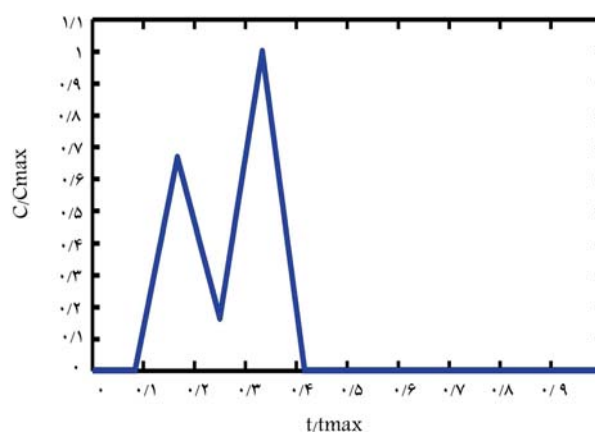
۳۵ غلظت آلودگی در کیلومترهای ۲۵/۰ تا ۵/۰ با همان الگوی اولیه حرکت می‌کند. در ادامه نیز در کیلومترهای ۵/۰ به دلیل ورود برآیند مثبت از شاخه‌ی ۲۴، در شاخه‌ی ۴۵ افزایش غلظت روی می‌دهد که در ادامه مسیر نیز با ورود موج مثبت آلودگی از سمت شاخه‌ی ۳۵، غلظت آلودگی تقویت شده و به تدریج از محیط خارج می‌شود.

چنان که در شکل ۱۴ ملاحظه می‌شود، حل تحلیلی با حل عددی انطباق خوبی داشته و شاخص‌های آماری محاسبه شده در جدول ۶ دلالت بر این امر دارد. در محل‌های اتصال ۳، ۴ و ۵ در شکل ۱۴ به علت تغییر پارامترهای جریان و مقطع در هر شاخه، غلظت کاهش یا افزایش می‌یابد.

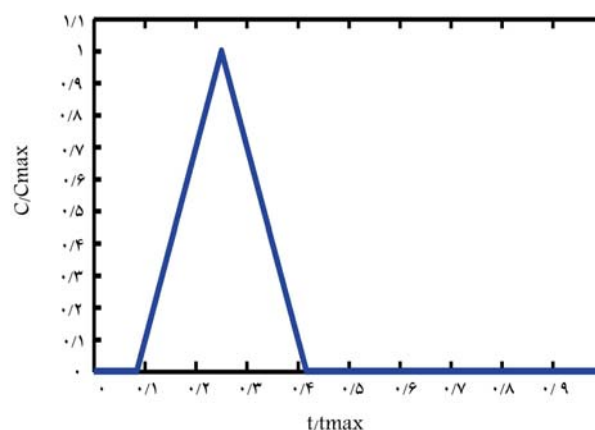
در این شکل، در زمان ۶/۰ برای مسیر ۱۳۴۵۶ به علت وجود خطاهای رایج حل عددی نظیر خطای پراکندگی عددی، خطای گرد کردن و خطای کوتاه کردن جملات ریاضی، مقدار ناپیزی اختلاف بین حل عددی با تحلیلی وجود دارد که این خطاها در حل تحلیلی نیست. هرچه گام مکانی و زمانی در این شبیه‌سازی کم‌تر در نظر گرفته شود، میزان خطا کاهش خواهد یافت.

## ۵. نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، حل تحلیلی معادله‌ی انتقال و انتشار آلودگی ADRE برای شبکه‌ی رودخانه به طور عام، در یک دامنه‌ی محدود به ازای شرایط مرزی  $X_{11}$  (بالادست و پایین‌دست از نوع دیریکله) و برای شرط اولیه صفر با استفاده از روش تبدیل لاپلاس به دست آمد، سپس با استفاده از حل تحلیلی انجام شده، مدل‌سازی دو نوع شبکه‌ی شاخه‌یی و حلقه‌یی با در نظر گرفتن شرایط مرزی ثابت و متغیر برای هر کدام انجام گرفت. این پژوهش نشان داد که روش تبدیل لاپلاس یک روش تحلیلی و ابزاری قدرتمند برای حل یک مسئله‌ی پیچیده مانند معادله‌ی انتقال جرم در شبکه‌ی رودخانه محسوب شده و توانایی شبیه‌سازی انواع شرایط مرزی پیچیده را دارد. همچنین حل تحلیلی صورت گرفته در این پژوهش برای شبیه‌سازی شبکه‌های پیچیده‌تر نیز کاربرد دارد. «محدودیت‌های الگوریتم‌های لاپلاس‌گیری معکوس عددی» از جمله معایب روش تبدیل لاپلاس در حل مسائل انتقال جرم است، که در این مورد باید الگوریتم‌هایی را در نظر گرفت که ضمن داشتن توانایی لازم برای لاپلاس معکوس توابع پیچیده‌ی محاسبه شده برحسب متغیر  $s$  لاپلاس، دقت بالایی در محاسبات نیز داشته باشند؛ چرا که هرچه توابع برحسب  $s$  ایجاد شده پیچیده‌تر شود، نمی‌توان لاپلاس وارون را به صورت تحلیلی گرفت. بنابراین باید از



شکل ۱۲. الگوی غلظت ورودی از نقطه ۱.

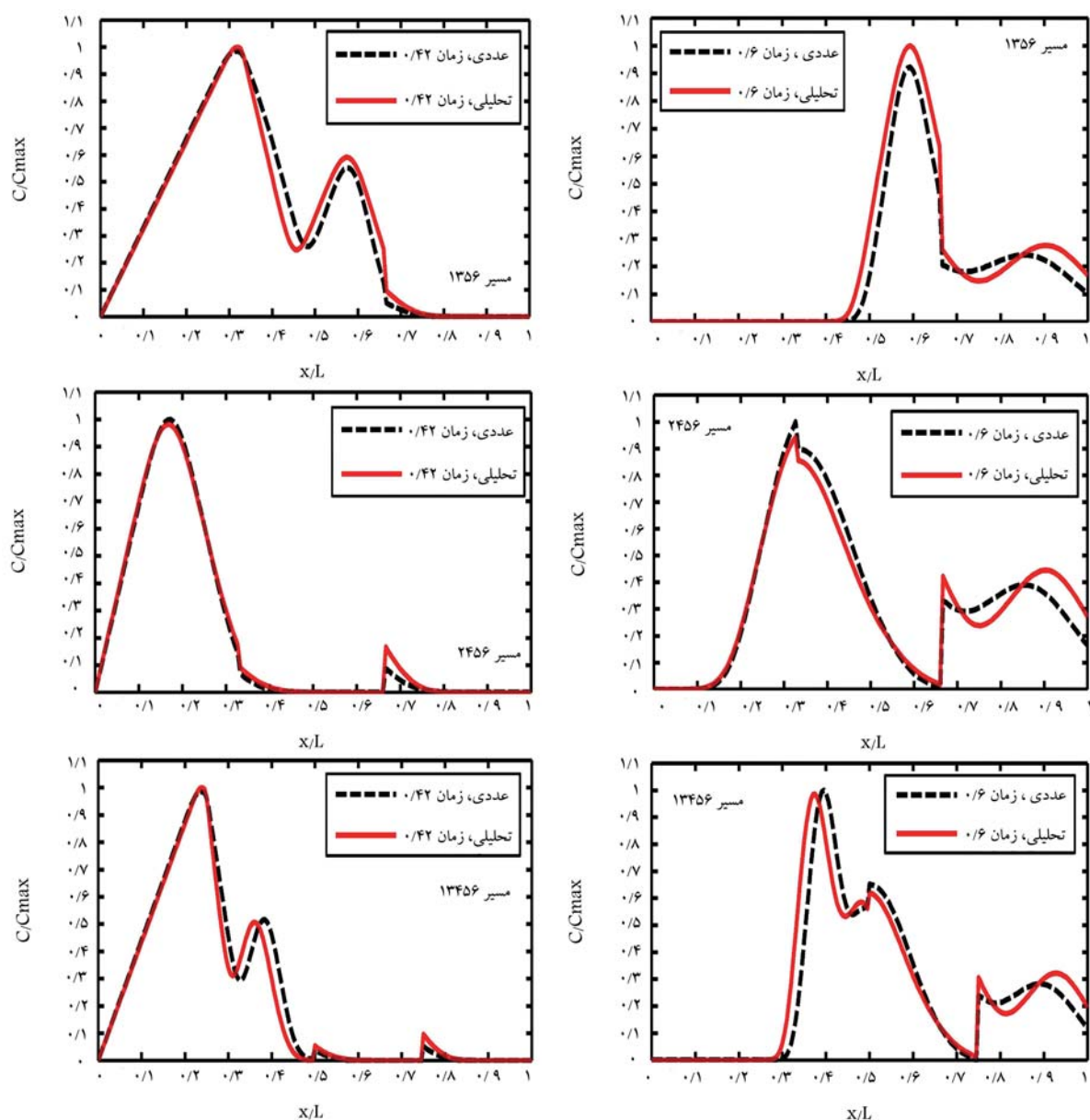


شکل ۱۳. الگوی غلظت ورودی از نقطه ۲.

## ۲.۲.۴. مدل‌سازی شبکه‌ی رودخانه حلقه‌یی با شرایط مرزی متغیر

در این بخش از شبیه‌سازی، زمان کل شبیه‌سازی ۱۲ ساعت و غلظت در نقاط ورودی ۱ و ۲ در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ قابل مشاهده است. همچنین نتایج حاصل از شبیه‌سازی در دو زمان ۴۲/۰ و ۶/۰ (زمان بی‌بعد شده) مطابق با شکل ۱۴ برای سه مسیر ۲۴۵۶، ۱۳۴۵۶ و ۱۳۵۶ ارائه شده است.

با توجه به شکل ۱۴، آلودگی‌های مورد نظر به صورت الگوهای مثلی منظم و نامنظم متغیر با زمان، از دو نقطه‌ی ۱ و ۲ وارد شبکه‌ی حلقه‌یی می‌شود و به دلیل این که آلودگی به صورت ثابت و پیوسته نیست لذا آلودگی در انتها با گذشت زمان خارج می‌شود. در شکل ۱۴، برای مسیر ۱۳۵۶، آلودگی با الگوی مثلی غلظت متغیر با زمان از نقطه ۱ وارد مسیر شده و در کیلومترهای ۳۳/۰ به دلیل برابری بارگذاری‌های دو شاخه‌ی ۳۴ و ۳۵، آلودگی با همان الگو بدون تغییر وارد شاخه‌ی ۳۵ می‌شود؛ در کیلومترهای ۶۶/۰ با گذشت زمان به دلیل برآیند غلظت آلودگی از شاخه‌ی ۴۵، در شاخه‌ی ۵۶ کاهش غلظت رخ داده و در انتها خارج می‌شود. در مسیر ۲۴۵۶، آلودگی با الگوی مثلی نامنظم غلظت متغیر با زمان به صورت دو پیک غلظت از گره ۲ وارد مسیر شده و به دلیل تأخیر در زمان بارگذاری ناشی از شاخه‌ی ۳۴، در شاخه‌ی ۴۵ در کیلومترهای ۳۳/۰ ابتدا غلظت ناپیز و سپس با گذشت زمان افزایش غلظت روی می‌دهد و در کیلومترهای ۶۶/۰ با گذشت زمان، به دلیل موج مثبت برآیند ناشی از شاخه‌ی ۳۵، در شاخه‌ی ۵۶ افزایش غلظت داشته و در انتها کم‌کم غلظت خارج می‌شود. در مسیر ۱۳۴۵۶، آلودگی با دو پیک غلظت وارد مسیر شده و به دلیل برابری بارگذاری دو شاخه‌ی ۳۴ و ۳۵، در شاخه‌ی



شکل ۱۴. مقایسه پروفیل مکانی غلظت دو حل تحلیلی و عددی برای زمان‌های بی بعد شده ۰/۴۲ و ۰/۶ برای مثال ۴-۲-.

خطاها (RMSE) و میانگین خطای مطلق (MAE) برای هر دو حل انجام شده در هریک از شرایط مذکور محاسبه شد. نتایج نشان داد که، حل عددی انطباق خوبی نسبت به حل تحلیلی در شبکه‌ی رودخانه دارد و در مواردی که سرعت و ضریب پراکندگی در هر شاخه یک مقدار ثابت جدا از هم داشته باشد، حل‌های تحلیلی را به دلیل دقت و سرعت بالاتر، انعطاف بیشتر و توانایی شبیه‌سازی‌های دلخواه می‌توان جایگزین حل‌های عددی در شبکه‌ی رودخانه کرد. بنابراین حل تحلیلی صورت گرفته در این پژوهش برای شبکه‌ی رودخانه به طور عام و کاربرد آن در مدل‌سازی دو شبکه‌ی شاخه‌یی و حلقه‌یی از مهم‌ترین نوآوری این پژوهش است. همچنین، نتایج حاصله نشان داد که در محل‌های اتصال شاخه‌ها به یکدیگر، تغییرات غلظت آلودگی به صورت افزایشی یا کاهش‌ی است؛ که علت آن تغییر مشخصات جریان ورودی به هر شاخه (مانند دبی جریان) و سطح مقطع در هر شاخه است.

آن دسته الگوریتم‌های لاپلاس‌گیری وارون عددی استفاده کرد که دقت و سرعت محاسبات بالایی داشته باشند. در مواردی که شبکه‌ی رودخانه از نظر تعداد شاخه‌ها، تفاوت مقدار ضریب پراکندگی و سرعت پیچیده‌تر باشد، حجم محاسبات به دلیل افزایش حجم ماتریس‌ها نظیر ماتریس نحوه‌ی اتصال، ماتریس سرعت، ماتریس ضریب پراکندگی، ماتریس سطح مقطع عرضی و... به عنوان داده‌های ورودی برای شبکه بیشتر شده، در نهایت محاسبه‌ی ماتریس انتشار دشوارتر و دستگاه معادلات بزرگ‌تر خواهد بود. این امر علاوه بر افزایش هزینه‌ی محاسبات، زمان‌بر نیز هست. اما در مواردی که شبکه‌ی رودخانه از نظر تعداد شاخه‌ها، تفاوت مقدار ضریب پراکندگی و سرعت ساده‌تر باشد، هزینه‌ی محاسبات کم‌تر و شامل زمان کم‌تری خواهد بود.

در ادامه به منظور اعتبارسنجی و ارزیابی حل تحلیلی، از حل عددی استفاده شد و شاخص‌های آماری شامل ضریب همبستگی ( $R^2$ )، جذر میانگین مربع

## پانوشتها

1. advection
2. dispersion
3. reaction
4. First fick's Law
5. Green Function Method
6. generaliaed integral transform technique (GITT)
7. Fourier Transform Method
8. Laplace Trtansform Method
9. inverse fourier transform
10. stretched gaussian distribution
11. conformable advection-dispersion equation
12. branch
13. loop
14. Dirichlet
15. ordinary differential equation (ODE)
16. concentrated matrix exponential
17. Gaver-Stehfest
18. Talbot
19. fully implicit
20. finite difference
21. central space
22. round-off errors
23. truncation errors

## منابع (References)

1. Dietrich, WE., Wilson, CJ., Montgomery, DR. and et al. "Analysis of erosion thresholds, channel networks, and landscape morphology using a digital terrain model", *The Journal of Geology*, **101**(2), pp.259-78 (1993).
2. Montgommery, D. and Foufoula-Georgiou, E. "Channel network source representation using digital elevation model", *Water resources research*, **29**, pp. 3925-34 (1993).
3. Tarboton, DG., Bras, RL. and Rodriguez-Iturbe, I. "On the extraction of channel networks from digital elevation data", *Hydrological Processes*, **5**(1), pp. 81-100 (1991).
4. Campbell, RE., Winterbourn, MJ., Cochrane, TA. and et al. "Flow-related disturbance creates a gradient of metacommunity types within stream networks", *Landscape Ecology*, **30**(4), pp. 667-80 (2015).
5. Lazzaro, G., Soulsby, C., Tetzlaff, D. and et al. "A probabilistic approach to quantifying hydrologic thresholds regulating migration of adult Atlantic salmon into spawning streams", *Water Resources Research*, **53**(3), pp. 2264-77 (2017).
6. Sarremejame, R., Cañedo-Argüelles, M., Part, N. and et al. "Do metacommunities vary through time? Intermittent rivers as model systems", *Journal of Biogeography*, **44**(12), pp. 2752-63 (2017).
7. Dong, B., Ni, D. and Wang, Y. "Sharing a polluted river network", *Environmental and Resource Economics*, **53**(3), pp. 367-87 (2012).
8. Leibundgut, C., Maloszewski, P. and Külls, C. "Tracers in hydrology", *John Wiley & Sons*, p.432 (2011).
9. Zhang, M-l., Shen, Y-m. and Guo, Y. "Development and application of a eutrophication water quality model for river networks", *Journal of Hydrodynamics*, **20**(6), pp. 719-26 (2008).
10. Heaton, LL., López, E., Maini, PK. and et al. "Advection, diffusion, and delivery over a network", *Physical Review E*, **86**(2), pp. 021905 (2012).
11. Guerrero, JP., Pimentel, LCG., Skaggs, TH. and et al. "Analytical solution of the advection-diffusion transport equation using a change-of-variable and integral transform technique", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **52**(13-14), pp. 3297-304 (2009).
12. Park, E. and Zhan, H. "Analytical solutions of contaminant transport from finite one-, two-, and three-dimensional sources in a finite-thickness aquifer", *Journal of contaminant hydrology*, **53**(1-2), pp. 41-61 (2001).
13. Wang, H. and Wu, H. "Analytical solutions of three-dimensional contaminant transport in uniform flow field in porous media", *A library Frontiers of Environmental Science & Engineering in China*, **3**(1), pp. 112-28 (2009).
14. Leij, FJ. and Van Genuchten, MT. "Analytical modeling of nonaqueous phase liquid dissolution with Green's functions", *Transport in Porous Media*, **38**(1), pp. 141-66 (2000).
15. Sanskrityayn, A., H. Suk, and N. Kumar, "Analytical solutions for solute transport in groundwater and riverine flow using Green's function method and pertinent co-ordinate transformation method", *Journal of hydrology*, **547**, pp. 517-533 (2017).
16. Sanskrityayn, A., et al. "Analytical solution of two-dimensional advection-dispersion equation with spatio-temporal coefficients for point sources in an infinite medium using Green's function method", *Environmental Fluid Mechanics*, **18**(3), pp. 739-757 (2018).
17. Mashhadgarme, N., Mazaheri, M. and Mohammad Vali Samani, J., "Analytical solutions to one-and two-dimensional Advection-Dispersion-Reaction equation with arbitrary source term time pattern using Green's function method", *Sharif Journal of Civil Engineering*, **33-2**, pp. 77-91 (in Persian) (2017).
18. Leij, FJ., Toride, N. and Van Genuchten, MT. "Analytical solutions for non-equilibrium solute transport in three-dimensional porous media", *Journal of Hydrology*, **151**(2-4), pp. 193-228 (1993).
19. Cotta, R.M., Knupp, D.C. and Naveira-Cotta, C.P. "Analytical heat and fluid flow in microchannels and microsystems", *Springer*, p.175 (2016).
20. Adrian, DD, Yu, FX. and Barbe, D. "Water quality modeling for a sinusoidally varying waste discharge concentration", *Water Research*, **28**(5), pp. 1167-74 (1994).
21. Dresnack, R. and Dobbins WE. "Numerical analysis of BOD and DO profiles", *Journal of the Sanitary Engineering Division*, **94**(5), pp. 789-808 (1968).
22. Yu. F., Adrian, D. and Singh, V. "Modeling river quality by the superposition method", *Journal of Environmental Systems*, **20**(4), pp. 1-16 (1991).
23. Chen, J-S., Liu, C-W., Liang, C-P. and et al. "Generalized analytical solutions to sequentially coupled multi-species advective-dispersive transport equations in a finite domain subject to an arbitrary time-dependent source boundary condition", *Journal of hydrology*, **456**, pp. 101-9 (2012).



24. Guerrero, JP. and Skaggs, T. "Analytical solution for one-dimensional advection-dispersion transport equation with distance-dependent coefficients", *Journal of Hydrology*, **390**(1-2), pp. 57-65 (2010).
25. Bharati, VK., Singh, VP., Sanskritayn, A. and et al. "Analytical solution for solute transport from a pulse point source along a medium having concave/convex spatial dispersivity within fractal and Euclidean framework", *Journal of Earth System Science*, **128**(8), pp. 1-19 (2019).
26. Shukla, V. "Analytical solutions for unsteady transport dispersion of nonconservative pollutant with time-dependent periodic waste discharge concentration", *Journal of Hydraulic Engineering*, **128**(9), pp. 866-9 (2002).
27. Yang, S., Zhou, H., Zhang, S. and et al. "Analytical solutions of advective-dispersive transport in porous media involving conformable derivative", *Applied Mathematics Letters*, **92**, pp. 85-92 (2019).
28. Xu, Z. and Meakin, P. "Upscaling of solute transport in heterogeneous media with non-uniform flow and dispersion fields", *Applied Mathematical Modelling*, **37**(18-19), pp. 8533-42 (2013).
29. Simpson, MJ. and Ellery, AJ. "Exact series solutions of reactive transport models with general initial conditions", *Journal of Hydrology*, **513**, pp. 7-12 (2014).
30. Williams, GP. and Tomasko, D. "Analytical solution to the advective-dispersive equation with a decaying source and contaminant", *Journal of Hydrologic Engineering*, **13**(12), pp. 1193-6 (2008).
31. Kumar, P. and Sudheendra, S. "Mathematical solution of transport of pollutant in unsaturated porous media with retardation factor", *International Journal of Applied Engineering Research*, **13**(1), pp. 100-4 (2018).
32. Chen, J.-S., et al. "Analytical model for advective-dispersive transport involving flexible boundary inputs, initial distributions and zero-order productions", *Journal of Hydrology*, **554**, pp. 187-199 (2017).
33. Carr, E.J. "New semi-analytical solutions for advection-dispersion equations in multilayer porous media", *Transport in Porous Media*, **135**(1), pp. 39-58 (2020).
34. Yadav, R. and Kumar, L. "Solute transport for pulse type input point source along temporally and spatially dependent flow", *Pollution*, **5**(1), p. 53-70 (2019).
35. Yadav, R. and Yadav, V. "Three-dimensional analytical models for time-dependent coefficients through uniform and varying plane input source in semi-infinite adsorbing porous media", *Pollution*, **5**(1), pp. 81-98 (2019).
36. Genuchten, MT., Leij, FJ., Skaggs, TH. and et al. "Exact analytical solutions for contaminant transport in rivers 1. The equilibrium advection-dispersion equation", *Journal of Hydrology and Hydromechanics*, **61**(2), pp. 146 (2013).
37. Mazaheri, M., MV Samani, J. and Samani H. "Analytical solution to one-dimensional advection-diffusion equation with several point sources through arbitrary time-dependent emission rate patterns", *Journal of Agricultural Science and Technology*, **15**(6):1231-45 (2013).
38. Kumar, A., Jaiswal, DK. and Kumar, N. "Analytical solutions of one-dimensional advection-diffusion equation with variable coefficients in a finite domain", *Journal of Earth System Science*, **118**(5), pp. 539-49 (2009).
39. Yates, SR. "An analytical solution for one-dimensional transport in heterogeneous porous media", *Water Resources Research*, **26**(10), pp. 2331-8 (1990).
40. Bavandpouri Gilan, N., Mazaheri, M. and Fotouhi Firouzabadi, M. "Analytical solution of contaminant transport equation in river by arbitrary variable coefficients using generalized integral transform technique", *Journal of Advanced Mathematical Modeling*, **7**(1), pp. 89-116 (in Persian) (2017).
41. Mashhadgarme, N., Mohammadvali Samani, J. and Mazaheri, M. "Analytical solution of pollution transport equation with arbitrary time pattern of multiple point sources using Green's function method", *Journal of Hydraulics*, **8**(4), pp. 13-25 (in Persian) (2013).
42. Ramezani M., et al. "Numerical modelling-based comparison of longitudinal dispersion coefficient formulas for solute transport in rivers", *Hydrological Sciences Journal*, **64**(7), pp. 808-819 (2019).
43. Najafzadeh, M. et al. "A comprehensive uncertainty analysis of model-estimated longitudinal and lateral dispersion coefficients in open channels", *Journal of Hydrology*, **603**, pp. 126850 (2021).
44. Noori, R. et al. "Estimation of the dispersion coefficient in natural rivers using a granular computing model", *Journal of Hydraulic Engineering*, **143**(5), pp. 04017001 (2017).
45. Korn, GA. and Korn, TM. "Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review", *Courier Corporation*, p.1152 (2000).
46. Horváth, G., Horváth, I., Almousa, SA-D. and et al. "Numerical inverse laplace transformation using concentrated matrix exponential distributions", *Performance Evaluation*, **137**, pp. 102067 (2020).
47. Stehfest, H. "Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms [D5]", *Communications of the ACM*, **13**(1), pp. 47-9 (1970).
48. Villinger, H. "Solving cylindrical geothermal problems using the Gaver-Stehfest inverse Laplace transform", *Geophysics*, **50**(10), pp. 1581-7 (1985).
49. Murli, A. and Rizzardi, M. "Algorithm 682: Talbot's method of the Laplace inversion problems", *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, **16**(2), pp. 158-68 (1990).





# کنترل همزمان جهت‌گیری و ارتعاشات خمشی - پیچشی ماهواره‌ی دارای پانل‌های چندقسمتی به کمک کنترل - مشاهده‌گر مرزی مبتنی بر معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

محمد مهدی عطایی (دانشجوی دکتری)

حسین نجات پیشکاری (دانشیار)

حسن سالاریه\* (استاد)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

مهندسی مکانیک شریف، بهار ۱۴۰۱  
دوری ۳-۲، شماره ۱، ص. ۵۱-۶۳، (پژوهشی)

در این مقاله کنترل مرزی مبتنی بر مشاهده‌گر معادلات جزئی برای وضعیت و ارتعاشات یک فرم کلی از ماهواره‌های انعطاف‌پذیر و با لحاظ پیچش و خمش توأم ارائه شده است. دینامیک وضعیت بدنه‌ی صلب و ارتعاشات صفحات خورشیدی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبط معمولی و جزئی را تشکیل می‌دهد که در این مقاله مستقیماً و بدون گسسته‌سازی کنترل می‌شود. در روش ارائه شده کمینه تعداد سیگنال پسخوراند از مرز قابل استفاده است که توسط مشاهده‌گر تخمین زده می‌شود. بنابراین فقط داده‌های وضعیت ماهواره و آهنگ تغییرات آن بایستی اندازه‌گیری شود ولی همچنان سیستم کنترل از اطلاعات مربوط به ارتعاشات در اجزای گسترده بهره می‌برد. پایداری مجانبی سیستم مدار بسته اثبات می‌شود و از طریق شبیه‌سازی اجزای محدود، عملکرد مناسب این کنترل‌کننده‌ی مرزی مبتنی بر مشاهده‌گر نشان داده می‌شود.

**واژگان کلیدی:** مشاهده‌گر معادلات جزئی، کنترل مرزی، ماهواره انعطاف‌پذیر، دینامیک خارج از صفحه.

## ۱. مقدمه

در صنعت مدرن اجرای انعطاف‌پذیر کاربرد رو به رشدی دارند زیرا وزن کمتر و مصرف انرژی پایین‌تری دارند. سیستم‌های فضایی مانند ماهواره‌ها و بازوهای مکانیکی صنعتی از جمله کاربردهای رایج در این زمینه‌اند. این ادوات عموماً متشکل از اجزای صلب و منعطف هستند. اما درجات آزادی بی‌نهایت در یک قطعه‌ی گسترده و معادلات دیفرانسیل مرتبط معمولی و جزئی<sup>۱</sup> توأم کنترل دقیق را با دشواری‌هایی مواجه می‌سازد.

در ادبیات روش‌های متنوعی برای کنترل وضعیت و ارتعاشات ماهواره‌های انعطاف‌پذیر بر اساس گسسته‌سازی معادلات جزئی معرفی شده است. برای مثال روش‌های زمان بهینه، توزیع‌گشتاور به صورت مقید، مود لغزشی به علاوه تنظیم‌کننده‌ی مرتبه‌ی دوم خطی<sup>۲</sup>، ترکیب کنترل پسخوراند نرخ تغییر کرنش با کنترل لیاپانوف، تطبیقی و مقاوم، پیش‌بینی مدل، پسخوراند تناسبی و مشتقی و برخی روش‌های ابتکاری<sup>۱-۱۱</sup> به کار گرفته شده است. اما مودهای به حساب نیامده در این رویکردها امکان دارد کیفیت

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳/۶/۱۴۰۰، اصلاحیه ۸/۸/۱۴۰۰، پذیرش ۵/۱۰/۱۴۰۰.

DOI:10.24200/J40.2021.58511.1604

mehdi.sut@gmail.com  
nejat@sharif.edu  
salarieh@sharif.edu

و پایداری پاسخ مدار بسته را تحت تأثیر قرار دهد یا آن که ناپایداری سرریز<sup>۳</sup> رخ دهد. اخیراً برای اجتناب از خطاها، توجه بیشتری به کنترل مستقیم معادلات جزئی معطوف شده است. این ایده از طریق نصب حسگرها و عملگرها در هر نقطه از گستره‌ی جسم یا صرفاً روی مرزهای آن تحقق می‌یابد. در مطالعات پیشین، برای اعمال کنترل‌گر مود لغزشی مرزی بر یک تیر اولر - برنولی تحت اغتشاش‌های محدود نامعوم، رویه‌ی ارائه شده است.<sup>[۱۲]</sup> همچنین برای یک بازوی دوعضوی صلب - منعطف با کوانتیزه کردن ورودی یک کنترل‌کننده‌ی مرزی طراحی شده که به تعداد زیادی سیگنال پسخوراند از مرزها نیاز دارد.<sup>[۱۳]</sup>

محققان برای پایداری سازی نمایی ارتعاشات انعطافی حین حرکت در یک جبرئیل دروازه‌ی یک کنترل‌گر مرزی ارائه کردند.<sup>[۱۴]</sup> آنان مدل‌های ساده‌ی از ماهواره‌ها را به صورت یک تیر با تنها یک درجه آزادی انتقالی در نظر گرفتند.<sup>[۱۵ و ۱۶]</sup> دیگرانی نیز ماهواره را به صورت یک تیر چرخان در صفحه فرض کردند.<sup>[۱۷]</sup> در این پژوهش‌ها کنترل‌کننده‌ی معادلات جزئی با استفاده از پسخوراند‌ها و قوانین کنترلی پیچیده معرفی شده است.

به علاوه در مطالعات بعدی، کنترل‌کننده‌های مرزی با پایداری مجانبی و نمایی

برای ماهواره‌ی در حرکت صفحه‌ی طراحی شد.<sup>[۱۸ و ۱۹]</sup> مدل ماهواره به صورت دو تیر طره که به دو سمت بدنه‌ی صلب جوش شده‌اند فرض شده است. برای اعمال کنترل تعدادی سیگنال پسخوراند با مشتقات از مراتب مختلف نسبت به مکان و زمان مورد نیاز است.

برای کاهش یا رفع نیاز به حسگرهای مرزی و در عین حال بهره بردن از اطلاعات دینامیکی اجزای گسترده، یک راهکار عبارت است از استفاده از مشاهده‌گر معادلات جزیی. با این وجود تاکنون کاربردهای زیادی از این دست ارائه نشده است. مرور روش‌های متنوع طراحی مشاهده‌گر<sup>[۲۰]</sup> نشان داده به منظور طراحی مشاهده‌گر باید ابعاد سیستم کاهش یابد، که به آن «متمرکزسازی» گفته می‌شود. بنابراین دو دسته رویکرد قابل ذکر است: «متمرکزسازی پیشین<sup>۴</sup>» که از طریق گسسته‌سازی مدل دینامیکی انجام می‌شود و «متمرکزسازی پسین<sup>۵</sup>» که صرفاً حین محاسبه‌ی نتایج مشاهده‌گر بی‌نهایت بعدی طراحی می‌شود.

از روش‌های اجزای محدود، اختلاف محدود<sup>۶</sup>، تخمین گارکین، بسط توابع ویژه<sup>۷</sup> و تجزیه‌ی متعامد<sup>۸</sup> به منظور متمرکزسازی بهره می‌گیرند. برخی از مطالعات موجود<sup>[۲۱ و ۲۲]</sup> نمونه‌هایی از متمرکزسازی پیشین هستند در حالی که در بررسی‌های دیگر<sup>[۲۳-۲۵]</sup> مشاهده‌گرهای بی‌نهایت بعدی طراحی شده است.

محققان به وسیله‌ی مشاهده‌گر  $H_{\infty}$ ، پایداری و وضعیت ماهواره به صورت مقاوم در برابر اغتشاش را انجام داده‌اند.<sup>[۲۶]</sup> آنان همچنین به کنترل وضعیت برای ماهواره‌های منعطف پرداخته<sup>[۲۷]</sup> و مشاهده‌گری برای کوانتیزم‌ها و مدل گسسته‌سازی شده طراحی کرده‌اند. در مطالعات دیگری<sup>[۲۸]</sup>، یک کنترل‌کننده‌ی مقاوم به همراه یک جبران‌کننده‌ی مبتنی بر مشاهده‌گر طراحی شده است تا تبعیت کردن وضعیت در مدل متمرکز شده دو ماهواره‌ی میکروصلب که با تیر انعطاف‌پذیر به یکدیگر متصل شده‌اند، بررسی شود.

پژوهشگران یک مشاهده‌گر برای بازوی مکانیکی دوعضوی بر اساس مدل دینامیکی غیرخطی با معادلات جزیی طراحی کرده‌اند<sup>[۲۹]</sup> که به محاسبه‌ی پسخوراندیابی پیچیده از مرزها نیاز دارد. مشاهده‌گر دیگری نیز بر اساس مدل بازوی مکانیکی منعطف تک عضوی با معادلات جزیی معرفی شده است<sup>[۳۰]</sup> که به پسخوراند وضعیت و نرخ تغییر آن علاوه بر مکان و سرعت نوک بازو نیاز دارد.

کنترل مرزی خروجی مبتنی بر مشاهده‌گر برای یک تیر اولر - برنولی<sup>[۳۱]</sup> می‌تواند به طور نمونه برای عضو انعطاف‌پذیر در ربات‌ها اعمال شود. در مطالعه‌ی دیگری<sup>[۳۲]</sup> نیز با استفاده از روش پسگام زدن، طراحی مشاهده‌گر برای یک دسته از معادلات مرتبط دیفرانسیل هذلولی معمولی و جزیی مربوط به سیستم‌های زنجیره‌ی<sup>۹</sup> معرفی شده است. اندازه‌گیری در یک مرز انتهایی انجام می‌شود و نویسندگان به طور موفقیت‌آمیزی روش خود را در فرایند حفاری چاه نفت به کار برده‌اند. معادلات دیفرانسیل مورد بررسی، فقط از مرتبه اول مشتقات زمان و مکان هستند.

در مطالعه‌ی دیگر، ماهواره‌ی منعطف به صورت یک تیر طره چرخان جوش شده به بدنه‌ی صلب مدل شده است.<sup>[۳۳]</sup> به منظور کنترل وضعیت و ارتعاشات از دو قانون کنترلی مرزی و یک گشتاور کنترلی گسترده استفاده شده است. مشاهده‌گری برای تخمین نیروی اغتشاشی گسترده طراحی شده است. البته تمامی متغیرهای حالت از دینامیک وضعیت و ارتعاشات که در مدل دینامیکی ظاهر شده‌اند بایستی اندازه‌گیری شود که عملیاتی نیست.

## ۱.۱. نوآوری‌های مطالعه‌ی حاضر

- عموماً در کنترل مرزی ماهواره فقط به دینامیک صفحه‌ی شامل دوران صلب

بدنه‌ی اصلی به همراه تغییرشکل خمشی صفحات خورشیدی پرداخته شده است. در نوشتار حاضر علاوه بر درجات آزادی مذکور، معادلات جزیی پیش صفحات خورشیدی به صورت مرتبط با دینامیک دوران بدنه‌ی صلب محاسبه و کنترل شده است.

- معادلات جزیی گسسته‌سازی نمی‌شود و تلاش بر آن است تا کمترین تعداد سیگنال پسخوراند مورد نیاز باشد.

- با طراحی مشاهده‌گر معادلات جزیی لازم نیست سیگنال‌های پسخوراند مشتمل بر مشتقات جزیی زمان و موقعیت از مرز سیستم اندازه‌گیری شود و فقط با اندازه‌گیری وضعیت و سرعت زاویه‌ی ماهواره، داده‌های مرزی به وسیله مشاهده‌گر محاسبه و استفاده می‌شود، که در نتیجه پیاده‌سازی روش کنترلی را به راحتی امکان‌پذیر می‌کند.

- در این نوشتار کنترل وضعیت همزمان با فرونشاندن ارتعاشات انجام می‌شود در حالی که فقط از دو عملگر گشتاور معمول داخل بدنه‌ی اصلی استفاده می‌شود.

- کنترل‌گر مورد نظر علاوه بر تأمین پایداری، امکان تنظیم خصوصیات رفتار گذرا در دینامیک وضعیت ماهواره را فراهم می‌کند.

- در مقالات موجود معمولاً ساختار ماهواره به صورت تیر چرخان که بدنه‌ی اصلی در وسط آن قرار دارد مدل شده است. اما در این پژوهش تلاش شده است به شرایط واقعی نزدیک‌تر شویم. در این راستا چندقسمتی بودن صفحات خورشیدی بازشونده لحاظ شده است.

بدین منظور معادلات دینامیکی به کمک اصل هامیلتون محاسبه می‌شود. مشاهده‌گر و سپس کنترل‌کننده‌ی مرزی طراحی و اثبات پایداری سیستم حلقه بسته انجام می‌شود. به منظور شبیه‌سازی مدل دینامیکی به روش اجزای محدود نیز به دست می‌آید و عملکرد کنترل‌کننده‌ی مبنی بر مشاهده‌گر ارائه شده بررسی می‌شود.

## ۲.۱. فرضیات

صفحات خورشیدی دارای مقطع مستطیل شکل و به لحاظ هندسی و خواص فیزیکی یکنواخت در نظر گرفته می‌شود. بدنه‌ی اصلی یک مکعب صلب است. صفحات خورشیدی با نظریه‌ی تیر کلاسیک مدل می‌شود یعنی از تغییر شکل مقطع<sup>۱۰</sup> صرف نظر می‌شود. نظر به شعاع بسیار بزرگ حرکت مداری ماهواره، ثابت زمانی دینامیک مربوطه بسیار بزرگتر از دینامیک وضعیت ماهواره همچنین ارتعاشات است؛ لذا ارتباط حرکات تغییر وضعیت و مداری ماهواره قابل صرف نظر کردن است. این فرضیات همگی در میان مقالات مربوط به کنترل معادلات جزیی وضعیت و ارتعاشات ماهواره رایج است.<sup>[۱۹-۱۵]</sup>

با توجه به ابعاد و شکل هندسی، سختی خمشی در راستای محور لولاهای قطعات پانل بسیار کمتر از سختی خمشی در راستای دیگر است. به این دلیل دامنه‌ی جابه‌جایی ارتعاشی عمود بر صفحات بیشتر قابل توجه است. در خمش، روابط تیر اولر - برنولی<sup>۱۱</sup> لحاظ و با توجه به وجود دو محور تقارن در هر مقطع، معادلات پیش و خمش به صورت غیر مرتبط<sup>۱۲</sup> به دست می‌آید.<sup>[۳۴]</sup> در واقع به لحاظ هندسی هر مقطع دارای دو محور تقارن و توزیع جرم نیز در صفحات خورشیدی و هاب به صورت یکنواخت فرض می‌شود.

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^l w''_{l1} \delta \xi_{l1} + \int_0^l w''_{l2} \delta \xi_{l2} + \frac{1}{\rho} k_b (w'_{r1}|_0)^2 \\
 & + \frac{1}{\rho} k_s (w'_{r2}|_0 - w'_{r1}|_0)^2 + \frac{1}{\rho} k_b (w'_{l1}|_0)^2 \\
 & + \frac{1}{\rho} k_s (w'_{l2}|_0 - w'_{l1}|_0)^2 + \frac{1}{\rho} G I_p \int_0^l \varphi'_{r1} \delta \xi_{r1} \\
 & + \int_0^l \varphi'_{r2} \delta \xi_{r2} + \int_0^l \varphi'_{l1} \delta \xi_{l1} + \int_0^l \varphi'_{l2} \delta \xi_{l2} \quad (2-2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta E_w = & \tau_z \delta \theta + \tau_x \delta \phi - c_b \dot{w}'_{r1}|_0 (\delta w'_{r1}|_0) \\
 & - c_s (\dot{w}'_{r2}|_0 - \dot{w}'_{r1}|_0) (\delta w'_{r2}|_0 - \delta w'_{r1}|_0) \\
 & - c_s (\dot{w}'_{l2}|_0 - \dot{w}'_{l1}|_0) (\delta w'_{l2}|_0 - \delta w'_{l1}|_0) \\
 & - c_b \dot{w}'_{l1}|_0 (\delta w'_{l1}|_0) - c \dot{\varphi}_{r2}|_l \delta \varphi_{r2}|_l - c \dot{\varphi}_{l2}|_l \delta \varphi_{l2}|_l \quad (2-3)
 \end{aligned}$$

در معادلات بالا پارامترهای  $\rho, E, I, A, G$  به ترتیب معرف چگالی، مدول یانگ، مساحت مقطع و ممان دوم اینرسی مقطع، مدول برشی و ممان قطبی سطح مقطع برای کلیه تیرهاست. نماد  $'$  (°) به معنای مشتق نسبت به مکان ( $\xi$ ) و عدد بالانویس مربوطه نشانگر مرتبه مشتق است. همچنین زیروندهای  $^0$  و  $l$  به معنای محاسبه کمی پیش از آن در مکان‌های  $0$  و  $l$  است. به منظور محاسبه معادلات دینامیک حاکم، از اصل هامیلتون استفاده می‌شود.

$$\int_0^t (\delta E_p - \delta E_k - \delta E_w) dt = 0 \quad (3)$$

نماد وردش به صورت  $\delta$  در نظر گرفته می‌شود. با جایگزینی روابط انرژی جنبشی، پتانسیل و کار مجازی در معادله فوق و پس از انتگرال‌گیری جزئی و مرتب‌سازی داریم:

$$\delta w_{r1} : \rho A \ddot{w}_{r1} + E I w_{r1}'''' = 0 \quad (4-1)$$

$$\delta w_{r2} : \rho A \ddot{w}_{r2} + E I w_{r2}'''' = 0 \quad (4-2)$$

$$\delta w_{l1} : \rho A \ddot{w}_{l1} + E I w_{l1}'''' = 0 \quad (4-3)$$

$$\delta w_{l2} : \rho A \ddot{w}_{l2} + E I w_{l2}'''' = 0 \quad (4-4)$$

$$\begin{aligned}
 \delta \theta : J_z \ddot{\theta} = & \tau_z + E I [-h w'''_{r1}|_0 + w''_{r1}|_0 - w''_{r1}|_l \\
 & + w''_{r2}|_0 - h w'''_{l1}|_0 + w''_{l1}|_0 - w''_{l1}|_l + w''_{l2}|_0] \quad (4-5)
 \end{aligned}$$

$$\delta \varphi_{r1} : \rho I_p \ddot{\varphi}_{r1} - G I_p \varphi_{r1}'' = 0 \quad (5-1)$$

$$\delta \varphi_{r2} : \rho I_p \ddot{\varphi}_{r2} - G I_p \varphi_{r2}'' = 0 \quad (5-2)$$

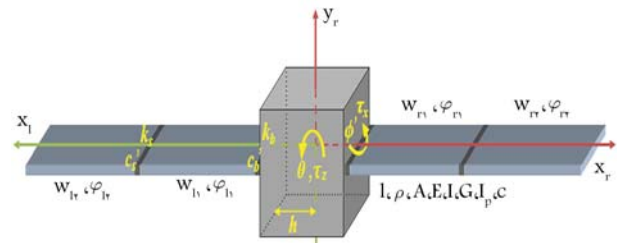
$$\delta \varphi_{l1} : \rho I_p \ddot{\varphi}_{l1} - G I_p \varphi_{l1}'' = 0 \quad (5-3)$$

$$\delta \varphi_{l2} : \rho I_p \ddot{\varphi}_{l2} - G I_p \varphi_{l2}'' = 0 \quad (5-4)$$

$$\begin{aligned}
 \delta \phi : J_x \ddot{\phi} = & \tau_x + G I_p [\varphi'_{r1}|_0 - \varphi'_{r1}|_l \\
 & + \varphi'_{r2}|_0 + \varphi'_{l1}|_0 - \varphi'_{l1}|_l + \varphi'_{l2}|_0] \quad (5-5)
 \end{aligned}$$

همچنین شرایط مرزی چنین محاسبه می‌شود:

$$\delta w'_{r1}|_0 : k_b w'_{r1}|_0 - E I w''_{r1}|_0 + c_b \dot{w}'_{r1}|_0 = 0 \quad (6-1)$$



شکل ۱. شماتیک مدل ماهواره.

## ۲. مدل‌سازی دینامیکی

در شکل ۱، نمای شماتیک ماهواره مورد نظر نشان داده شده است. متغیرهای  $\tau_z, \tau_x, l, k_b, c_b, k_s, c_s, c$  و پارامترهای  $\theta, \phi, w_{r1}, \dots, w_{l2}, \varphi_{r1}, \dots, \varphi_{l2}$  ترتیب معرف زوایای رول و پیچ ماهواره، تغییر شکل خمشی و پیچش در قسمت‌های صفحات خورشیدی سمت راست و چپ بدنه اصلی، گشتاور عملگر، طول هر قسمت از صفحات، ضرایب سختی و میرایی اتصالات مابین صفحات و بدنه اصلی همچنین مابین قسمت‌های صفحات خورشیدی در خمش و میرایی ساختاری تخمینی در پیچش است.

دستگاه‌های مختصات بدنی مطابق شکل بالا با مراکز متصل به مرکز جرم بدنه اصلی در نظر گرفته شده است. روابط مربوط به سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای هر المان روی تیرها، با فرض زاویه‌ی تغییر شکل پیچشی کوچک، عبارت است از:

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_{r1} \hat{j}_r &= [(h + \xi_{r1}) \dot{\theta} + \dot{w}_{r1}] \hat{j}_r \\
 \dot{y}_{r2} \hat{j}_r &= [(h + l + \xi_{r2}) \dot{\theta} + \dot{w}_{r2}] \hat{j}_r \\
 \dot{y}_{l1} \hat{j}_l &= [(h + \xi_{l1}) \dot{\theta} + \dot{w}_{l1}] \hat{j}_l \\
 \dot{y}_{l2} \hat{j}_l &= [(h + l + \xi_{l2}) \dot{\theta} + \dot{w}_{l2}] \hat{j}_l \quad (1-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\Phi}_{r1} \hat{i}_r &= (\dot{\phi} + \dot{\varphi}_{r1}) \hat{i}_r, \quad \dot{\Phi}_{r2} \hat{i}_r = (\dot{\phi} + \dot{\varphi}_{r2}) \hat{i}_r \\
 \dot{\Phi}_{l1} \hat{i}_r &= (\dot{\phi} + \dot{\varphi}_{l1}) \hat{i}_r, \quad \dot{\Phi}_{l2} \hat{i}_r = (\dot{\phi} + \dot{\varphi}_{l2}) \hat{i}_r \quad (1-2)
 \end{aligned}$$

در روابط فوق  $\hat{i}_l, \hat{j}_l, \hat{i}_r, \hat{j}_r$  به ترتیب معرف بردارهای یک‌ه در راستای محوره‌های  $x_l, y_l$  و  $x_r, y_r$  است. پارامتر  $\xi$  کمیت مکان در امتداد هر تیر است و باقی پارامترها در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. بالانویس نقطه روی هر مختصات بیانگر مشتق نسبت به زمان است. انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و کار مجازی چنین محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
 E_k = & \frac{1}{2} \rho A \left[ \int_0^l \dot{y}_{r1}^2 d\xi_{r1} + \int_0^l \dot{y}_{r2}^2 d\xi_{r2} + \int_0^l \dot{y}_{l1}^2 d\xi_{l1} \right. \\
 & + \int_0^l \dot{y}_{l2}^2 d\xi_{l2} + \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \rho I_p \left[ \int_0^l \dot{\Phi}_{r1}^2 d\xi_{r1} \right. \\
 & + \int_0^l \dot{\Phi}_{r2}^2 d\xi_{r2} + \int_0^l \dot{\Phi}_{l1}^2 d\xi_{l1} + \int_0^l \dot{\Phi}_{l2}^2 d\xi_{l2} + \frac{1}{2} J_x \dot{\phi}^2 \quad (2-1)
 \end{aligned}$$

$$E_p = \frac{1}{2} E I \left[ \int_0^l w''_{r1}^2 d\xi_{r1} + \int_0^l w''_{r2}^2 d\xi_{r2} \right.$$

$$R_{bl} = -EI[h w'''_{l1}|_s - w''_{l1}|_s]$$

$$= -EIh w'''_{l1}|_s + k_b w'_{l1}|_s + c_b \dot{w}'_{l1}|_s$$

$$R_{br} = -EI[h w'''_{r1}|_s - w''_{r1}|_s]$$

$$= -EIh w'''_{r1}|_s + k_b w'_{r1}|_s + c_b \dot{w}'_{r1}|_s \quad (10-2)$$

$$\rho I_p \ddot{\Phi}_{r/l \ n} - G I_p \varphi''_{r/l \ n} = 0 \quad (11-1)$$

$$J_x \ddot{\phi} = \tau_x + R_{tl} + R_{tr}, R_{tl} = G I_p \varphi'_{l1}|_s + c \dot{\varphi}_{l1}|_l$$

$$R_{tr} = G I_p \varphi'_{r1}|_s + c \dot{\varphi}_{r1}|_l \quad (11-2)$$

در روابط فوق اندیس (r/l , n) سمت راست یا چپ و شماره قسمت مورد نظر از صفحات خورشیدی را تعیین می‌کند. به علاوه  $R_{tl}$ ,  $R_{br}$ ,  $R_{bl}$  و  $R_{tr}$  گشتاورهای عکس‌العملی در خمش و پیچش هستند که از جانب صفحات سمت چپ و راست به بدنه‌ی اصلی اعمال می‌شوند.

### ۳. طراحی مشاهده‌گر

با فرض آن که تنها مقادیر وضعیت و سرعت زاویه‌ی ماهواره اندازه‌گیری می‌شود، تمامی متغیرهای حالت دیگر به وسیله مشاهده‌گر تخمین زده می‌شود. برای محاسبه‌ی معادلات مشاهده‌گر که به فرم دیفرانسیل مرتبط معمولی و جزئی است، معادلات دینامیکی سیستم چنین بازنویسی می‌شود:

$$\rho \ddot{A} y_{r/l \ n} + E I \dot{w}'''_{r/l \ n} = 0 \quad (12-1)$$

$$J_z \ddot{\theta} = \tau_z + \hat{R}_{bl} + \hat{R}_{br} - k_{bop} \tilde{\theta} - k_{bod} \dot{\tilde{\theta}}; \tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$$

$$\hat{R}_{bl} = -EI[h \hat{w}'''_{l1}|_s - \hat{w}''_{l1}|_s]$$

$$= -EIh \hat{w}'''_{l1}|_s + k_b \hat{w}'_{l1}|_s + c_b \dot{\hat{w}}'_{l1}|_s$$

$$\hat{R}_{br} = -EI[h \hat{w}'''_{r1}|_s - \hat{w}''_{r1}|_s]$$

$$= -EIh \hat{w}'''_{r1}|_s + k_b \hat{w}'_{r1}|_s + c_b \dot{\hat{w}}'_{r1}|_s \quad (12-2)$$

$$\rho I_p \ddot{\Phi}_{r/l \ n} - G I_p \hat{\varphi}''_{r/l \ n} = 0 \quad (13-1)$$

$$J_x \ddot{\phi} = \tau_x + \hat{R}_{tl} + \hat{R}_{tr} - k_{top} \tilde{\phi} - k_{tod} \dot{\tilde{\phi}}; \tilde{\phi} = \phi - \hat{\phi}$$

$$\hat{R}_{tl} = G I_p \hat{\varphi}'_{l1}|_s + c \dot{\hat{\varphi}}_{l1}|_l$$

$$\hat{R}_{tr} = G I_p \hat{\varphi}'_{r1}|_s + c \dot{\hat{\varphi}}_{r1}|_l \quad (13-2)$$

نمادهای  $(\hat{\cdot})$  و  $(\tilde{\cdot})$  به ترتیب معرف مقادیر تخمینی و خطای تخمین متغیرهاست. ضرایب  $k_{tod}$  و  $k_{top}$ , بهره‌های مثبت مشاهده‌گر هستند. به طور مشابه روابط شرایط مرزی ۶ و ۷ قابل بازنویسی است. در ۱۲-۲ و ۱۳-۲ خطاهای تخمین وضعیت و سرعت زاویه‌ی ماهواره به عنوان ورودی در معادلات مشاهده‌گر استفاده شده است. با تفریق روابط بالا از معادلات دینامیکی سیستم، دینامیک خطا به دست می‌آید:

$$\rho \ddot{A} y_{r/l \ n} + E I \tilde{w}'''_{r/l \ n} = 0 \quad (14-1)$$

$$J_z \ddot{\tilde{\theta}} = \tilde{R}_{bl} + \tilde{R}_{br} - k_{bop} \tilde{\theta} - k_{bod} \dot{\tilde{\theta}}; \tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$$

$$\tilde{R}_{bl} = -EI[h \tilde{w}'''_{l1}|_s - \tilde{w}''_{l1}|_s]$$

$$\delta w'_{r1}|_l : EI w''_{r1}|_l - k_s (w'_{r1}|_s - w'_{r1}|_l)$$

$$- c_s (\dot{w}'_{r1}|_s - \dot{w}'_{r1}|_l) = 0 \quad (6-2)$$

$$\delta w'_{r1}|_s : -EI w''_{r1}|_s + k_s (w'_{r1}|_s - w'_{r1}|_l)$$

$$+ c_s (\dot{w}'_{r1}|_s - \dot{w}'_{r1}|_l) = 0 \quad (6-3)$$

$$\delta w'_{l1}|_s : k_b w'_{l1}|_s - EI w''_{l1}|_s + c_b \dot{w}'_{l1}|_s = 0 \quad (6-4)$$

$$\delta w'_{l1}|_l : EI w''_{l1}|_l - k_s (w'_{l1}|_s - w'_{l1}|_l)$$

$$- c_s (\dot{w}'_{l1}|_s - \dot{w}'_{l1}|_l) = 0 \quad (6-5)$$

$$\delta w'_{l1}|_s : -EI w''_{l1}|_s + k_s (w'_{l1}|_s - w'_{l1}|_l)$$

$$+ c_s (\dot{w}'_{l1}|_s - \dot{w}'_{l1}|_l) = 0 \quad (6-6)$$

$$\varphi_{r1}|_l = \varphi_{r1}|_s \rightarrow \delta \varphi_{r1}|_l : G I_p (\varphi'_{r1}|_l - \varphi'_{r1}|_s) = 0 \quad (7-1)$$

$$\delta \varphi_{r1}|_l : G I_p \varphi'_{r1}|_l + c \dot{\varphi}_{r1}|_l = 0 \quad (7-2)$$

$$\varphi_{l1}|_l = \varphi_{l1}|_s \rightarrow \delta \varphi_{l1}|_l : G I_p (\varphi'_{l1}|_l - \varphi'_{l1}|_s) = 0 \quad (7-3)$$

$$\delta \varphi_{l1}|_l : G I_p \varphi'_{l1}|_l + c \dot{\varphi}_{l1}|_l = 0 \quad (7-4)$$

از جمع معادلات شرایط مرزی ۶ برای تیرهای سمت راست و تیرهای سمت چپ، خواهیم داشت:

$$k_b w'_{r1}|_s + c_b \dot{w}'_{r1}|_s +$$

$$EI (w''_{r1}|_l - w''_{r1}|_s - w''_{r1}|_s) = 0 \quad (8-1)$$

$$k_b w'_{l1}|_s + c_b \dot{w}'_{l1}|_s +$$

$$EI (w''_{l1}|_l - w''_{l1}|_s - w''_{l1}|_s) = 0 \quad (8-2)$$

پس از جایگذاری روابط ۸ در ۴-۵ و ۷ در ۵-۵ خواهیم داشت:

$$J_z \ddot{\tilde{\theta}} = \tau_z - EIh (w'''_{r1}|_s + w'''_{l1}|_s)$$

$$+ k_b (w'_{r1}|_s + w'_{l1}|_s) + c_b (\dot{w}'_{r1}|_s + \dot{w}'_{l1}|_s) \quad (9-1)$$

$$J_x \ddot{\tilde{\phi}} = \tau_x + G I_p (\varphi'_{r1}|_s + \varphi'_{l1}|_s)$$

$$+ c \dot{\varphi}_{r1}|_l + c \dot{\varphi}_{l1}|_l \quad (9-2)$$

معادلات ۹ نشان می‌دهد چگونه ارتعاشات صفحات خورشیدی دینامیک وضعیت بدنه‌ی اصلی را تحت تأثیر قرار می‌دهد. جملات دوم، سوم و چهارم در سمت راست رابطه‌ی ۹-۱ به ترتیب مبین گشتاور اعمال شده از طریق نیروی برشی و گشتاور ناشی از سختی ارتجاعی و میرایی ویسکوز در اتصال بین صفحات خورشیدی با بدنه‌ی اصلی ماهواره است. همچنین جمله‌ی دوم در سمت راست معادله‌ی ۹-۲ معرف گشتاور برشی ناشی از پیچش صفحات خورشیدی در محل اتصال با هاب است.

برای یک فرم کلی از ماهواره‌ها با صفحات متشکل از هر تعداد قسمت در دو یا یک سمت، دستگاه معادلات دینامیکی حاکم، شامل ۱-۱۰ و ۱۱-۱ را برای هر قسمت از صفحات به همراه ۲-۱۰ و ۲-۱۱ به عنوان دینامیک وضعیت، می‌توان نوشت:

$$\rho A \ddot{y}_{r/l \ n} + E I w'''_{r/l \ n} = 0 \quad (10-1)$$

$$J_z \ddot{\theta} = \tau_z + R_{bl} + R_{br}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\dot{}}^l \tilde{w}_{l1}'' \left( \frac{\partial \tilde{w}_{l1}''}{\partial t} \right) d\xi_{l1} + \int_{\dot{}}^l \tilde{w}_{l1}'' \left( \frac{\partial \tilde{w}_{l1}''}{\partial t} \right) d\xi_{l1} \\
 \dot{E}_{to} = & \rho I_p \left[ \int_{\dot{}}^l \dot{\Phi}_{r1} \ddot{\Phi}_{r1} d\xi_{r1} + \int_{\dot{}}^l \dot{\Phi}_{r1} \ddot{\Phi}_{r1} d\xi_{r1} \right. \\
 & + \int_{\dot{}}^l \dot{\Phi}_{l1} \ddot{\Phi}_{l1} d\xi_{l1} + \int_{\dot{}}^l \dot{\Phi}_{l1} \ddot{\Phi}_{l1} d\xi_{l1} \left. \right] + \\
 G I_p \left[ \int_{\dot{}}^l \dot{\varphi}_{r1}' \left( \frac{\partial \dot{\varphi}_{r1}'}{\partial t} \right) d\xi_{r1} + \int_{\dot{}}^l \dot{\varphi}_{r1}' \left( \frac{\partial \dot{\varphi}_{r1}'}{\partial t} \right) d\xi_{r1} \right. \\
 & + \int_{\dot{}}^l \dot{\varphi}_{l1}' \left( \frac{\partial \dot{\varphi}_{l1}'}{\partial t} \right) d\xi_{l1} + \int_{\dot{}}^l \dot{\varphi}_{l1}' \left( \frac{\partial \dot{\varphi}_{l1}'}{\partial t} \right) d\xi_{l1} \left. \right]
 \end{aligned}$$

انتگرال‌های انرژی جنبشی را بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
 \int_{\dot{}}^l \rho A \dot{y}_{r1} \ddot{y}_{r1} d\xi_{r1} &= \int_{\dot{}}^l -E \dot{y}_{r1} \tilde{w}_{r1}'''' d\xi_{r1} = \\
 -E I \left[ \dot{y}_{r1} \tilde{w}_{r1}''' \Big|_{\dot{}}^l - \int_{\dot{}}^l \dot{y}_{r1}' \tilde{w}_{r1}'''' d\xi_{r1} \right] &= \\
 -E I \left\{ [(h+l)\dot{\theta} + \dot{w}_{r1}|_l] \tilde{w}_{r1}''' \Big|_{\dot{}}^l - \dot{h} \dot{\theta} \tilde{w}_{r1}''' \Big|_{\dot{}}^l \right. \\
 & \left. - [\dot{y}_{r1}' \tilde{w}_{r1}'' \Big|_{\dot{}}^l - \int_{\dot{}}^l \tilde{w}_{r1}'' \left( \frac{\partial \tilde{y}_{r1}''}{\partial t} \right) d\xi_{r1}] \right\} \\
 \int_{\dot{}}^l \rho A \dot{y}_{r1} \ddot{y}_{r1} d\xi_{r1} &= \int_{\dot{}}^l -E \dot{y}_{r1} \tilde{w}_{r1}'''' d\xi_{r1} = \\
 -E I \left[ \dot{y}_{r1} \tilde{w}_{r1}''' \Big|_{\dot{}}^l - \int_{\dot{}}^l \dot{y}_{r1}' \tilde{w}_{r1}'''' d\xi_{r1} \right] &= \\
 -E I \left\{ [(h+l)\dot{\theta} + \dot{w}_{r1}|_l] \tilde{w}_{r1}''' \Big|_{\dot{}}^l \right. \\
 & \left. - [(h+l)\dot{\theta} + \dot{w}_{r1}|_l] \tilde{w}_{r1}''' \Big|_{\dot{}}^l \right. \\
 & \left. - [\dot{y}_{r1}' \tilde{w}_{r1}'' \Big|_{\dot{}}^l - \int_{\dot{}}^l \tilde{w}_{r1}'' \left( \frac{\partial \tilde{y}_{r1}''}{\partial t} \right) d\xi_{r1}] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{I)} \int_{\dot{}}^l \rho I_p \dot{\Phi}_{r1} \ddot{\Phi}_{r1} d\xi_{r1} &\xrightarrow{(15)} \int_{\dot{}}^l \dot{\Phi}_{r1} G I_p \ddot{\varphi}_{r1}'' d\xi_{r1} = \\
 G I_p \left[ \dot{\Phi}_{r1} \ddot{\varphi}_{r1}' \Big|_{\dot{}}^l - \int_{\dot{}}^l G I_p \dot{\Phi}_{r1} \ddot{\varphi}_{r1}' d\xi_{r1} \right] &= G I_p \left\{ -\dot{\phi} \ddot{\varphi}_{r1}' \Big|_{\dot{}}^l \right. \\
 & + (\dot{\phi} + \dot{\varphi}_{r1}|_l) \ddot{\varphi}_{r1}' \Big|_{\dot{}}^l - \int_{\dot{}}^l \ddot{\varphi}_{r1}' \left( \frac{\partial \dot{\varphi}_{r1}'}{\partial t} \right) d\xi_{r1} \left. \right\} \\
 \text{II)} \int_{\dot{}}^l \rho I_p \dot{\Phi}_{r1} \ddot{\Phi}_{r1} d\xi_{r1} &= \int_{\dot{}}^l \dot{\Phi}_{r1} G I_p \ddot{\varphi}_{r1}'' d\xi_{r1} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (17-2) \quad & = -E I h \tilde{w}_{l1}''' \Big|_{\dot{}} + k_b \tilde{w}_{l1}' \Big|_{\dot{}} + c_b \dot{w}_{l1}' \Big|_{\dot{}} \\
 \dot{R}_{br} &= -E I [h \tilde{w}_{r1}''' \Big|_{\dot{}} - \tilde{w}_{r1}'' \Big|_{\dot{}}] \\
 &= -E I h \tilde{w}_{r1}''' \Big|_{\dot{}} + k_b \tilde{w}_{r1}' \Big|_{\dot{}} + c_b \dot{w}_{r1}' \Big|_{\dot{}} \\
 (14-2) \quad & \rho I_p \ddot{\Phi}_{r1/l} - G I_p \ddot{\varphi}_{r1/l} = 0 \\
 J_x \ddot{\phi} &= \dot{R}_{tl} + \dot{R}_{tr} - k_{top} \dot{\phi} - k_{toad} \dot{\phi}; \dot{\phi} = \phi - \hat{\phi} \\
 \dot{R}_{tl} &= G I_p \dot{\varphi}_{l1}' \Big|_{\dot{}} + c \dot{\varphi}_{l1} \Big|_{\dot{}} \\
 \dot{R}_{tr} &= G I_p \dot{\varphi}_{r1}' \Big|_{\dot{}} + c \dot{\varphi}_{r1} \Big|_{\dot{}} \\
 (15-2) \quad &
 \end{aligned}$$

به منظور اثبات بایزادی این مشاهده‌گر، یک تابع کاندید لیاپانوف تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 V_o &= E_{bo} + 1/2 J_z \dot{\theta}^2 + 1/2 k_{bop} \tilde{\theta}^2 \\
 &+ 1/2 J_x \dot{\phi}^2 + 1/2 k_s [(\tilde{w}_{r1}' \Big|_{\dot{}} - \tilde{w}_{l1}' \Big|_{\dot{}})^2 \\
 &+ E_{to} + 1/2 k_{top} \dot{\phi}^2 + (\tilde{w}_{l1}' \Big|_{\dot{}} - \tilde{w}_{l1}' \Big|_{\dot{}})^2 \\
 &+ 1/2 k_b [(\tilde{w}_{r1}' \Big|_{\dot{}})^2 + (\tilde{w}_{l1}' \Big|_{\dot{}})^2] \\
 (16-1) \quad &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{bo} &= 1/2 \rho A \left[ \int_{\dot{}}^l \dot{y}_{r1}^2 d\xi_{r1} + \int_{\dot{}}^l \dot{y}_{r1}^2 d\xi_{r1} \right. \\
 &+ \int_{\dot{}}^l \dot{y}_{l1}^2 d\xi_{l1} + \int_{\dot{}}^l \dot{y}_{l1}^2 d\xi_{l1} \left. \right] + 1/2 E I \left[ \int_{\dot{}}^l \tilde{w}_{r1}''^2 d\xi_{r1} \right. \\
 &+ \int_{\dot{}}^l \tilde{w}_{r1}''^2 d\xi_{r1} + \int_{\dot{}}^l \tilde{w}_{l1}''^2 d\xi_{l1} + \int_{\dot{}}^l \tilde{w}_{l1}''^2 d\xi_{l1} \left. \right] \\
 (16-2) \quad &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{to} &= 1/2 \rho I_p \left[ \int_{\dot{}}^l \dot{\Phi}_{r1}^2 d\xi_{r1} + \int_{\dot{}}^l \dot{\Phi}_{r1}^2 d\xi_{r1} \right. \\
 &+ \int_{\dot{}}^l \dot{\Phi}_{l1}^2 d\xi_{l1} + \int_{\dot{}}^l \dot{\Phi}_{l1}^2 d\xi_{l1} \left. \right] + 1/2 G I_p \left[ \int_{\dot{}}^l \dot{\varphi}_{r1}'^2 d\xi_{r1} \right. \\
 &+ \int_{\dot{}}^l \dot{\varphi}_{r1}'^2 d\xi_{r1} + \int_{\dot{}}^l \dot{\varphi}_{l1}'^2 d\xi_{l1} + \int_{\dot{}}^l \dot{\varphi}_{l1}'^2 d\xi_{l1} \left. \right] \\
 (16-3) \quad &
 \end{aligned}$$

سپس مشتق زمانی تابع کاندید لیاپانوف مثبت معین بالا را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_o &= J_z \dot{\theta} \ddot{\theta} + k_{bop} \tilde{\theta} \dot{\theta} + J_x \dot{\phi} \ddot{\phi} + k_{top} \dot{\phi} \ddot{\phi} \\
 &+ k_b [(\tilde{w}_{r1}' \Big|_{\dot{}})(\dot{w}_{r1}' \Big|_{\dot{}}) + (\tilde{w}_{l1}' \Big|_{\dot{}})(\dot{w}_{l1}' \Big|_{\dot{}})] \\
 &+ k_s [(\tilde{w}_{r1}' \Big|_{\dot{}} - \tilde{w}_{r1}' \Big|_{\dot{}})(\dot{w}_{r1}' \Big|_{\dot{}} - \dot{w}_{r1}' \Big|_{\dot{}}) + \dot{E}_{bo} \\
 &+ (\tilde{w}_{l1}' \Big|_{\dot{}} - \tilde{w}_{l1}' \Big|_{\dot{}})(\dot{w}_{l1}' \Big|_{\dot{}} - \dot{w}_{l1}' \Big|_{\dot{}})] + \dot{E}_{to} \\
 (17-1) \quad &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_{bo} &= \rho A \left[ \int_{\dot{}}^l \dot{y}_{r1} \ddot{y}_{r1} d\xi_{r1} + \int_{\dot{}}^l \dot{y}_{r1} \ddot{y}_{r1} d\xi_{r1} \right. \\
 &+ \int_{\dot{}}^l \dot{y}_{l1} \ddot{y}_{l1} d\xi_{l1} + \int_{\dot{}}^l \dot{y}_{l1} \ddot{y}_{l1} d\xi_{l1} \left. \right] + \\
 E I \left[ \int_{\dot{}}^l \tilde{w}_{r1}'' \left( \frac{\partial \tilde{w}_{r1}''}{\partial t} \right) d\xi_{r1} + \int_{\dot{}}^l \tilde{w}_{r1}'' \left( \frac{\partial \tilde{w}_{r1}''}{\partial t} \right) d\xi_{r1} \right.
 \end{aligned}$$

محاسبه کنیم، قوانین کنترلی عبارت خواهند بود از:

$$\tau_z = -k_{bd}\dot{\theta} - k_{bp}e_\theta - k_{bc}(\dot{w}'_{r1}|_0 + \dot{w}'_{l1}|_0) \quad (22-1)$$

$$\tau_x = -k_{td}\dot{\phi} - k_{tp}e_\phi - k_{tc}(\dot{\varphi}'_{r1}|_0 + \dot{\varphi}'_{l1}|_0) \quad (22-2)$$

$$e_\phi = \phi - \phi_d$$

و دینامیک مدار بسته‌ی وضعیت عبارت خواهد بود از:

$$J_z\ddot{\theta} = R_{bl} + R_{br} - k_{bd}\dot{\theta} - k_{bp}e_\theta - k_{bc}(\dot{w}'_{r1}|_0 + \dot{w}'_{l1}|_0) \quad (23-1)$$

$$J_x\ddot{\phi} = R_{tl} + R_{tr} - k_{td}\dot{\phi} - k_{tp}e_\phi - k_{tc}(\dot{\varphi}'_{r1}|_0 + \dot{\varphi}'_{l1}|_0) \quad (23-2)$$

در واقع به منظور محاسبه‌ی پاسخ‌دهندها بایستی معادلات دینامیکی مشاهده‌گر با شرایط اولیه‌ی تخمینی به صورت همزمان حل شود. در این راستا روش اجرای محدود را به دلیل دقت بالای آن به کار می‌گیریم. مشابه فرایند اثبات پایداری برای روش کنترل ارائه شده، لازم است پایداری سیستم کنترلی مبنی بر مشاهده‌گر نیز اثبات شود. بنابراین مشابه قبل فرایند انتخاب تابع کاندید لیاپانوف و روند اثبات را در پیش می‌گیریم:

$$\begin{aligned} V_c &= E_t + 1/2 J_x \dot{\phi}^2 + 1/2 \alpha_t e_\phi^2 + E_b \\ &+ 1/2 \beta_t (e_\phi + \frac{\varepsilon_t}{\beta_t} \text{Sgn}(\dot{\phi}))^2 + 1/2 J_z \dot{\theta}^2 \\ &+ 1/2 \beta_b (e_\theta + \frac{\varepsilon_b}{\beta_b} \text{Sgn}(\dot{\theta}))^2 + 1/2 \alpha_b e_\theta^2 \\ &+ 1/2 k_s [(w'_{r1}|_0 - w'_{r1}|_l)^2 + (w'_{l1}|_0 - w'_{l1}|_l)^2] \\ &+ 1/2 k_b [(w'_{r1}|_0)^2 + (w'_{l1}|_0)^2] \end{aligned} \quad (24-1)$$

$$\begin{aligned} E_b &= 1/4 \rho A [\int_0^l \dot{y}_{r1}^2 d\xi_{r1} + \int_0^l \dot{y}_{r2}^2 d\xi_{r2} \\ &+ \int_0^l \dot{y}_{l1}^2 d\xi_{l1} + \int_0^l \dot{y}_{l2}^2 d\xi_{l2}] + 1/4 EI [\int_0^l w''_{r1}{}^2 d\xi_{r1} \\ &+ \int_0^l w''_{r2}{}^2 d\xi_{r2} + \int_0^l w''_{l1}{}^2 d\xi_{l1} + \int_0^l w''_{l2}{}^2 d\xi_{l2}] \end{aligned} \quad (24-2)$$

$$\begin{aligned} E_t &= 1/4 \rho I_p [\int_0^l \dot{\Phi}_{r1}^2 d\xi_{r1} + \int_0^l \dot{\Phi}_{r2}^2 d\xi_{r2} \\ &+ \int_0^l \dot{\Phi}_{l1}^2 d\xi_{l1} + \int_0^l \dot{\Phi}_{l2}^2 d\xi_{l2}] + 1/4 G I_p [\int_0^l \varphi'_{r1}{}^2 d\xi_{r1} \\ &+ \int_0^l \varphi'_{r2}{}^2 d\xi_{r2} + \int_0^l \varphi'_{l1}{}^2 d\xi_{l1} + \int_0^l \varphi'_{l2}{}^2 d\xi_{l2}] \end{aligned} \quad (24-3)$$

ضرایب  $\beta_{b/t}$ ،  $\varepsilon_{b/t}$  و  $\alpha_{b/t}$  در ادامه تعیین خواهد شد. مشتق زمانی تابع لیاپانوف

$$\begin{aligned} G I_p \dot{\Phi}_{r2} \dot{\varphi}'_{r2}|_0 - \int_0^l G I_p \dot{\Phi}_{r2} \dot{\varphi}'_{r2} d\xi_{r2} = \\ G I_p \{(\dot{\phi} + \dot{\varphi}_{r2}|_l) \dot{\varphi}'_{r2}|_l - (\dot{\phi} + \dot{\varphi}_{r2}|_0) \dot{\varphi}'_{r2}|_0 \\ - \int_0^l \dot{\varphi}'_{r2} (\frac{\partial \dot{\varphi}'_{r2}}{\partial t}) d\xi_{r2}\} \end{aligned} \quad (19-2)$$

پس از بسط دادن مشابه برای صفحات سمت چپ و با اعمال شرایط مرزی و مقداری ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{bo} &= -(\dot{w}'_{r2}|_0 - \dot{w}'_{r1}|_l)[k_s(\dot{w}'_{r2}|_0 - \dot{w}'_{r1}|_l) \\ &+ c_s(\dot{w}'_{r2}|_0 - \dot{w}'_{r1}|_l)] + h E \dot{I} \dot{\theta} \dot{w}'''_{l1}|_0 \\ &- (\dot{w}'_{r1}|_0 + \dot{\theta})[k_b \dot{w}'_{r1}|_0 + c_b \dot{w}'_{r1}|_0] \\ &- (\dot{w}'_{l1}|_0 + \dot{\theta})[k_b \dot{w}'_{l1}|_0 + c_b \dot{w}'_{l1}|_0] \\ &- (\dot{w}'_{l2}|_0 - \dot{w}'_{l1}|_l)[k_s(\dot{w}'_{l2}|_0 - \dot{w}'_{l1}|_l) \\ &+ c_s(\dot{w}'_{l2}|_0 - \dot{w}'_{l1}|_l)] + h E \dot{I} \dot{\theta} \dot{w}'''_{l1}|_0 \end{aligned} \quad (20-1)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_{to} &= -c(\dot{\varphi}'_{r2}|_l + \dot{\varphi}'_{l2}|_l) \\ &- \dot{\phi}[G I_p(\dot{\varphi}'_{r1}|_0 + \dot{\varphi}'_{l1}|_0) + c(\dot{\varphi}_{r2}|_l + \dot{\varphi}_{l2}|_l)] \end{aligned} \quad (20-2)$$

با لحاظ ۱۴ و ۱۵، از ۲۰ در ۱۷ جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \dot{V}_o &= \dot{\theta}[-\tilde{R}_{bl} - \tilde{R}_{br}] - c(\dot{\varphi}'_{r2}|_l + \dot{\varphi}'_{l2}|_l) \\ &+ \dot{\theta}[\tilde{R}_{bl} + \tilde{R}_{br} - k_{bop}\dot{\theta} - k_{bod}\dot{\theta}] + k_{bop}\dot{\theta}\dot{\theta} \\ &- c_s[(\dot{w}'_{r2}|_0 - \dot{w}'_{r1}|_l)^2 + (\dot{w}'_{l2}|_0 - \dot{w}'_{l1}|_l)^2] \\ &- c_b[(\dot{w}'_{r1}|_0)^2 + (\dot{w}'_{l1}|_0)^2] + \dot{\phi}[-\tilde{R}_{tl} - \tilde{R}_{tr}] \\ &+ \dot{\phi}[\tilde{R}_{tl} + \tilde{R}_{tr} - k_{top}\dot{\phi} - k_{tod}\dot{\phi}] + k_{top}\dot{\phi}\dot{\phi} \\ &= -k_{bod}\dot{\theta}^2 - k_{tod}\dot{\phi}^2 \\ &- c(\dot{\varphi}'_{r2}|_l + \dot{\varphi}'_{l2}|_l) - c_b[(\dot{w}'_{r1}|_0)^2 + (\dot{w}'_{l1}|_0)^2] \\ &- c_s[(\dot{w}'_{r2}|_0 - \dot{w}'_{r1}|_l)^2 + (\dot{w}'_{l2}|_0 - \dot{w}'_{l1}|_l)^2] \end{aligned} \quad (21)$$

به طور مشخص مشتق زمانی تابع لیاپانوف منفی نیمه معین است؛ لذا تمامی جملات در این تابع مثبت معین و به عبارت دیگر خطاهای تخمین متغیرهای حالت مربوط به ارتعاشات و وضعیت ماهواره، محدود باقی می‌ماند. از این فراتر می‌توان نتیجه گرفت خطاهای تخمین متغیرها به صورت مجانبی به صفر میل می‌کند. این استنتاج در قضیه‌ی ۱ (بخش ۵) بر اساس اصل ناوردایی لاسال<sup>[۲۵]</sup> انجام گرفته است.

#### ۴. طراحی کنترل‌کننده مرزی مبتنی بر مشاهده‌گر

با بهره‌گیری از مشاهده‌گر طراحی شده در بخش قبل، قادریم به کنترل مرزی وضعیت و ارتعاشات ماهواره بپردازیم. اگر فقط داده‌های وضعیت و سرعت زاویه‌ی هاب مورد نیاز باشد و سایر اطلاعات مرزی جهت پاسخ‌دهی را با تخمین توسط مشاهده‌گر



$$\begin{aligned} \dot{V}_c = & -c_s[(\dot{w}'_{r\tau}|_s - \dot{w}'_{r\lambda}|_l)^\tau + (\dot{w}'_{l\tau}|_s - \dot{w}'_{l\lambda}|_l)^\tau] \\ & - c_b[(\dot{w}'_{r\tau}|_s)^\tau + (\dot{w}'_{l\tau}|_s)^\tau] - c(\dot{\varphi}'_{r\tau}|_l + \dot{\varphi}'_{l\tau}|_l) \\ & - k_{td}\dot{\phi}^\tau - k_{bd}\dot{\theta}^\tau + \begin{cases} \dot{\phi}f_{t\lambda} < 0, \dot{\phi} < 0 \\ \dot{\phi}f_{t\tau} < 0, \dot{\phi} > 0 \\ 0, \dot{\phi} = 0 \end{cases} \\ & + \begin{cases} \dot{\theta}f_{b\lambda} < 0, \dot{\theta} < 0 \\ \dot{\theta}f_{b\tau} < 0, \dot{\theta} > 0 \\ 0, \dot{\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \dot{V}_c \leq 0 \end{aligned} \quad (29)$$

لذا پایداری به مفهوم لیاپانوف به اثبات رسید.

## ۵. اثبات پایداری مجانبی با حضور مشاهدهگر

در قضیه ی ۱ مجموعه ی ناوردا ی کل سیستم مدار بسته مبتنی بر مشاهدهگر تحلیل و محاسبه شده است. بدین جهت دو تابع لیاپانوف  $V_o$  و  $V_c$  جمع زده می شود تا تابع لیاپانوف ناظر بر کل سیستم به دست آید. مشتق زمانی این تابع کلی از روابط ۲۱ و ۲۹ به دست می آید.

$$\begin{aligned} V = & V_o + V_c \quad (30-1) \\ \dot{V} = & -c_s[(\dot{w}'_{r\tau}|_s - \dot{w}'_{r\lambda}|_l)^\tau + (\dot{w}'_{l\tau}|_s - \dot{w}'_{l\lambda}|_l)^\tau] \\ & + (\dot{w}'_{r\tau}|_s - \dot{w}'_{r\lambda}|_l)^\tau + (\dot{w}'_{l\tau}|_s - \dot{w}'_{l\lambda}|_l)^\tau \\ & - c_b[(\dot{w}'_{r\tau}|_s)^\tau + (\dot{w}'_{l\tau}|_s)^\tau] + (\dot{w}'_{r\tau}|_s)^\tau + (\dot{w}'_{l\tau}|_s)^\tau \\ & - c(\dot{\varphi}'_{r\tau}|_l + \dot{\varphi}'_{l\tau}|_l) - k_{bd}\dot{\theta}^\tau - k_{td}\dot{\phi}^\tau \\ & - k_{bd}\dot{\theta}^\tau - k_{td}\dot{\phi}^\tau + \begin{cases} \dot{\phi}f_{t\lambda} < 0, \dot{\phi} < 0 \\ \dot{\phi}f_{t\tau} < 0, \dot{\phi} \geq 0 \end{cases} \\ & + \begin{cases} \dot{\theta}f_{b\lambda} < 0, \dot{\theta} < 0 \\ \dot{\theta}f_{b\tau} < 0, \dot{\theta} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \dot{V} \leq 0 \end{aligned} \quad (30-2)$$

بنابراین سیستم به مجموعه ی ناوردا ی خود میل می کند که از اتحاد  $V^* = 0$  محاسبه می شود.

**قضیه ی ۱:** شرط لازم برای  $V^* = 0$  عبارت است از  $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$  و  $\dot{\theta} = 0$  یعنی در چنین شرایطی، وضعیت و خطای تخمین آن مقادیری ثابت دارند که با  $\phi^*$ ,  $\theta^*$  و  $\tilde{\theta}^*$  نامگذاری می شوند.

$$\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = \theta^* = cte, \quad \ddot{\theta} = 0 \quad (10)$$

$$\rho A \ddot{w}_{r/l} + EI w_{r/l}^{''''} = 0 \quad (31-1)$$

$$\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \tilde{\theta} = \tilde{\theta}^* = cte, \quad \ddot{\theta} = 0 \quad (14)$$

$$\rho A \ddot{w}_{r/l} + EI \tilde{w}_{r/l}^{''''} = 0 \quad (31-2)$$

$$\hat{\theta} = \theta - \tilde{\theta} \Rightarrow \hat{\theta} = \hat{\theta}^* = cte, \quad \ddot{\theta} = 0 \quad (12)$$

$$\rho A \ddot{w}_{r/l} + EI \hat{w}_{r/l}^{''''} = 0 \quad (31-3)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_c = & J_x \dot{\phi} \ddot{\phi} + \alpha_t e_\phi \dot{\phi} + \beta_t \dot{\phi} (e_\phi + \frac{\varepsilon_t}{\beta_t} Sgn(\dot{\phi})) \\ & + J_z \dot{\theta} \ddot{\theta} + \alpha_b e_\theta \dot{\theta} + \beta_b \dot{\theta} (e_\theta + \frac{\varepsilon_b}{\beta_b} Sgn(\dot{\theta})) \\ & + k_s[(\dot{w}'_{r\tau}|_s - \dot{w}'_{r\lambda}|_l)(\dot{w}'_{r\tau}|_s - \dot{w}'_{r\lambda}|_l) + \dot{E}_t \\ & + (\dot{w}'_{l\tau}|_s - \dot{w}'_{l\lambda}|_l)(\dot{w}'_{l\tau}|_s - \dot{w}'_{l\lambda}|_l)] + \dot{E}_b \\ & + k_b[(\dot{w}'_{r\tau}|_s)(\dot{w}'_{r\tau}|_s) + (\dot{w}'_{l\tau}|_s)(\dot{w}'_{l\tau}|_s)] \end{aligned} \quad (25-1)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_b = & -(\dot{w}'_{r\tau}|_s - \dot{w}'_{r\lambda}|_l)[k_s(\dot{w}'_{r\tau}|_s - \dot{w}'_{r\lambda}|_l) \\ & + c_s(\dot{w}'_{r\tau}|_s - \dot{w}'_{r\lambda}|_l)] + hEI\dot{\theta} w_{r\lambda}^{''''}|_s \\ & - (\dot{w}'_{r\lambda}|_s + \dot{\theta})[k_b \dot{w}'_{r\lambda}|_s + c_b \dot{w}'_{r\lambda}|_s] \\ & - (\dot{w}'_{l\lambda}|_s + \dot{\theta})[k_b \dot{w}'_{l\lambda}|_s + c_b \dot{w}'_{l\lambda}|_s] \\ & - (\dot{w}'_{l\tau}|_s - \dot{w}'_{l\lambda}|_l)[k_s(\dot{w}'_{l\tau}|_s - \dot{w}'_{l\lambda}|_l) \\ & + c_s(\dot{w}'_{l\tau}|_s - \dot{w}'_{l\lambda}|_l)] + hEI\dot{\theta} w_{l\lambda}^{''''}|_s \end{aligned} \quad (25-2)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_t = & -c(\dot{\varphi}'_{r\tau}|_l + \dot{\varphi}'_{l\tau}|_l) \\ & - \dot{\phi}[GI_p(\varphi'_{r\lambda}|_s + \varphi'_{l\lambda}|_s) + c(\dot{\varphi}_{r\tau}|_l + \dot{\varphi}_{l\tau}|_l)] \end{aligned} \quad (25-3)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_c = & -k_{bd}\dot{\theta}^\tau + \dot{\phi}[-k_{tc}(\dot{\varphi}'_{r\lambda}|_s + \dot{\varphi}'_{l\lambda}|_s) \\ & - k_{tp}e_\phi + \alpha_t e_\phi + \beta_t e_\phi + \varepsilon_t Sgn(\dot{\phi})] - k_{td}\dot{\phi}^\tau \\ & - c(\dot{\varphi}'_{r\tau}|_l + \dot{\varphi}'_{l\tau}|_l) + \dot{\theta}[-k_{bc}(\dot{w}'_{r\lambda}|_s + \dot{w}'_{l\lambda}|_s) \\ & - k_{bp}e_\theta + \alpha_b e_\theta + \beta_b e_\theta + \varepsilon_b Sgn(\dot{\theta})] \\ & - c_s[(\dot{w}'_{r\tau}|_s - \dot{w}'_{r\lambda}|_l)^\tau + (\dot{w}'_{l\tau}|_s - \dot{w}'_{l\lambda}|_l)^\tau] \\ & - c_b[(\dot{w}'_{r\tau}|_s)^\tau + (\dot{w}'_{l\tau}|_s)^\tau] \end{aligned} \quad (26)$$

طبق اثبات پایداری لیاپانوف برای مشاهدهگر در بخش قبل، متغیرهای تخمین زده شده توسط مشاهدهگر همیشه محدود می مانند. بنابراین همواره ضرایب  $\alpha_{b/t}$ ,  $\varepsilon_{b/t}$  و  $\beta_{b/t}$  را می توان به کمک روابط زیر تعیین کرد:

$$\begin{aligned} \forall k_{bp} > 0 : \exists \alpha_b, \beta_b > 0 | \alpha_b + \beta_b = k_{bp} \\ \forall t : \exists \varepsilon_b < 0 | \begin{cases} |\varepsilon_b| > |R_b| \\ R_b = k_{bc}(\dot{w}'_{r\lambda}|_s + \dot{w}'_{l\lambda}|_s) \end{cases} \end{aligned} \quad (27-1)$$

$$\begin{aligned} \forall k_{tp} > 0 : \exists \alpha_t, \beta_t > 0 | \alpha_t + \beta_t = k_{tp} \\ \forall t : \exists \varepsilon_t < 0 | \begin{cases} |\varepsilon_t| > |R_t| \\ R_t = k_{tc}(\dot{\varphi}'_{r\lambda}|_s + \dot{\varphi}'_{l\lambda}|_s) \end{cases} \end{aligned} \quad (27-2)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} R_b + \varepsilon_b Sgn(\dot{\theta}) = \begin{cases} f_{b\lambda} = -\varepsilon_b + R_b > 0, \dot{\theta} < 0 \\ f_{b\tau} = +\varepsilon_b + R_b < 0, \dot{\theta} > 0 \end{cases} \\ R_t + \varepsilon_t Sgn(\dot{\phi}) = \begin{cases} f_{t\lambda} = -\varepsilon_t + R_t > 0, \dot{\phi} < 0 \\ f_{t\tau} = +\varepsilon_t + R_t < 0, \dot{\phi} > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{\infty} [-E I h \chi'''_{b r \setminus j}|_0 + k_b \chi'_{b r \setminus j}|_0] \tilde{\eta}_{b r \setminus j}(t) \\
& = \sum_{i=1}^{\infty} [a_{b l \setminus i} \exp(\lambda_{b i} t) + \hat{a}_{b l \setminus i} \exp(\hat{\lambda}_{b i} t)] \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} [a_{b r \setminus j} \exp(\lambda_{b j} t) + \hat{a}_{b r \setminus j} \exp(\hat{\lambda}_{b j} t)] \quad (37-1) \\
\tilde{\tau}_{x^*} & = \sum_{i=1}^{\infty} G I_p \chi'_{t l \setminus i}|_0 \tilde{\eta}_{t l \setminus i}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} G I_p \chi'_{t r \setminus j}|_0 \tilde{\eta}_{t r \setminus j}(t) \\
& = \sum_{i=1}^{\infty} [a_{t l \setminus i} \exp(\lambda_{t i} t) + \hat{a}_{t l \setminus i} \exp(\hat{\lambda}_{t i} t)] \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} [a_{t r \setminus j} \exp(\lambda_{t j} t) + \hat{a}_{t r \setminus j} \exp(\hat{\lambda}_{t j} t)] \quad (37-2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{z^*} & = \sum_{i=1}^{\infty} [-E I h \chi'''_{b l \setminus i}|_0 + k_b \chi'_{b l \setminus i}|_0] \eta_{b l \setminus i}(t) \\
& - k_{b c} \chi'_{b l \setminus i}|_0 \hat{\eta}_{b l \setminus i}(t) - k_{b c} \chi'_{b l \setminus j}|_0 \hat{\eta}_{b l \setminus j}(t) \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} [-E I h \chi'''_{b r \setminus j}|_0 + k_b \chi'_{b r \setminus j}|_0] \eta_{b r \setminus j}(t) \\
& = \sum_{i=1}^{\infty} [b_{b l \setminus i} \exp(\lambda_{b i} t) + \hat{b}_{b l \setminus i} \exp(\hat{\lambda}_{b i} t)] \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} [b_{b r \setminus j} \exp(\lambda_{b j} t) + \hat{b}_{b r \setminus j} \exp(\hat{\lambda}_{b j} t)] \quad (38-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{x^*} & = \sum_{i=1}^{\infty} G I_p \chi'_{t l \setminus i}|_0 \eta_{t l \setminus i}(t) - k_{t c} \chi'_{t l \setminus i}|_0 \hat{\eta}_{t l \setminus i}(t) \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} G I_p \chi'_{t r \setminus j}|_0 \eta_{t r \setminus j}(t) - k_{t c} \chi'_{t r \setminus j}|_0 \hat{\eta}_{t r \setminus j}(t) \\
& = \sum_{i=1}^{\infty} [b_{t l \setminus i} \exp(\lambda_{t i} t) + \hat{b}_{t l \setminus i} \exp(\hat{\lambda}_{t i} t)] \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} [b_{t r \setminus j} \exp(\lambda_{t j} t) + \hat{b}_{t r \setminus j} \exp(\hat{\lambda}_{t j} t)] \quad (38-2)
\end{aligned}$$

عبارت  $b_{t/b r \setminus j}, \hat{b}_{t/b l \setminus i}, b_{t/b l \setminus i}, \hat{a}_{t/b r \setminus j}, a_{t/b r \setminus j}, \hat{a}_{t/b l \setminus i}, a_{t/b l \setminus i}$  و  $\hat{b}_{t/b r \setminus j}$  ضرایب مختصر ترکیب شده هستند. حاصل جمع توابع نمایی متفاوت، برابر با یک مقدار ثابت شده است. این گزاره فقط و فقط زمانی برای همیشه برقرار خواهد بود که داشته باشیم:

$$\begin{cases} \tilde{\tau}_{z^*} = \tau_{z^*} = 0 \\ \tilde{\tau}_{x^*} = \tau_{x^*} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\theta} = e_{\theta} = 0 \\ \tilde{\phi} = e_{\phi} = 0 \end{cases} \quad (39)$$

رابطه ۳۹ حاکی از آن است که خطای تخمین وضعیت و خطای وضعیت نسبت به مطلوب با مقادیر صفر، عضو مجموعه ی ناورد است، حتی اگر از وجود میرایی صرف نظر شود. به علاوه چنان که در لم ۱ اثبات شده، خطای تخمین پارامترهای ارتعاشی و مقادیر واقعی آنها نیز با مقادیر صفر عضو مجموعه ی ناوردا هستند.

$$\dot{\phi} = 0 \Rightarrow \phi = \phi_* = cte, \quad \ddot{\phi} = 0 \quad (11)$$

$$\rho A \ddot{\varphi}_{r/l \setminus} - G I_p \varphi''_{r/l \setminus} = 0 \quad (32-1)$$

$$\dot{\phi} = 0 \Rightarrow \tilde{\phi} = \tilde{\phi}_* = cte, \quad \ddot{\phi} = 0 \quad (15)$$

$$\rho A \ddot{\varphi}_{r/l \setminus} - G I_p \varphi''_{r/l \setminus} = 0 \quad (32-2)$$

$$\hat{\phi} = \phi - \tilde{\phi} \Rightarrow \hat{\phi} = \hat{\phi}_* = cte, \quad \ddot{\phi} = 0 \quad (13)$$

$$\rho A \ddot{\varphi}_{r/l \setminus} - G I_p \varphi''_{r/l \setminus} = 0 \quad (32-3)$$

صرف نظر از میرایی، به منظور تعیین مقادیر  $\theta_*$ ,  $\phi_*$  و  $\tilde{\theta}_*$ ,  $\tilde{\phi}_*$  دینامیک خطا ۱۴ و ۱۵ و سیستم مدار بسته ی ۲۳ را بازنویسی می کنیم. چهار مقدار ثابت از این روابط به دست می آید که با پارامترهای  $\tau_{x^*}$ ,  $\tau_{z^*}$  و  $\tilde{\tau}_{x^*}$ ,  $\tilde{\tau}_{z^*}$  نمایش داده می شود.

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_{z^*} \square k_{b o p}(\theta_* - \hat{\theta}_*) & = \\
& - E I h (\tilde{w}'_{l \setminus}|_0 + \tilde{w}'''_{l \setminus}|_0) + k_b (\tilde{w}'_{l \setminus}|_0 + \tilde{w}'_{r \setminus}|_0) \quad (33-1)
\end{aligned}$$

$$\tilde{\tau}_{x^*} \square k_{t o p}(\phi_* - \hat{\phi}_*) = G I_p (\tilde{\varphi}'_{l \setminus}|_0 + \tilde{\varphi}'_{r \setminus}|_0) \quad (33-2)$$

$$\begin{aligned}
\tau_{z^*} \square k_{b p}(\theta_* - \theta_d) & = -E I h (w'''_{l \setminus}|_0 + w'''_{r \setminus}|_0) \\
& + k_b (w'_{l \setminus}|_0 + w'_{r \setminus}|_0) - k_{b c} (\hat{w}'_{l \setminus}|_0 + \hat{w}'_{r \setminus}|_0) \quad (34-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{x^*} \square k_{t p}(\phi_* - \phi_d) & = G I_p (\varphi'_{l \setminus}|_0 + \varphi'_{r \setminus}|_0) \\
& - k_{t c} (\hat{\varphi}'_{l \setminus}|_0 + \hat{\varphi}'_{l \setminus}|_0) \quad (34-2)
\end{aligned}$$

به منظور حل معادلات فوق با کمک جداسازی متغیرها داریم:

$$\begin{aligned}
w & = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{b i}(x) \eta_{b i}(t) \\
\eta_{b i}(t) & = a_{b^*, i} \exp(\lambda_{b i} t), \quad \lambda_{b i} = \sigma_{b i} + j \omega_{b i} \quad (35-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{w} & = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{b i}(x) \hat{\eta}_{b i}(t) \\
\hat{\eta}_{b i}(t) & = \hat{a}_{b^*, i} \exp(\hat{\lambda}_{b i} t), \quad \hat{\lambda}_{b i} = \hat{\sigma}_{b i} + j \hat{\omega}_{b i} \quad (35-2)
\end{aligned}$$

$$\tilde{w} = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{b i}(x) \tilde{\eta}_{b i}(t), \quad \tilde{\eta}_{b i}(t) = \eta_{b i}(t) - \hat{\eta}_{b i}(t) \quad (35-3)$$

$$\begin{aligned}
\varphi & = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{t i}(x) \eta_{t i}(t) \\
\eta_{t i}(t) & = a_{t^*, i} \exp(\lambda_{t i} t), \quad \lambda_{t i} = \sigma_{t i} + j \omega_{t i} \quad (36-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi} & = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{t i}(x) \hat{\eta}_{t i}(t) \\
\hat{\eta}_{t i}(t) & = \hat{a}_{t^*, i} \exp(\hat{\lambda}_{t i} t), \quad \hat{\lambda}_{t i} = \hat{\sigma}_{t i} + j \hat{\omega}_{t i} \quad (36-2)
\end{aligned}$$

$$\tilde{\varphi} = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{t i}(x) \tilde{\eta}_{t i}(t), \quad \tilde{\eta}_{t i}(t) = \eta_{t i}(t) - \hat{\eta}_{t i}(t) \quad (3-36)$$

با استفاده از روابط ۳۵ و ۳۶ می توان روابط ۳۳ و ۳۴ را بسط داد تا بدون در نظر گرفتن میرایی، روابط زیر حاصل شود.

$$\tilde{\tau}_{z^*} = \sum_{i=1}^{\infty} [-E I h \chi'''_{b l \setminus i}|_0 + k_b \chi'_{b l \setminus i}|_0] \tilde{\eta}_{b l \setminus i}(t)$$

جنبشی و پتانسیل عبارتند از:

$$[m_b] = \frac{\rho A l_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ & 4l_e^2 & 13l_e & -3l_e^2 \\ & & 156 & -22l_e \\ Sym. & & & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$

$$[k_b] = \frac{EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ & & 12 & -6l_e \\ Sym. & & & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$

$$[m_t] = \frac{\rho I_p l_e}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}, [k_t] = \frac{GI_p}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (42)$$

پارامترهای شبیه‌سازی طبق جدول ۱ در نظر گرفته شده‌اند. قانون کنترلی مبنی بر مشاهده‌گر که در این فصل معرفی شد اعمال شده است. در شبیه‌سازی اول همه متغیرهای حالت به جز موارد ذیل از شرایط اولیه صفر و با زاویه مطلوب ۲۵ درجه برای رول و پیچ هاب لحاظ و یک شرایط اولیه فرضی برای مشاهده‌گر در نظر گرفته شده است.

می‌دانیم مشاهده‌گر بایستی از کنترل‌کننده سریع‌تر باشد لذا بهره‌های مربوطه ده برابر بزرگ‌تر انتخاب شده است. شرایط اولیه و ضرایب مشاهده‌گر و کنترل‌کننده عبارت‌اند از:

$$k_{bp} = 1/5, k_{bd} = 20, k_{bc} = 20, k_{tp} = 3, k_{td} = 10, k_{tc} = 5$$

$$k_{bop} = 15, k_{bod} = 200, k_{top} = 30, k_{tod} = 100$$

$$t = 0:$$

$$\begin{cases} w'_{r2}|_0 = w'_{l2}|_0 = -10, w'_{r1}|_0 = w'_{l1}|_0 = 15, \theta = 0 \text{ deg} \\ \hat{w}'_{r2}|_0 = \hat{w}'_{l2}|_0 = 5, \hat{w}'_{r1}|_0 = \hat{w}'_{l1}|_0 = -5, \hat{\theta} = -10 \text{ deg} \\ \varphi_{r2}|_l = \varphi_{l2}|_l = 5, \varphi_{r1}|_l = \varphi_{l1}|_l = 10, \phi = -5 \text{ deg} \\ \hat{\varphi}_{r2}|_l = \hat{\varphi}_{l2}|_l = -5, \hat{\varphi}_{r1}|_l = \hat{\varphi}_{l1}|_l = 5, \hat{\phi} = 5 \text{ deg} \end{cases}$$

مقدار ناچیزی برای ضرایب میرایی (۲،۵) فرض شده است که نسبت میرایی معادل آن  $\zeta = 0.06$  است تا کیفیت پایداری کنترل‌کننده مستقل‌تر بررسی شود. با توجه به حجم بالای محاسبات، این میزان ناچیز میرایی از تأثیر مخرب خطاهای محاسباتی جلوگیری می‌کند.

نکته ۱: یک موضوع قابل بررسی تعیین تعداد مناسب المان‌ها برای مدل‌سازی هر تیر است. شبیه‌سازی با تغییر تعداد المان‌ها از یک تا بیش از ۵ عدد نشان داد با ۵ المان همگرایی مناسبی حاصل می‌شود و تعداد بیشتر از آن تنها فرکانس‌های بالاتر از ۱۰۰ هرتز را اضافه و یا مقادیرشان را تغییر می‌دهد. در واقع دو فرکانس طبیعی اول تقریباً بدون تغییر هستند و تا فرکانس پنجم تغییر جزئی می‌یابد. می‌دانیم رفتار غالب توسط فرکانس‌های پایین‌تر شکل می‌گیرد و عملاً تعداد بیش از ۵ المان

جدول ۱. پارامترهای شبیه‌سازی.

پارامتر	$I_p$	$I$	$G$	$E$	$A$	$\rho$	$h$	$c$	$c_b, c_s$	$k_b, k_s$	$j_z, j_w$	$l$	تعداد المان‌ها
	( $m^4$ )	( $m^4$ )	( $Pa$ )	( $Pa$ )	( $m^2$ )	( $kg/m^3$ )	( $m$ )	( $Ns$ )	( $Nms$ )	( $Nm$ )	( $kgm^2$ )	( $m$ )	در هر تیر
مقدار	۲e-۵	۶e-۷	۲e-۱۰	۵e-۱۰	۰/۰۱	۲e۳	۰/۳	۰/۲	۰/۲	۲۰۰	۴	۰/۸	۵

لم: ۱ طبق معادله ۲۱ داریم:

$$\dot{V}_0 = 0 \Rightarrow \dot{w}'_{r2}|_0 - \dot{w}'_{r1}|_l = \dot{w}'_{l2}|_0 - \dot{w}'_{l1}|_l =$$

$$\dot{w}'_{r1}|_0 = \dot{w}'_{l1}|_0 = \dot{\varphi}_{r2}|_l = \dot{\varphi}_{l2}|_l = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{w}'_{r2}|_0 - \tilde{w}'_{r1}|_l, \tilde{w}'_{l2}|_0 - \tilde{w}'_{l1}|_l, \tilde{w}'_{r1}|_0,$$

$$\tilde{w}'_{l1}|_0, \tilde{\varphi}_{r2}|_l, \tilde{\varphi}_{l2}|_l = cte \quad (40)$$

اما می‌دانیم  $\tilde{w}_{r/l1}$  پارامتری است که در معادله ارتعاش تیر ۳۱-۲، با شرایط مرزی لولا و فنر در دو سر تیر صدق می‌کند. بنابراین اگر شیب آن در مکان صفر ثابت بماند، بدین معناست که تیر ارتعاش ندارد. یعنی  $\tilde{w}_{r/l1}(x, t) = 0$ . در خصوص  $\tilde{w}_{r/l2}(x, t) = 0$  می‌توان از رابطه ۴۱ نتیجه مشابه گرفت. همچنین ثابت ماندن  $\tilde{\varphi}_{r/l2}$  در معادله ۳۲-۲ با شرایط مرزی یک سر آزاد یک سر دیگر صدق می‌کند، به معنای عدم ارتعاش پیچشی تیر است  $\tilde{\varphi}_{r/l2}(x, t) = 0$ . با توجه به شرایط مرزی یعنی قفل بودن تیرها به لحاظ پیچش در محل تماس با یکدیگر داریم  $\tilde{\varphi}_{r/l2}(x, t) = 0$ .

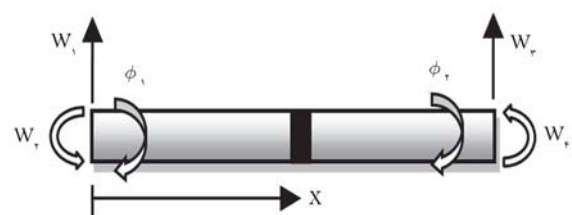
$$\tilde{w}'_{r2}|_0 - \tilde{w}'_{r1}|_l = cte, \tilde{w}'_{r1}|_l = 0 \Rightarrow \tilde{w}'_{r2}|_0 = 0 \quad (41)$$

مشابه بحث فوق روی دینامیک خطا، در خصوص متغیرهای ارتعاشی در معادلات دینامیک ماهواره نیز با در نظر گرفتن روابط ۲۹، ۳۱-۱، ۳۲-۱ و شرایط مرزی، استنتاج می‌شود.

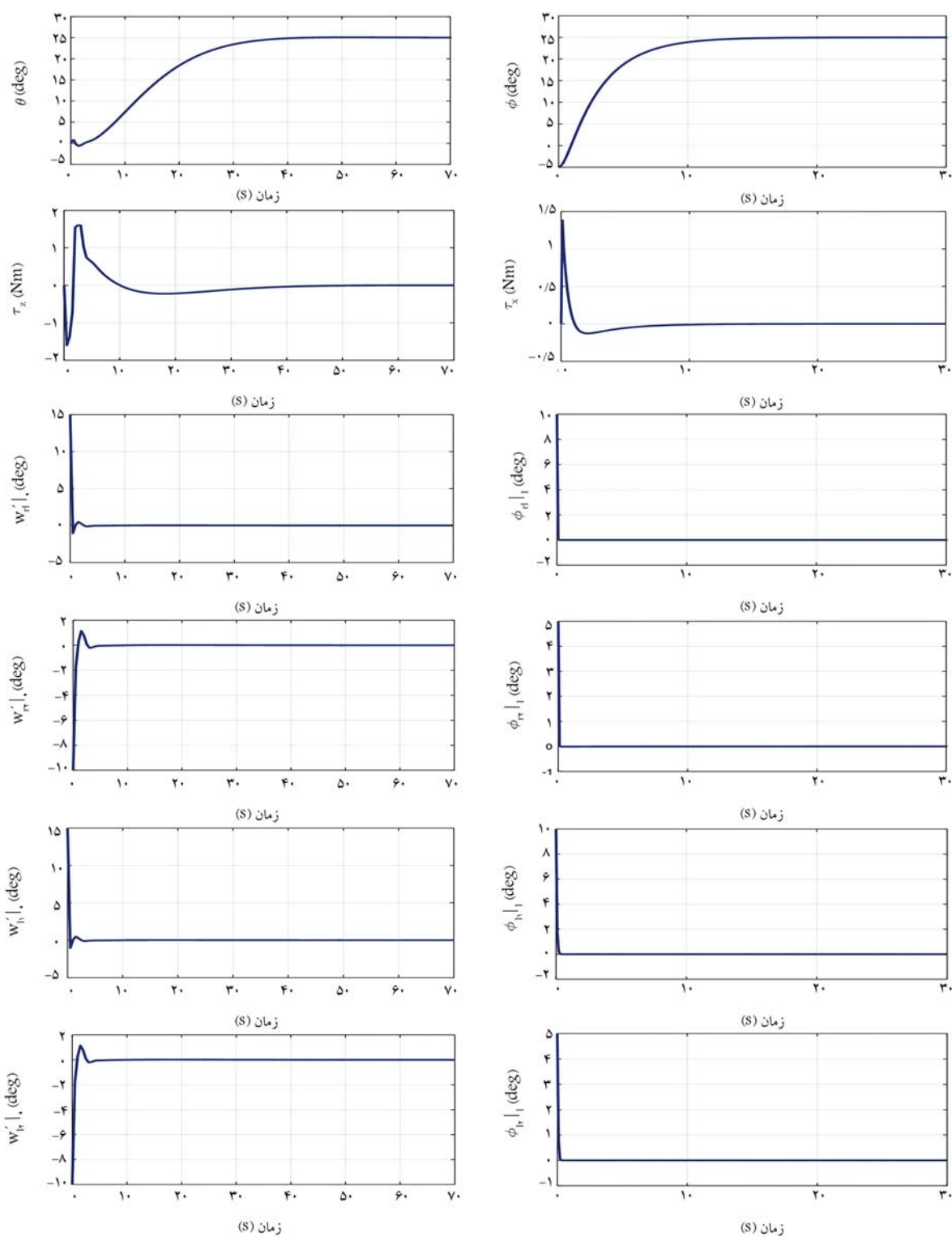
## ۶. شبیه‌سازی و بحث روی نتایج

روش المان محدود جهت مدل‌سازی ماهواره مطابق شکل ۱ اتخاذ شده است. بخش‌های صفحات خورشیدی به وسیله المان‌های تیر اولر - برنولی مدل شده است. به علاوه دو مختصات تعمیم‌یافته پیچشی به هر المان افزوده شده است. به منظور محاسبه ماتریس‌های سختی و اینرسی در تغییر شکل خمشی توابع شکل مود چندجمله‌ای مرتبه ۳ و در تغییر شکل پیچشی تابع شکل مود خطی استفاده شده است.<sup>[۲۶]</sup> شکل ۲ المان مورد نظر را به همراه مختصات تعمیم‌یافته‌اش ( $\phi_2$ ،  $\phi_1$ ،  $w_1$ ،  $w_2$ ،  $w_3$ ،  $w_4$ ) نشان می‌دهد.

ماتریس‌های معادل اینرسی و سختی مربوطه برای هر المان از روابط انرژی



شکل ۲. یک المان تیر اولر - برنولی به اضافه پیچش.



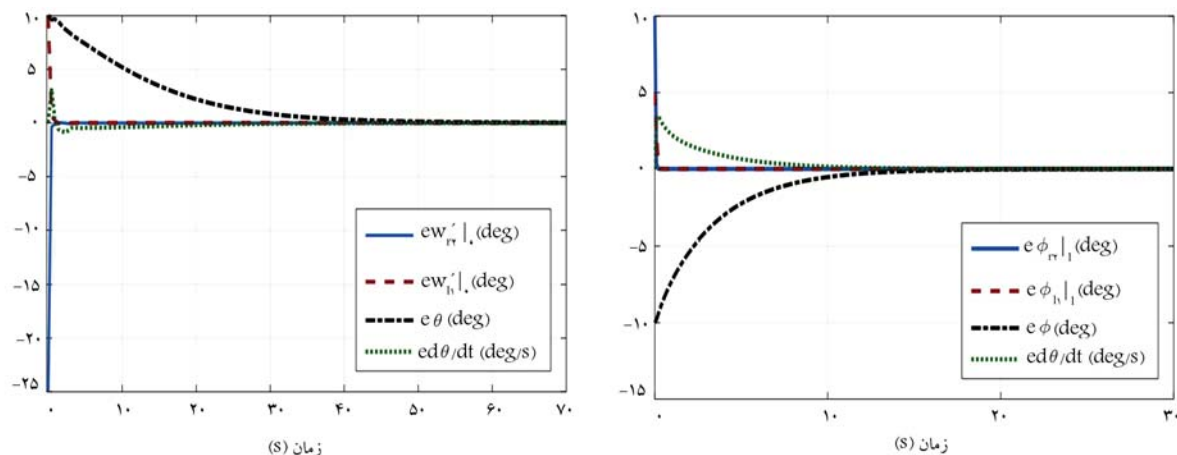
شکل ۳. نتایج شبیه‌سازی روی سیستم مدار بسته مبنی بر مشاهده‌گر.

قسمت‌های صفحات خورشیدی در لبه‌های نزدیک به هاب در دو سمت آن و پیچش - پیچ شامل زاویه‌ی پیچ هاب و تغییر شکل پیچشی قسمت‌های صفحات خورشیدی در لبه‌های دور از هاب در دو سمت آن رسم شده‌اند. نتایج حاکی از عملکرد خوب روش کنترل ارائه شده است. فزاینده‌ی ناچیز همزمان با زمان نشست مناسب و عدم وجود خطای ماندگار مشخصات خوب برای رفتار گذرای پاسخ هستند. همچنین طبق

علی‌رغم افزایش بسیار زیاد هزینه و زمان محاسبات، افزایش دقت محسوس‌ی به دست نمی‌دهد.

به علاوه خطاهای همگرایی مشاهده‌گر برای تعدادی از متغیرهای حالت وضعیت و ارتعاشات طی این شبیه‌سازی در شکل ۴ نشان داده شده است.

در شکل ۳ نمودارهای پاسخ خمشی - رول شامل زاویه رول هاب و شیب‌های



شکل ۴. خطاهای تخمین مشاهده‌گر.

به همراه کنترل‌کننده مرزی به منظور کنترل همزمان دینامیک وضعیت و ارتعاشات صفحات خورشیدی برای یک فرم کلی از ماهواره‌های منعطف، تنها با استفاده از عملگرهای گشتاور داخل هاب، طراحی شد. همچنین تغییر شکل پیچشی علاوه بر خمش در نظر گرفته شد.

این واقعیت که صفحات خورشیدی بازشونده عموماً از قسمت‌هایی تشکیل یافته‌اند در معادلات دینامیک منظور شد. حاصل آن است که کنترل مرزی بدون نیاز به اندازه‌گیری فراتر از وضعیت و سرعت زاویه‌ای ماهواره محقق شده است. پایداری مجانبی برای مشاهده‌گر و همچنین کل سیستم مدار بسته مبنی بر مشاهده‌گر به اثبات رسید و عملکرد آن طی شبیه‌سازی‌ها به روش اجزای محدود نشان داده شد.

شکل ۴ تخمین پارامترها توسط مشاهده‌گر معادلات جزئی نیز با کیفیت مطلوبی صورت پذیرفته است.

## ۷. نتیجه‌گیری

اخیراً کاربردهای کنترل معادلات جزئی توجه بیشتری معطوف خود ساخته است اما روش‌های ارائه شده در مقالات به حسگرهای اضافی روی سطح جسم گسترده و یا روی مرزهای آن نیاز دارد که بسیاری از آنها عملیاتی نیست. مشاهده‌گر می‌تواند در این زمینه کمک کند. لذا در این پژوهش برای نخستین بار یک مشاهده‌گر معادلات جزئی

## پانویس‌ها

1. ODE-PDE
2. linear quadratic regulator (LQR)
3. spill-over instability
4. early lumping
5. late lumping
6. finite difference
7. eigen function expansion
8. orthogonal decomposition
9. cascade systems
10. warping
11. Euler-Bernoulli
12. uncoupled

## منابع (References)

1. Chen, X., Ren, Y., Cai, Y. and et al. "Integrated control of attitude maneuver and vibration suppression of flexible spacecraft based on magnetically suspended control moment gyros", *Proc IMechE C: J Mechanical Engi-*

*neering Science*, DOI: 10.1177/0954406220942801, Epub ahead of print 22 July (2020).

2. Gasbarri, P., Monti, R. and et al. "Effects of uncertainties and flexible dynamic contributions on the control of a spacecraft full-coupled model", *Acta Astronaut*, **94**, pp. 515-526 (2014).
3. Hu, Y., Wu, B., Geng, Y. and et al. "Smooth time-optimal attitude control of spacecraft", *Proc IMechE G: J Aerospace Eng*, **233**, pp.2331-2343 (2019).
4. Cao, X., Yue, C. and Liu, M. "Flexible satellite attitude maneuver via constrained torque distribution and active vibration suppression", *Aerosp Sci Technol*, **67**, pp. 387-397 (2017).
5. Fakoor, M., Nikpay, S. and Kalhor, A. "On the ability of sliding mode and LQR controllers optimized with PSO in attitude control of a flexible 4-DOF satellite with time-varying payload", *Adv Space Res*, **67**, pp. 334-349 (2021).
6. Gasbarri, P., Sabatini, M. and Pisculli A. "Dynamic modeling and stability parametric analysis of a flexible spacecraft with fuel slosh", *Acta Astronaut*, **127**, pp. 141-159 (2016).

7. Ji, N. and Liu, J. "Vibration control for a flexible satellite with adaptive actuator fault-tolerant and input quantization", *Trans. Inst. Measurement Control*, **42**, pp. 451-460 (2020).
8. Tao, J., Zhang, T. and Nie, Y. "Attitude maneuvering and vibration reducing control of flexible spacecraft subject to actuator saturation and misalignment", *Shock Vib*, 3129834, DOI: 10.1155/2018/3129834 (2018).
9. TayyebTaher, M. and Esmailzadeh, M. "Model predictive control of attitude maneuver of a geostationary flexible satellite based on genetic algorithm", *Adv Space Res*, **60**, pp. 57-64 (2017).
10. Wang, E., Wu, S., Liu, Y. and et al. "Distributed vibration control of a large solar power satellite", *Astrodyn*, **3**, pp. 189-203 (2019).
11. Zhang, L., Xu, S. et al. "Active vibration suppression for flexible satellites using a novel component synthesis method", *Adv Space Res*, **67**, pp. 1968-1980 (2021).
12. Karagiannis, D. and Radisavljevic-Gajic, V. "Exponential stability for a class of boundary conditions on an euler-bernoulli beam subject to disturbances via boundary control", *Journal of Sound and Vibration*, **446**, pp. 387-411 (2019).
13. Cao, F. and Liu, J. "Boundary vibration control for a two-link rigid-flexible manipulator with quantized input", *Journal of Vibration and Control*, **25**(23-24), pp. 2935-2945 (2019).
14. Entessari, F., Najafi, A. and Alasty, A. "Exponential stabilization of flexural sway vibration of gantry crane via boundary control method", *Journal of Vibration and Control*, **26**(1-2), pp. 36-55 (2020).
15. He, W. and Ge, SS. "Dynamic modeling and vibration control of a flexible satellite", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **51**(2), pp. 1422-1431 (2015).
16. Ji, N. and Liu, J. "Vibration control for a flexible satellite with input constraint based on Nussbaum function via backstepping method", *Aerospace Science and Technology*, **77**, pp. 563-572 (2018).
17. Meng, T., He, W., Yang, H. and et al. "Vibration control for a flexible satellite system with output constraints", *Nonlinear Dynamics*, **85**, pp. 2673-2686 (2016).
18. Rad, HK., Salarieh, H., Alasty, A. and et al. "Boundary control of flexible satellite vibration in planar motion", *Journal of Sound and Vibration*, **432**, pp. 549-568 (2018).
19. Rad, HK., Salarieh, H., Alasty, A. and et al. "Boundary control of anti-symmetric vibration of satellite with flexible appendages in planar motion with exponential stability", *Acta Astronautica*, **147**, pp. 219-230 (2018).
20. Hidayat, Z. and et al. "Observers for linear distributed-parameter systems: A survey", *2011 IEEE International Symposium on Robotic and Sensors Environments (ROSE)*, Montreal, Canada, 17-18 September, NJ: IEEE, pp. 166-171 (2011).
21. Cao, X., Yue, C. and Liu, M. "Flexible satellite attitude maneuver via constrained torque distribution and active vibration suppression", *Aerospace Science and Technology*, **67**, pp. 387-397 (2017).
22. Duraffourg, E., Burlion, L. and Ahmed-Ali, T. "Finite-time observer-based back stepping control of a flexible launch vehicle", *Journal of Vibration and Control*, **24**(8), pp. 1535-1550 (2016).
23. Smyshlyaev, A. and Krstic, M. "Backstepping observers for a class of parabolic PDEs", *Systems & Control Letters*, **54**(7), pp. 613-625 (2005).
24. Jiang, T., Liu, J. and He, W. "A robust observer design for a flexible manipulator based on a PDE model", *Journal of Vibration and Control*, **23**(6), pp. 871-882 (2017).
25. Dogan, M. and Morgul, O. "Boundary control of a rotating shear beam with observer feedback", *Journal of Vibration and Control*, **18**(14), pp. 2257-2265 (2012).
26. Liang, X., Wang, Q., Hu, C. and et al. "Observer-based H8 fault-tolerant attitude control for satellite with actuator and sensor faults", *Aerospace Science and Technology*, DOI: 10.1016/j.ast.2019.105424, Epub ahead of print September (2019).
27. Zhu, Q., Ma, G., Wang, X. and et al. "Attitude control without angular velocity measurement for flexible satellites", *Chinese Journal of Aeronautics*, **31**(6), pp. 1345-1351 (2018).
28. Fan, L., Huang, H., Sun, L. and et al. "Robust attitude control for a rigid-flexible-rigid microsatellite with multiple uncertainties and input saturations", *Aerospace Science and Technology*, DOI: 10.1016/j.ast.2019.105443, Epub ahead of print 27 September (2019).
29. Zhang, L. and Liu, J. "Nonlinear PDE observer design for a flexible two-link manipulator", *2012 American Control Conference (ACC)*, Montreal, Canada, NJ: IEEE, pp. 5336-5341 (2012).
30. Yang, H., Liu, J. and Lan, X. "Observer design for a flexible-link manipulator with PDE model", *Journal of Sound and Vibration*, **341**, pp. 237-245 (2015).
31. Jin, F. and Guo, B. "Boundary output tracking for an euler-bernoulli beam equation with unmatched perturbations from a known exosystem", *Automatica*. Epub ahead of print 30 July 2019. DOI: 10.1016/j.automatica.2019.108507 (2019).
32. Hasan, A. "Boundary observer design for hyperbolic PDE-ODE cascade systems", *Automatica*, **68**, pp. 75-86 (2016).
33. Liu, Y., Fu, Y., He, W. and et al. "Modeling and observer-based vibration control of a flexible spacecraft with external disturbances", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **66**(11), pp. 8648-8658 (2018).
34. Rao, SS. *Vibration of Continuous Systems*, John Wiley & Sons, Hoboken, new Jersey, United States of America (2007).
35. Khalil, HK. *Nonlinear Systems*. Upper Saddle River NJ: Prentice Hall (2002).
36. Kashani, MT., Jayasinghe, S. and Hashemi, SM. "On the flexural-torsional vibration and stability of beams subjected to axial load and end moment", *Shock Vib*, 153532. DOI: 10.1155/2014/153532 (2014).

# پیش‌بینی روند زوال و عمر مفید باقیمانده‌ی یاتاقان غلتشی با کمک شبکه‌ی عصبی بازگشتی حافظه‌ی طولانی کوتاه‌مدت

مهدی بهزاد\* (استاد)

سیدعلی حسین لی (کارشناس ارشد)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

حسام‌الدین ارغند (استادیار)

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده‌ی مهندسی، دانشگاه زنجان

افشین بنازاده (دانشیار)

دانشکده‌ی مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف

مهندسی مکانیک شریف، بهار ۱۴۰۱  
دوری ۳-۲، شماره ۱، ص. ۶۳-۷۱، (پژوهشی)

در این مقاله، پیشینه‌ی دامنه‌ی سیگنال زمانی شتاب به عنوان مشخصه‌ی ارتعاشی مناسب که نمایش‌گر خوبی از روند زوال یاتاقان غلتشی است انتخاب شده و به منظور پیش‌بینی روند زوال و عمر مفید باقیمانده به کار رفته است. در گام نخست با به کار بردن یک انتقال لگاریتمی، این مشخصه‌ی ارتعاشی به یک سری زمانی پایدار تبدیل شده است. سپس با کمک شبکه‌ی عصبی بازگشتی حافظه‌ی طولانی کوتاه‌مدت، نحوه‌ی رشد این مشخصه‌ی ارتعاشی پیش‌بینی شده است. این پیش‌بینی روی داده‌های دو نمونه از یاتاقان‌های آزمایش پرونوستیا که در ادبیات فن شناخته شده بوده و مورد استفاده محققین بسیاری قرار گرفته، اعمال شده است. با توجه به نتایج پیش‌بینی مدل، مدت زمان باقیمانده تا رسیدن این مشخصه‌ی ارتعاشی به یک آستانه‌ی معین ارائه شده است. همچنین اگر آستانه‌ی تعیین شده به معنی پایان عمر مفید یاتاقان باشد، می‌توان از الگوریتم پیشنهاد شده به منظور تخمین عمر مفید باقیمانده نیز بهره جست. نحوه‌ی عملکرد الگوریتم در راستای این هدف نیز ارائه و ارزیابی شده است. نتایج حاکی از مطابقت خوب پیش‌بینی مدل با داده‌های تجربی است.

واژگان کلیدی: شبکه‌ی عصبی بازگشتی، شبکه‌ی عصبی حافظه‌ی طولانی

کوتاه‌مدت، پیش‌بینی عمر یاتاقان غلتشی، پیش‌بینی ادامه‌ی سری زمانی، تست عمر پرشتاب یاتاقان.

m\_behzad@Sharif.ir  
seyedalhosseinli@mech.sharif.edu  
arghand@znu.ac.ir  
banazadeh@sharif.edu

## ۱. مقدمه

پیش‌بینی‌ها معمولاً به دو روش عمده صورت می‌پذیرد: روش مبتنی بر مدل و روش داده‌محور.<sup>[۱]</sup>

در روش‌های مبتنی بر مدل، یک مدل ریاضی برای توصیف نحوه‌ی رشد عیوب یا فرایند زوال یاتاقان ارائه می‌شود. توانمندی این مدل‌ها در نحوه‌ی توصیف پدیده‌ی زوال است؛ معمولاً این مدل‌های ریاضی نمی‌توانند عملکرد دقیقی را ارائه کنند. چرا که بسیاری از پارامترهای مؤثر در زوال یاتاقان مانند حضور آلودگی، مونتاژ ناصحیح، نقایص هندسی و دیگر عوامل، معمولاً ناشناس هستند و مدل‌سازی آنها در عمل با چالش‌های جدی مواجه خواهد بود.<sup>[۲]</sup> در روش‌های آماری (که به عنوان زیرمجموعه‌ی روش‌های داده‌محور در نظر گرفته می‌شود) نیز با ارائه‌ی یک مدل سعی می‌شود الگوهای زوال یاتاقان شناخته شود و پارامترهای آن که هر کدام دارای یک توزیع احتمال هستند از طریق مشاهدات و اندازه‌گیری‌ها به‌روزرسانی شوند. این رویکرد در زمینه‌ی پیش‌بینی عمر یاتاقان‌ها بسیار مورد توجه است و می‌تواند عدم

از عیب‌یابی و پیش‌بینی عمر مفید باقیمانده می‌توان به عنوان یکی از کلیدی‌ترین مباحث فنی در نگهداری و تعمیرات (نت) مبتنی بر وضعیت اشاره کرد. در عیب‌یابی سعی می‌شود تا نوع و شدت عیب و حتی علت وقوع عیب شناسایی شود، در صورتی که در پیش‌بینی عمر سعی می‌شود مدت زمانی که به صورت ایمن می‌توان از یک قطعه یا ماشین (معمولاً در وضعیت معیوب) بهره‌برداری کرد تخمین زده شود.<sup>[۱]</sup> از آنجا که یاتاقان‌های غلتشی جزو اجزای پرکاربرد و همچنین پایش‌پذیر در تجهیزات دوار هستند و ضمناً بخش عمده‌ی آمار از کار افتادگی تجهیزات دوار مربوط به خرابی یاتاقان‌های غلتشی است، عیب‌یابی و تخمین عمر مفید باقیمانده‌ی این اجزا مورد توجه بسیاری از محققین بوده است.<sup>[۲]</sup> این

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۴۰۰/۰۶/۲۰، اصلاحیه ۱۴۰۰/۱۰/۰۴، پذیرش ۱۴۰۰/۱۰/۱۴.

DOI:10.24200/J40.2022.58619.1610



قطعیت‌های مسئله‌ی پیش‌بینی عمر را نیز مدل‌سازی کند.<sup>[۴]</sup> علاوه بر این، با استفاده از روش‌های هوش مصنوعی از جمله شبکه‌ی عصبی (دسته‌ی دیگری از روش‌های داده‌محور)، با به کار بردن داده‌هایی که از گذشته‌ی یک باتاقان در دسترس است می‌توان الگوهای زوال را مدل‌سازی کرد و در این صورت نیازی به داشتن مدل‌های ریاضی نخواهد بود. این شبکه‌ها در ابتدا به آموزش توسط یک یا چند سری داده از ماشین‌های مشابه یا تاریخچه‌ی قبلی همان ماشین نیازمندند؛ پس از آموزش شبکه، از آن برای پیاده‌سازی روی باتاقان‌های مشابه استفاده می‌شود تا عمر باقیمانده‌شان پیش‌بینی شود.<sup>[۵]</sup>

در بین شبکه‌های عصبی رایج، شبکه‌ی عصبی پیشخور<sup>۱</sup> توسط بسیاری از محققان برای پیش‌بینی عمر مفید باقیمانده باتاقان‌های غلشتی به کار گرفته شده است.<sup>[۴]</sup> به منظور استفاده از این ابزار در ابتدا نیاز است تا یک سری مشخصه‌ی مناسب از سیگنال‌های تاریخچه‌ی ارتعاشی باتاقان‌ها استخراج شود. سپس یک عملیات نگاشت توسط شبکه‌ی عصبی از فضای مشخصه‌های ارتعاشی به فضای عمر مفید باقی مانده صورت می‌گیرد. نحوه‌ی معماری شبکه‌ی عصبی و تهیه‌ی مشخصه‌های ارتعاشی مناسب می‌تواند فضایی باز به منظور ارائه‌ی ایده‌های مختلف باشد. کدیرو همکاران<sup>[۶]</sup> با استفاده از مشخصه‌ی مقدار مؤثر<sup>۲</sup> و چولگی<sup>۳</sup> سیگنال‌های تاریخچه‌ی ارتعاشات به‌عنوان ورودی‌های شبکه‌ی عصبی پیشخور، روش داده‌محور پیش‌بینی عمر مفید باقی مانده‌ی باتاقان را روی یک سری داده‌ی آزمایشگاهی پیاده‌سازی کردند.

بهراد و همکاران<sup>[۵]</sup> به منظور تهیه‌ی مشخصه‌های ارتعاشی مناسب، مقدار مؤثر سیگنال ارتعاشی را در بازه‌های فرکانسی بالا و پایین تفکیک کرده و به‌عنوان ورودی شبکه‌ی عصبی پیش‌خور در نظر گرفتند؛ آنها نشان دادند که این کار موجب بهبود دقت نسبت به مدل‌های پیشین شده است.

ژیاچوان و همکاران<sup>[۷]</sup> نیز با ترکیب یک مسئله‌ی رگرسیون و شبکه‌ی عصبی، عمر مفید باقیمانده‌ی باتاقان‌ها را با دقت خوبی پیش‌بینی کردند. آن‌ها ابتدا مشخصه‌های ارتعاشی چولگی و مقدار مؤثر سیگنال را با یک رابطه‌ی ریاضی برازش کرده و سپس با استفاده از آن‌ها - به‌عنوان ورودی شبکه‌ی عصبی پیشخور - عمر باتاقان‌ها را تخمین زدند. پنگ و همکاران<sup>[۸]</sup> با انتقاد از ایرادهای شبکه‌های عصبی سنتی که با روش‌های رایج صرفاً به استخراج یک مشخصه می‌پردازند، با ترکیب یک شبکه‌ی عصبی عمیق پیچشی<sup>۴</sup> و یک شبکه‌ی عصبی حافظه‌ی طولانی کوتاه‌مدت<sup>۵</sup> به دقت بهتری در پیش‌بینی عمر باقی مانده دست یافتند.

ژای و همکاران<sup>[۹]</sup> به منظور استفاده از شبکه‌ی عصبی حافظه‌ی طولانی کوتاه‌مدت، مشخصه‌های زیادی را از سیگنال‌های ارتعاشی استخراج کردند و بهترین آن‌ها را که همبستگی بیشتری با زوال باتاقان داشت، به‌عنوان ورودی به شبکه دادند و در نهایت نسبت به دو مدل تخمین‌گر بردار پشتیبان<sup>۶</sup> و تقویت‌گرایان آرام<sup>۷</sup> به دقت بهتری دست یافتند.

مائو و همکاران<sup>[۱۰]</sup> با کمک شبکه‌ی عصبی پیچشی مشخصه‌های عمیق را از سیگنال ارتعاشی خام استخراج کرده و به‌عنوان ورودی شبکه‌ی عصبی حافظه‌ی طولانی کوتاه‌مدت استفاده کردند. در این مقاله، پیش‌بینی عمر فقط در مرحله‌ی نهایی زوال باتاقان که به زوال سریع<sup>۸</sup> مشهور است، پیاده‌سازی شده است.

در سال‌های اخیر، با توجه به عملکرد خوب شبکه‌ی عصبی حافظه‌ی طولانی کوتاه‌مدت در امر پیش‌بینی داده‌ها و سری‌های زمانی، محققین حوزه‌های مختلف از این شبکه در زمینه‌های مختلفی استفاده می‌کنند که برخی از آن‌ها عبارت‌اند از: پیش‌بینی روند بیماری‌هایی مانند آنفلوآنزا،<sup>[۱۱]</sup> پیش‌بینی روند قیمت در بازارهای مالی<sup>[۱۲]</sup> و پیش‌بینی روند تولید چاه‌های نفت.<sup>[۱۳]</sup>

در اکثر مقاله‌های محققین در زمینه‌ی پیش‌بینی عمر مفید باقیمانده‌ی باتاقان، از فضای مشخصه‌های مناسب ارتعاشی به فضای عمر باقیمانده یک نگاشت صورت گرفته است. اما در کنار مطالعاتی که برای پیش‌بینی عمر مفید باتاقان‌های غلشتی انجام شده است، برخی از محققین نیز به پیش‌بینی روند رشد مشخصه‌ی ارتعاشی (به‌عنوان معیاری برای زوال) پرداخته‌اند. در این حالت دیگر نگاشتی توسط شبکه‌ی عصبی صورت نمی‌گیرد، بلکه در ادامه‌ی روند یک مشخصه‌ی ارتعاشی پیش‌بینی می‌شود و با این پیش‌بینی، مدت زمان باقیمانده تا رسیدن به آستانه‌ی از پیش تعیین شده محاسبه می‌شود. این آستانه می‌تواند معیاری برای پایان عمر نیز باشد که در این صورت عمر مفید باقیمانده پیش‌بینی خواهد شد.

روبن و امبا به کمک نوعی از فیلتر کالمن<sup>۹</sup> مدلی را برای دستیابی به هدف یاد شده پیاده‌سازی کردند.<sup>[۱۴]</sup> اما استفاده از شبکه‌ی عصبی بازگشتی در این زمینه محدود بوده است.

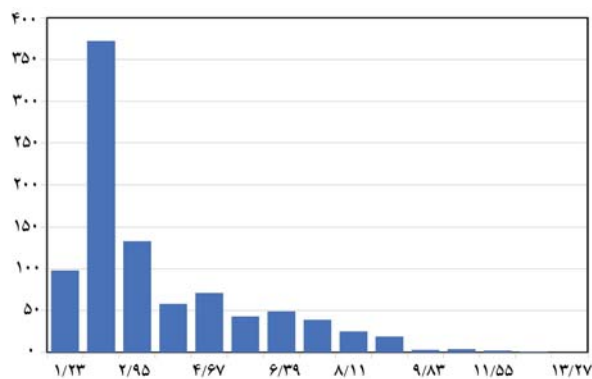
در این مقاله از شبکه‌ی عصبی بازگشتی حافظه‌ی طولانی کوتاه‌مدت که یکی از توان‌مندترین شبکه‌ها در مدل‌سازی رفتارهای غیرخطی است، استفاده می‌شود تا الگوهای پیچیده‌ی که در فرایند زوال باتاقان وجود دارد تا حد ممکن شبیه‌سازی شود. این شبکه جزو شبکه‌های عصبی عمیق<sup>۱۰</sup> دسته‌بندی می‌شود و نقطه‌ی قوت آن، برخورداری از یک قوه‌ی حافظه است که در یادگیری پدیده‌های دینامیکی می‌تواند توانمندی بیشتری از خود نشان دهد؛ در واقع از داده‌های گذشته برای تحلیل داده‌های فعلی نیز کمک می‌گیرد که این امری مهم در پیش‌بینی عمر باتاقان‌هاست.<sup>[۱۵]</sup> همچنین بر اساس کارهای محققین پیشین<sup>[۱۶،۱۷]</sup> مشخصه‌ی دامنه‌ی بیشینه‌ی سیگنال شتاب ارتعاشات به‌عنوان مشخصه‌ی ارتعاشی مناسب توصیف‌کننده‌ی زوال باتاقان انتخاب می‌شود و این مشخصه‌ی ارتعاشی به یک سری زمانی پایدار<sup>۱۱</sup> تبدیل می‌شود. سپس آینده‌ی این سری زمانی توسط شبکه‌ی عصبی حافظه‌ی طولانی کوتاه‌مدت پیش‌بینی می‌شود؛ با این پیش‌بینی‌ها مدت زمان رسیدن به آستانه‌ی معین نیز محاسبه می‌شود.

## ۲. انتخاب و آماده‌سازی مشخصه‌ی ارتعاشی

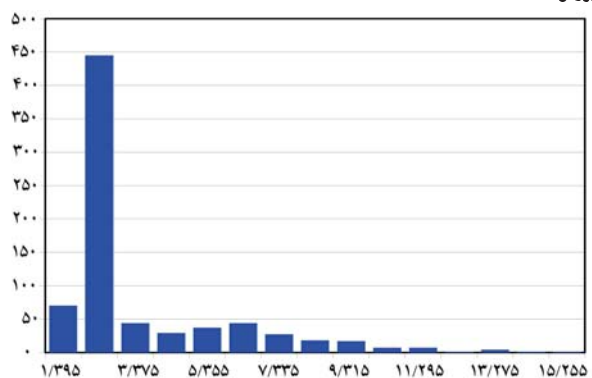
از سیگنال‌های زمانی یا طیف فرکانسی<sup>۱۲</sup> شتاب باتاقان می‌توان مشخصه‌های ارتعاشی متفاوتی را محاسبه کرد که این مشخصه‌ها به طور عمده مرتبط با انرژی سیگنال هستند.<sup>[۱۸]</sup> از میان این مشخصه‌ها، مشخصه‌ی مناسب است که بهترین توصیف‌گر زوال باتاقان باشد.

بهراد و همکاران<sup>[۱۸]</sup> نشان دادند که مشخصه‌ی دامنه‌ی بیشینه‌ی سیگنال شتاب ارتعاشات یا پیک<sup>۱۳</sup> در پیش‌بینی عمر روی داده‌های آزمایشگاهی و صنعتی بهترین همبستگی را با اندازه‌ی عیب و زوال باتاقان دارد. بنابراین در نوشتار حاضر نیز از همین مشخصه‌ی ارتعاشی برای توصیف فرایند زوال باتاقان غلشتی استفاده خواهد شد.

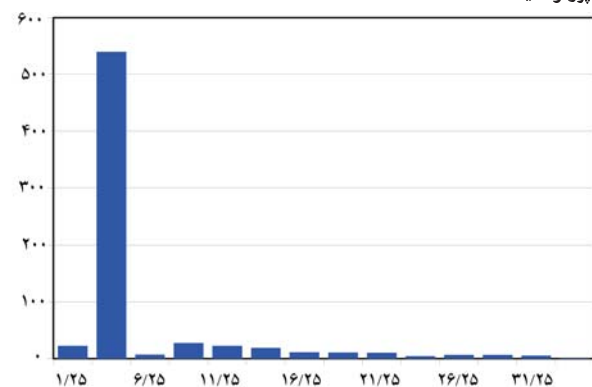
روش ارائه شده برای پیش‌بینی عمر در این نوشتار، روشی وابسته به روند رشد مشخصه‌ی زوال است و این موضوع می‌طلبد که بخشی از فرایند زوال باتاقان دارای افزایش تدریجی باشد؛ در غیر این صورت خطای پیش‌بینی ممکن است افزایش یابد. الگوریتم پیشنهادی با هر بار مشاهده یا اندازه‌گیری جدید، پیش‌بینی جدیدی از وضعیت رشد آینده‌ی روند مشخصه‌ی زوال ارائه خواهد کرد. به طور کلی، فرایند زوال باتاقان را می‌توان به سه بخش تقسیم کرد: بخش عادی و سالم، بخش شکل‌گیری و رشد آهسته‌ی عیب، بخش رشد سریع



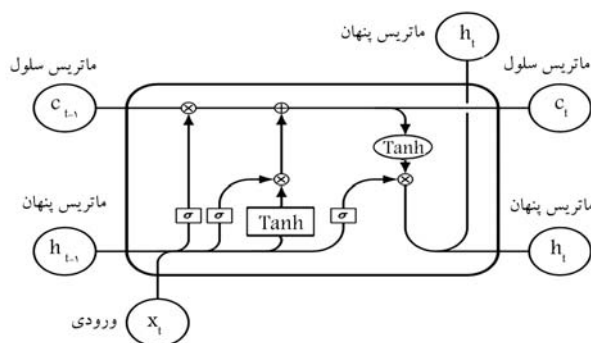
نمودار ۱. نمودار ستونی مشخصه‌ی پیک ارتعاشات یاتاقان شماره، ۱ آزمایش پرونوستیا.



نمودار ۲. نمودار ستونی مشخصه‌ی پیک ارتعاشات یاتاقان شماره ۳ آزمایش پرونوستیا.



نمودار ۳. نمودار ستونی مشخصه‌ی پیک ارتعاشات یاتاقان شماره ۴ آزمایش پرونوستیا.



شکل ۱. معماری سلول شبکه‌ی عصبی حافظه‌ی طولانی مدت.

عیب و از کار افتادگی یاتاقان.<sup>[۲۰]</sup> در بعضی مطالعات نیز این سه بخش را به ترتیب، بخش کارکرد عادی، بخش زوال آهسته<sup>۱۴</sup> و بخش زوال سخت<sup>۱۵</sup> نامیده‌اند.<sup>[۵]</sup>

معمولاً یاتاقان در مرحله‌ی شکل‌گیری و رشد عیوب، دارای یک روند نرم و آهسته در رشد مشخصه‌های ارتعاشی به‌خصوص پیک و مقدار مؤثر سیگنال ارتعاشات است. در این مرحله از زوال، می‌توان تکنیک معرفی شده در این مقاله را پیاده‌سازی کرد. ضمن این‌که برای کاهش نویز و نوسانات، نمودار مشخصه‌ی ارتعاشی پیک با روش میانگین متحرک<sup>۱۶</sup> فیلتر می‌شود و ادامه‌ی تحلیل‌ها روی نمودار فیلتر شده صورت می‌گیرد.

اما از آن‌جا که این مشخصه‌ی ارتعاشی به‌عنوان یک سری زمانی ناپایدار است، چرا که روند زوال همیشه به‌صورت اکیداً صعودی است و میانگین و انحراف معیار این سری زمانی با گذر زمان تغییر می‌کند. بنابراین بهتر است ابتدا تبدیل به یک سری زمانی پایدار شود زیرا سری‌های زمانی پایدار قابلیت بهتری در پیش‌بینی با استفاده از شبکه‌ی عصبی حافظه‌ی طولانی کوتاه‌مدت دارند. سپس این سری زمانی پایدار وارد مرحله‌ی پیش‌بینی خواهد شد.

به منظور تبدیل این مشخصه‌ها به یک سری زمانی پایدار، باید به نحوه‌ی توزیع داده‌های مشخصه‌ی پیک توجه کرد. در نمودار ۱ تا ۳، نمودار ستونی<sup>۱۷</sup> مشخصه‌ی پیک دو نمونه یاتاقان از آزمایش عمر پرشتاب پرونوستیا<sup>۱۸</sup> (که در پژوهش حاضر استفاده خواهد شد) آورده شده است. چنان‌که مشاهده می‌شود، این نوع توزیع داده مربوط به توزیع نرمال لگاریتمی<sup>۱۹</sup> است.

چنین سری‌های زمانی، ابتدا باید توسط رابطه‌ی ۱ به فضای نیمه‌لگاریتم منتقل شوند و سپس برای پایدار شدن لازم است یک مرتبه مشتق‌گیری انجام شود. به این ترتیب یک سری زمانی پایدار به دست خواهد آمد که توزیع داده‌های آن به‌صورت نرمال خواهد بود و مشخصه‌های آماری آن مانند میانگین و انحراف معیار نسبت به زمان ثابت است.<sup>[۲۰،۲۱]</sup>

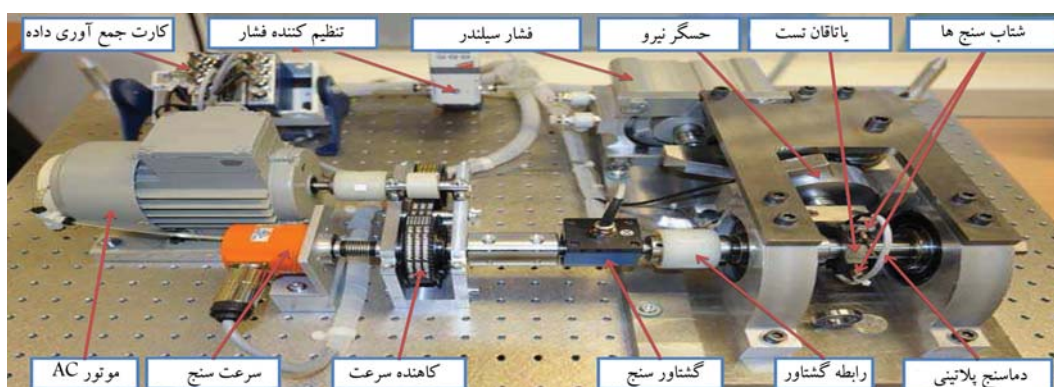
$$P_s = \log(P_{i+1}) - \log(P_i) \quad (1)$$

که در آن  $P$  مقدار مشخصه‌ی ارتعاشی پیک و  $P_s$  سری زمانی پایدار شده‌ی پیک است.

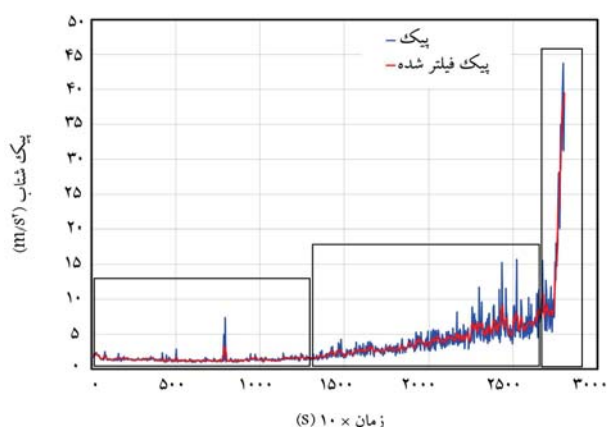
### ۳. معرفی شبکه‌ی عصبی

در شبکه‌ی عصبی حافظه‌ی طولانی کوتاه‌مدت، صراحتاً یک واحد حافظه تعریف می‌شود که داده‌های گذشته‌ی دور را نیز می‌تواند در خود جای دهد. این امر موجب می‌شود که دینامیک سیستم به نحو بهتری شناسایی شود. در شکل ۱ جزئیات یکی از سلول‌های این نوع شبکه‌ی عصبی آورده شده است. هر سلول از این شبکه دارای ۳ ورودی است که شامل ورودی فعلی  $x_t$ ، ورودی از سلول قبل  $h_{t-1}$  و ورودی از حافظه‌ی سلول قبل  $c_{t-1}$  (مهم‌ترین بخش این شبکه) است. خروجی‌ها نیز دو بخش دارد:  $h_t$  و  $c_t$ . بنابراین خروجی نهایی در این سلول با توجه به ورودی‌هایی که دارد می‌تواند از گذشته نیز تأثیر پذیرد.

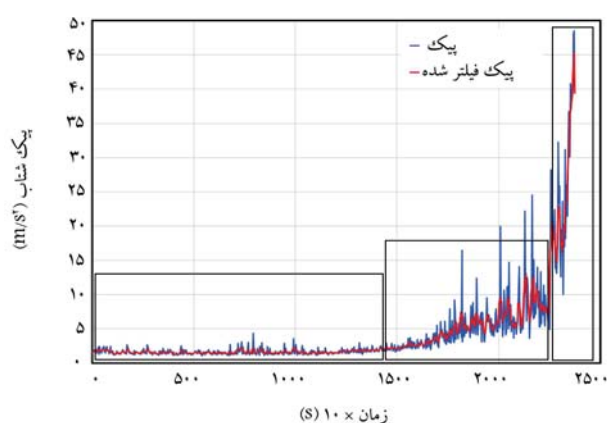
مهم‌ترین ویژگی این شبکه داشتن یک خط حافظه است که از میان همه‌ی سلول‌ها گذر می‌کند. دروازه‌های مختلفی هم در این سلول وجود دارد که هر کدام عهده‌دار وظیفه‌ی بی است. اولین دروازه مربوط به فراموشی داده‌های گذشته است و تعیین می‌کند که چه مقدار از داده‌های قبلی باید فراموش شود. دروازه بعدی مربوط



شکل ۲. نمایی از دستگاه تست در آزمایش پرونوستیا. [۲۳]



نمودار ۴. نمودار روند تغییرات مشخصه‌ی ارتعاشی پیک در طول عمر یاتاقان ۱ پرونوستیا.



نمودار ۵. نمودار روند تغییرات مشخصه‌ی ارتعاشی پیک در طول عمر یاتاقان ۳ پرونوستیا.

از میان داده‌های آزمایش پرونوستیا، یاتاقان شماره‌ی ۱، ۳ و ۴ از شرایط کاری اول (سرعت ۱۸۰۰ دور بر دقیقه و بار شعاعی ۴۰۰۰ کیلو نیوتن)، شامل شروط گفته شده در بخش ۲ می‌شوند و فرایند زوال آن‌ها از دو یا سه مرحله تشکیل شده است و مرحله‌ی شکل‌گیری و رشد عیوب دارای یک روند آهسته است. روند تغییرات مشخصه‌ی پیک ارتعاشات یاتاقان‌های ۱، ۳ و ۴ در مدت عمر آن‌ها به ترتیب در نمودار ۴، ۵ و ۶ نشان داده شده است.

به به‌روزرسانی خط حافظه است. در این حین مقدار  $c_{t-1}$  با  $c_t$  تعویض می‌شود. هم‌زمان، در طرف دیگری از سلول مقدار  $h_{t-1}$  که از سلول قبلی آورده شده است با کمک خط حافظه‌ی به‌روزرسانی شده به مقدار  $h_t$  تبدیل می‌شود. در روابط ۲ و ۳، روابط حاکم بر پارامترهای یک سلول شبکه‌ی عصبی حافظه‌ی طولانی مدت آورده شده است.

$$c_t = \sigma(X_t.U_f + h_{t-1}.W_f).c_{t-1} + \sigma(X_t.U_i + h_{t-1}.W_i).tanh(X_t.U_c + h_{t-1}.W_c) \quad (2)$$

$$h_t = \sigma(X_t.U_o + h_{t-1}.W_o).tanh(c_t) \quad (3)$$

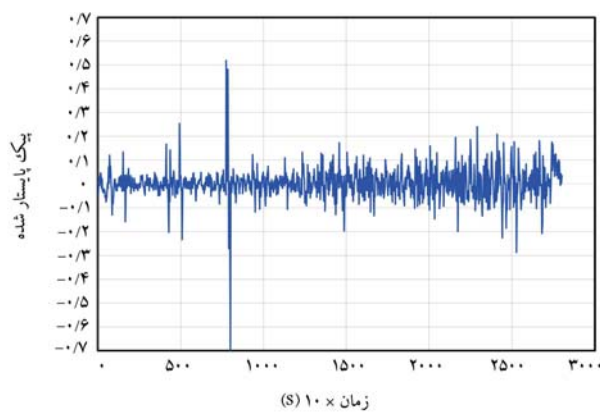
در این روابط مقادیر  $W$  و  $U$  وزن‌هایی هستند که در مرحله‌ی آموزش مقداردهی شده‌اند و نماد  $\sigma$  مربوط به تابع فعال‌سازی سیگموئید<sup>۲۰</sup> است. پس از این که محاسبات در درون سلول‌ها پایان یافت، خروجی  $h_t$  وارد یک لایه‌ی کاملاً متصل<sup>۲۱</sup> می‌شود و در انتها خروجی نهایی محاسبه خواهد شد. برای طراحی و آموزش شبکه‌ی عصبی حافظه‌ی طولانی کوتاه مدت، از نرم‌افزار متلب<sup>۲۲</sup> استفاده شده است.

در این نوع کاربرد از شبکه، داده‌یی به منظور اعتبارسنجی<sup>۲۳</sup> نخواهیم داشت زیرا داده‌های آموزش دارای ترتیب زمانی هستند و به هیچ عنوان نباید از میان آن‌ها داده‌یی به منظور اعتبارسنجی خارج شود؛ چون این کار باعث به هم ریخته شدن ترتیب زمانی بین داده‌های آموزش و همچنین بین داده‌های اعتبارسنجی می‌شود.

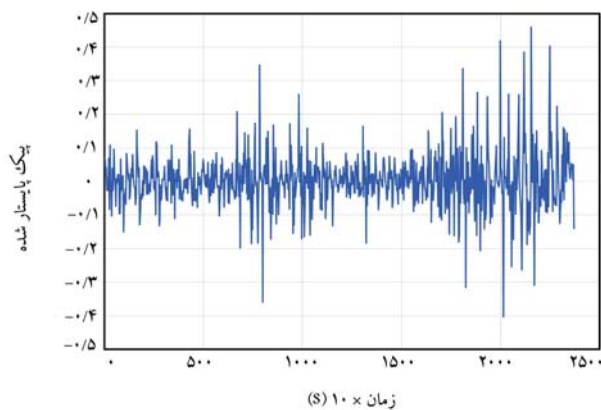
#### ۴. معرفی داده‌های تجربی

داده‌هایی که در این مقاله استفاده می‌شود، مربوط به آزمایش پرونوستیاست که نخستین بار در قالب یک مسابقه در سال ۲۰۱۲ منتشر شد<sup>[۴]</sup> و پس از آن به صورت آزاد در اختیار محققین قرار گرفت. در این مجموعه، آزمون عمر برشتاب روی ۱۷ یاتاقان مشابه در سه شرط کاری متفاوت از لحاظ سرعت و بار انجام شده است. تصویری از چیدمان آزمایش مورد نظر در شکل ۲ نشان داده شده است.<sup>[۲۳]</sup>

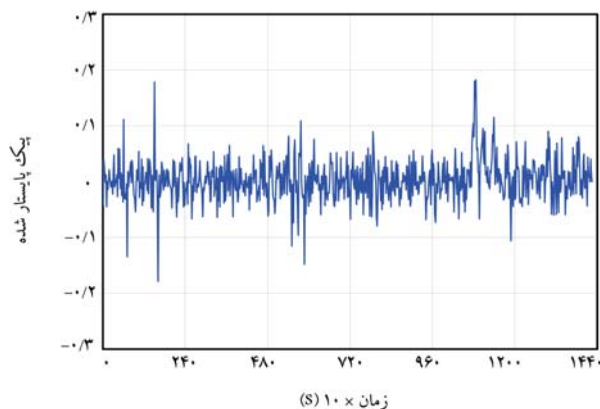
ارتعاشات یاتاقان مورد آزمایش در این مجموعه در دو راستای افقی و عمودی توسط دو حسگر شتاب‌سنج از ابتدا تا انتهای عمر ثبت شده است. نرخ نمونه‌برداری این حسگرها برابر با ۲۵/۶ کیلوهرتز است و هر ۱۰ ثانیه یک‌بار، نمونه‌یی به طول ۰/۱ ثانیه ثبت شده است.



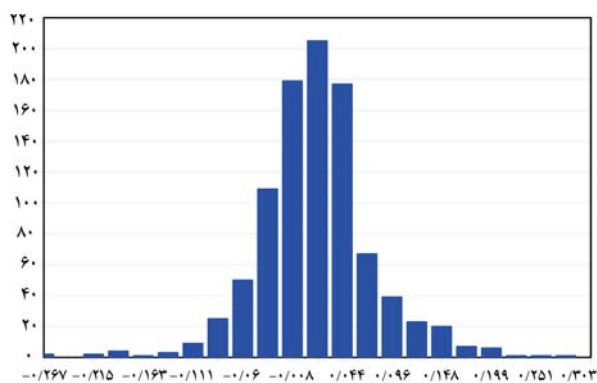
نمودار ۷. نمودار پیک یاتاقان ۱ پس از پایدار شدن.



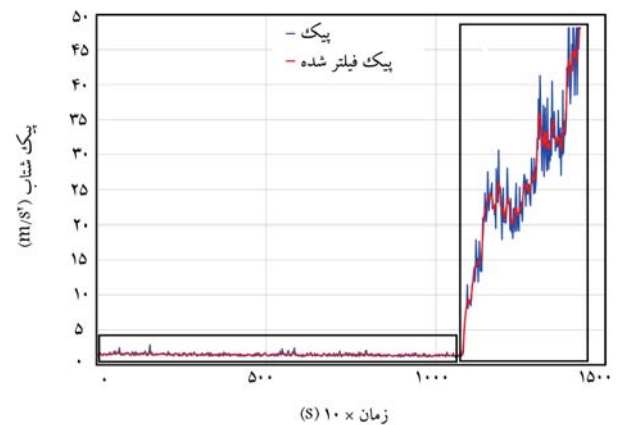
نمودار ۸. نمودار پیک یاتاقان ۳ پس از پایدار شدن.



نمودار ۹. نمودار پیک یاتاقان ۴ پس از پایدار شدن.



نمودار ۱۰. نمودار ستونی داده‌های پیک پایدار شده یاتاقان ۱.



نمودار ۶. نمودار روند تغییرات مشخصه‌ی ارتعاشی پیک در طول عمر یاتاقان ۴ پرونوستیا.

جدول ۱. پارامترهای مهم در طراحی شبکه‌ی عصبی حافظه‌ی طولانی کوتاه‌مدت.

۸۰	تعداد واحدهای پنهان
۱	تعداد لایه‌های کاملاً متصل
سری زمانی پایدار شده در زمان t	ورودی
سری زمانی پایدار شده در زمان t + ۱	خروجی
Adam	الگوریتم آموزش شبکه
۰/۰۱۵	نرخ یادگیری
RMSE	تابع هزینه

## ۵. نتایج پیش‌بینی روند

### ۵.۱. طراحی شبکه‌ی عصبی

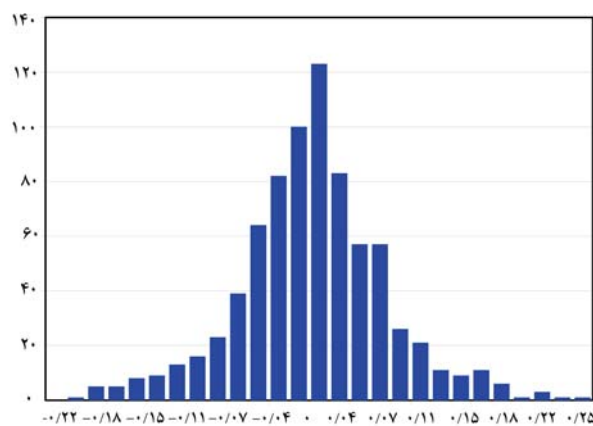
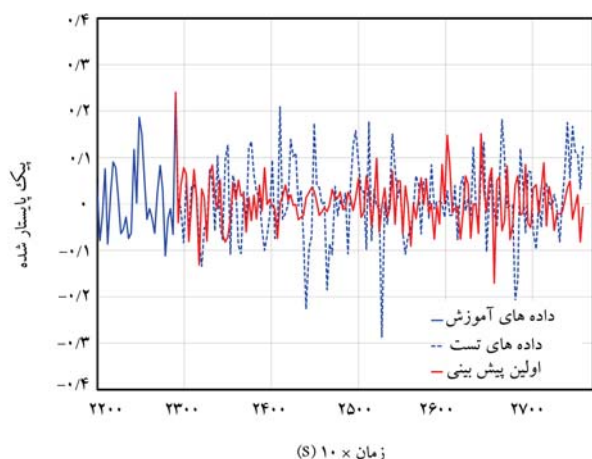
ابتدا معماری شبکه‌ی عصبی حافظه‌ی طولانی کوتاه‌مدت صورت می‌گیرد که جزئیات آن در جدول ۱ ارائه شده است. چون قرار است دینامیک و روند مشخصه‌ی پیک توسط شبکه یاد گرفته شود، باید در معماری شبکه، قوه‌ی حافظه را قدرتمند طراحی کرد. به این منظور در جدول ۱ تعداد واحدهای پنهان موجود در شبکه‌ی عصبی حافظه‌ی طولانی کوتاه‌مدت باید بسیار بیشتر از تعداد لایه‌های کاملاً متصل باشد.

### ۵.۲. آماده‌سازی داده‌ها

در ابتدا مشخصه‌ی پیک یاتاقان ۱، ۳ و ۴ از شرایط کاری اول آزمون پرونوستیا که نمودار مشخصه‌ی پیک آن‌ها در نمودارهای ۴ تا ۶ آورده شد، توسط رابطه‌ی ۱ تبدیل به یک سری زمانی پایدار می‌شود. در نمودارهای ۷ تا ۹ داده‌های پایدار شده آورده شده است. توزیع داده‌های پیک ارتعاشات این دو یاتاقان قبل از پایدار شدن در نمودارهای ۱ تا ۳ آورده شده است. اما چنان‌که از نمودارهای ۱۰ تا ۱۲ مشخص است، توزیع داده‌ها پس از پایدار شدن نرمال هم شده است.

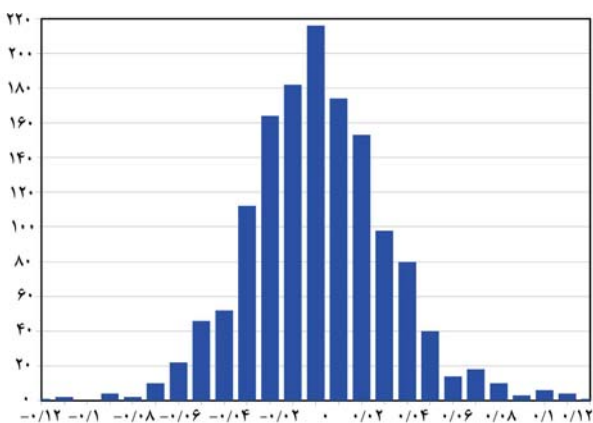
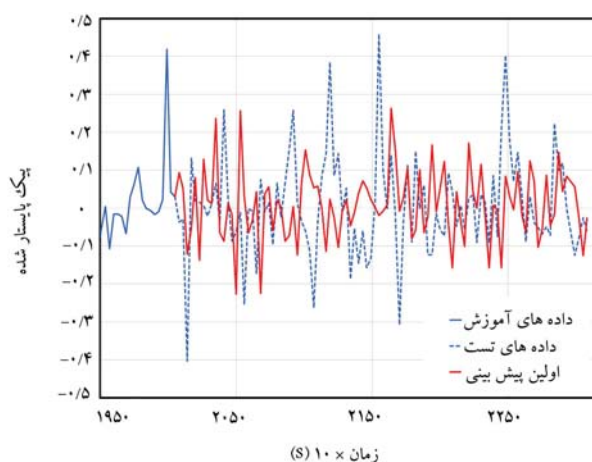
چنان‌که در بخش ۲ اشاره شد، مرحله شکل‌گیری و رشد عیوب، دارای روند رشد آهسته بوده و پیش‌بینی‌ها فقط در همین مرحله صورت خواهد گرفت. بنابراین از داده‌های پایدار شده، فقط بخشی که متناظر با این مراحل است جدا می‌شود و پیش‌بینی روی آن‌ها صورت می‌گیرد. سپس پیش‌بینی‌های صورت گرفته، باید توسط رابطه‌ی ۴ به فضای قبل از پایدار شدن بازگردد.

$$P_{i+1} = P_i \times 10^{P_S} \quad (4)$$



نمودار ۱۱. نمودار ستونی داده‌های پیک پایدار شده یاتاقان ۳.

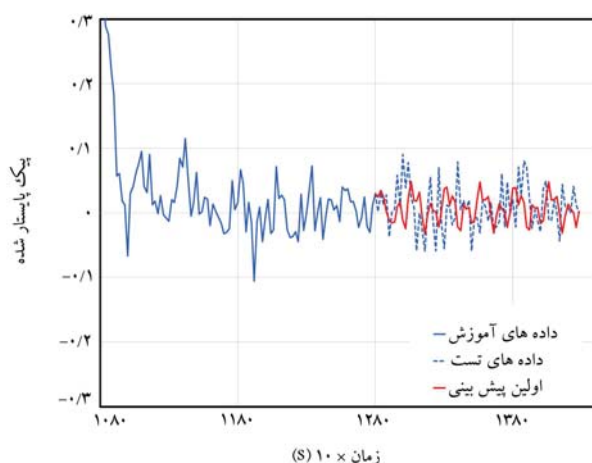
نمودار ۱۳. پیش‌بینی ادامه‌ی سری زمانی پایدار یاتاقان ۱.



نمودار ۱۲. نمودار ستونی داده‌های پیک پایدار شده یاتاقان ۴.

نمودار ۱۴. پیش‌بینی ادامه‌ی سری زمانی پایدار یاتاقان ۳.

$P_S$  مقدار پیش‌بینی شده‌ی سری زمانی پیک در فضای پایدار است.



نمودار ۱۵. پیش‌بینی ادامه‌ی سری زمانی پایدار یاتاقان ۴.

### ۳.۵. پیش‌بینی عمر

برای شروع پیش‌بینی، تقریباً سه‌چهارم ابتدایی از مرحله‌ی دوم زوال یاتاقان به‌عنوان داده‌های آموزش در نظر گرفته می‌شود و سپس یک‌چهارم انتهایی مرحله‌ی دوم زوال پیش‌بینی و با مقادیر واقعی آن مقایسه می‌شود. در انتخاب این که چه تناسبی از داده‌ها به‌عنوان آموزش و آزمایش قرار بگیرد، مهم این است که شبکه بتواند الگوی زوال یاتاقان را از داده‌های آموزش فراگیرد، طبیعتاً اگر بتوان با داده‌های کم‌تری به این هدف رسید، پیش‌بینی‌ها در بازه وسیع‌تری صورت خواهد گرفت و این یک نکته‌ی مثبت است؛ در غیر این صورت خطاها افزایش می‌یابند. این موضوع از یک یاتاقان به یاتاقان دیگر متفاوت است. با این حال در نوشتار حاضر با حفظ وسعت بازه پیش‌بینی، دقت پیش‌بینی‌ها نیز حفظ شده است.

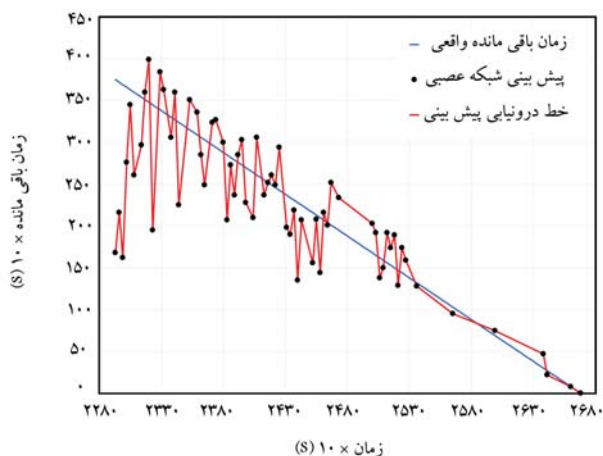
پیش‌بینی‌های صورت گرفته توسط شبکه در نمودارهای ۱۳ تا ۱۵ آورده شده است. وضوح ظاهری این پیش‌بینی‌ها هنگامی بهتر خواهد شد که مشخصه‌ی پیک مورد نظر به فضای اصلی و ناپایدار بازگردانده شود.

نکته‌ی که در پیش‌بینی‌ها وجود دارد این است که این پیش‌بینی‌ها می‌توانند با به دست آمدن مشاهدات یا اندازه‌گیری‌های جدید، به‌روزرسانی شوند. به این صورت که هر مشاهده‌ی جدید می‌تواند به‌عنوان ورودی به شبکه داده شود و سپس ادامه‌ی

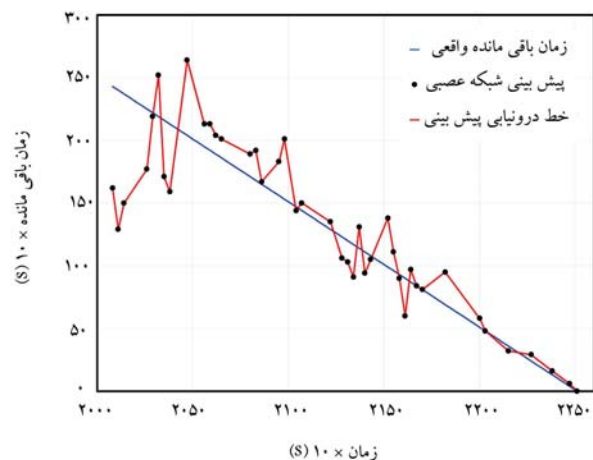
روند از شبکه خواسته شود. به عبارت دیگر، به ازای هر مشاهده یک پیش‌بینی جدید برای روند وجود خواهد داشت.

داده‌های آموزش در نمودارهای ۱۳ تا ۱۵ به‌طور کامل نمایش داده نشده است. بنابراین در این نمودارها، علاوه بر روند قرمز رنگ، روندهای دیگری هم به‌عنوان  $\Pi$  امین





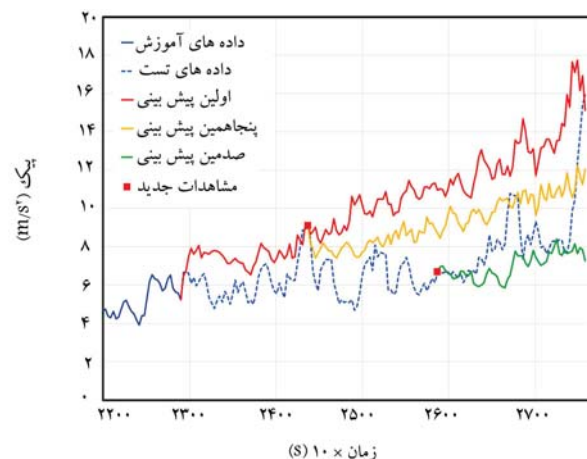
نمودار ۱۹. زمان باقیمانده رسیدن به آستانه‌ی ۱۰ متر بر مجذور ثانیه در یاتاقان ۱.



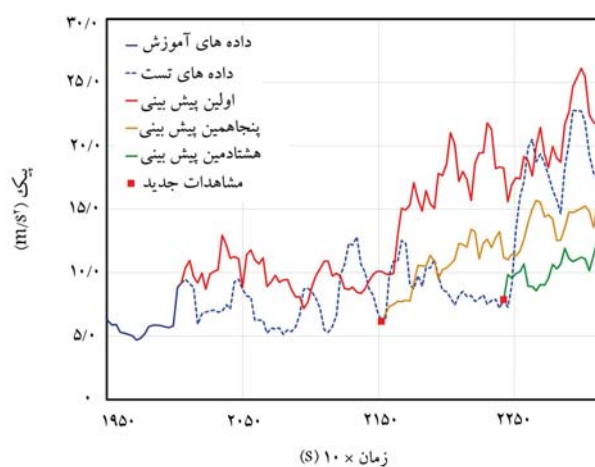
نمودار ۲۰. زمان باقیمانده رسیدن به آستانه‌ی ۱۴ متر بر مجذور ثانیه در یاتاقان ۳.

به یک آستانه معین می‌رسد. این آستانه می‌تواند معیاری بر پایان عمر نیز باشد ولی به طور کل ساز و کار پیشنهاد شده در این مقاله این امکان را فراهم می‌کند که زمان باقیمانده تا رسیدن به هر آستانه‌ی دلخواهی را بتوان تعیین کرد. اگر این آستانه معیاری برای پایان عمر باشد، پیش‌بینی مورد نظر به معنای پیش‌بینی عمر مفید باقی مانده خواهد بود. استانداردهای مختلفی در زمینه‌ی پایش وضعیت وجود دارد که معمولاً به وسیله‌ی آن‌ها این آستانه‌ها را برای مشخصه‌ی پیک یا مقدار مؤثر سیگنال تعیین می‌کنند.

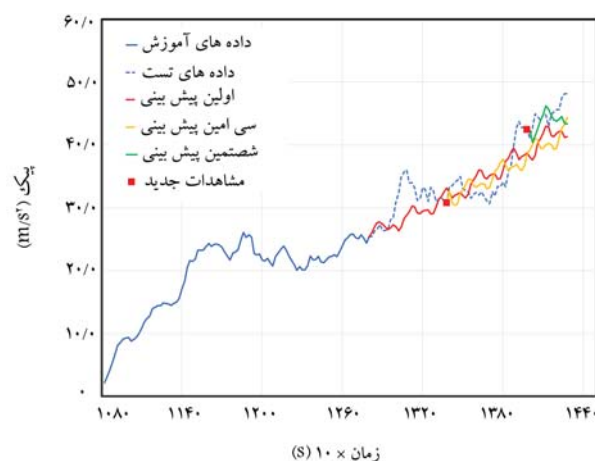
در نمودار ۱۹ پیش‌بینی شبکه‌ی عصبی حافظه‌ی طولانی کوتاه مدت از مدت زمان باقیمانده تا رسیدن مشخصه‌ی پیک شتاب یاتاقان ۱ به آستانه‌ی ۱۰ متر بر مجذور ثانیه آورده شده است. این آستانه صرفاً یک مثال از توانمندی سازوکار پیشنهاد شده در این مقاله است که لزوماً معیاری بر پایان عمر نیست. همچنین در نمودار ۲۰ نیز مدت زمان رسیدن مشخصه‌ی پیک شتاب یاتاقان ۳ به آستانه‌ی ۱۴ متر بر مجذور ثانیه آورده شده است و در نمودار ۲۱ نیز مدت زمان باقی مانده برای یاتاقان ۴ تا رسیدن مشخصه‌ی پیک به ۴۲ متر بر مجذور ثانیه پیش‌بینی شده است. همانطور که مشخص است با نزدیک شدن به انتهای زمان باقیمانده، دقت پیش‌بینی شبکه افزایش می‌یابد و این بدان معناست که روندهای پیش‌بینی شده قابلیت پیش‌بینی بهتری از آینده نزدیک خود دارند و در پیش‌بینی‌های بلندمدت توانایی آن‌ها کاهش می‌یابد.



نمودار ۱۶. پیش‌بینی‌های انجام شده روی روند پیک یاتاقان ۱.



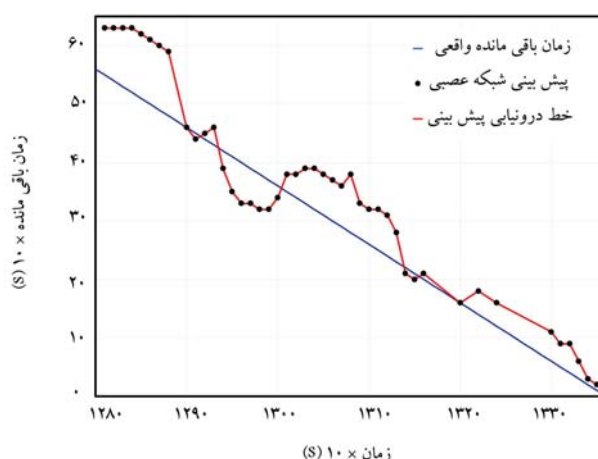
نمودار ۱۷. پیش‌بینی‌های انجام شده روی روند پیک یاتاقان ۳.



نمودار ۱۸. پیش‌بینی‌های انجام شده روی روند پیک یاتاقان ۴.

پیش‌بینی وجود خواهد داشت که برای اجتناب از آشفته شدن نمودارها آورده نشده است. اما در نمودارهای ۱۶ تا ۱۸، تعدادی از پیش‌بینی‌ها با کمک رابطه‌ی ۴ به فضای اصلی بازگردانده شده است.

پس از پیش‌بینی روند به‌ازای هر نقطه، نوبت به پیش‌بینی زمان رسیدن روندها



نمودار ۲۱. زمان باقیمانده رسیدن به آستانه‌ی ۴۲ متر بر مجذور ثانیه در یاتاقان ۴.

جدول ۲. محاسبه‌ی خطای پیش‌بینی‌ها از طریق رابطه‌ی ۵ و ۶.

یاتاقان ۱	یاتاقان ۳	یاتاقان ۴
۲۱٫۷	۱۴٫۳	۹٫۳
خطای کلی (%)		

از میان روندهایی که در نمودارهای ۱۶ تا ۱۸ وجود دارد، تعدادی از آنها ممکن است هرگز به آستانه‌ی تعیین شده نرسند و در این حالت مقدار زمان باقیمانده پیش‌بینی شده در روند مورد نظر برابر بی‌نهایت است. با توجه به این که فرایند زوال یاتاقان معمولاً به سمت بدتر شدن پیش می‌رود (در صورت عدم دخالت انسان مانند گریس‌کاری) و عمر باقی مانده بی‌نهایت معنای حقیقی ندارد، پس این روندهای پیش‌بینی شده خطای محض است و حذف خواهند شد. به همین دلیل است که نقاط سیاه رنگ در نمودارهای ۱۹ تا ۲۱ پیوسته نیستند زیرا تعدادی از پیش‌بینی‌ها حذف شده است.

در جدول ۲ دقت پیش‌بینی‌ها با کمک روندهای پیش‌بینی شده در نمودارهای ۱۶ تا ۱۸ توسط رابطه‌ی ۵ و ۶ آورده شده است:

$$Error_n = \frac{\sum_{i=1}^{N_n} \left| \frac{PR_i - P_i}{P_i} \right|}{N_n} \quad (5)$$

$i$  شمارنده‌ی نقطه‌ی حاضر در  $n$ امین روند پیش‌بینی شده است و  $N_n$  تعداد کل داده‌های پیش‌بینی شده در  $n$ امین روند است و  $PR_i$  و  $P_i$  به ترتیب نمادی از مقدار پیش‌بینی شده پیک و مقدار واقعی پیک در آن روند هستند. سپس برای مشخص شدن خطای کلی در پیش‌بینی‌ها از رابطه‌ی ۶ استفاده شده است.

$$Error_{Overall} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{total}} Error_n}{N_{total}} \quad (6)$$

که در این رابطه منظور از  $N_{total}$  تعداد روندهای پیش‌بینی شده قابل قبول در هر یاتاقان است. در نمودارهای ۱۶ تا ۱۸ تعداد روندهای پیش‌بینی شده قابل قبول (پس از حذف روندهای باطل) به ترتیب برابر ۶۴، ۴۲ و ۱۲ عدد است.

## ۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله سازوکاری معرفی شد تا با استفاده از آن بتوان به پیش‌بینی خوبی از عمر مفید باقیمانده‌ی یاتاقان یا زمان رسیدن به یک آستانه‌ی معین رسید. نتایج خوب این سازوکار نشان‌دهنده‌ی قدرت شبکه‌ی عصبی حافظه‌ی طولانی کوتاه‌مدت در پیش‌بینی سری‌های زمانی است که در صورت پایدار بودن این سری‌های زمانی نتایج بسیار مطلوب‌تر خواهد بود. در این مقاله روش مناسبی به منظور تبدیل مشخصه‌های ارتعاشی مانند پیک سیگنال شتاب ارتعاشات به یک سری زمانی پایدار نیز معرفی شد.

سازوکار پیشنهادی در یاتاقان‌هایی که روند زوال‌شان آهسته است، بسیار کارآمد خواهد بود و قابلیت انعطاف خوبی در پیش‌بینی مدت زمان رسیدن به آستانه‌ی دلخواه دارد؛ این آستانه می‌تواند معیاری بر پایان عمر نیز باشد و معمولاً برگرفته از تجربه یا استانداردهای موجود است.

یکی از مزایای قابل توجه این روش، عدم نیاز آن به داده‌های دیگر یاتاقان‌ها برای آموزش است. زیرا شبکه فقط بر اساس داده‌های گذشته‌ی یک یاتاقان آموزش داده می‌شود و ادامه‌ی روند همان یاتاقان را پیش‌بینی می‌کند. با این حال این امکان وجود دارد که از تمام عمر یک یاتاقان برای آموزش استفاده کرد و روی یاتاقان‌های دیگر پیاده کرد، اما از آن‌جا که یاتاقان‌ها ممکن است الگوهای زوال متفاوتی داشته باشند ممکن است در این حالت خطاها افزایش یابند.

## پانویس‌ها

1. feed forward neural network
2. root mean square (RMS)
3. kurtosis
4. convolutional neural network
5. long short-term memory (LSTM)
6. support vector regression (SVR)
7. light gradient boosting machine (LGBM)
8. fast degradation
9. kalman filter
10. deep neural network
11. stationary

12. spectrum
13. peak
14. slow degradation
15. hard degradation
16. moving average
17. histogram
18. PRONOSTIA
19. log-normal distribution
20. sigmoid
21. fully connected layer
22. MATLAB
23. validation



## منابع (References)

- Jardine, A., Lin, D. and Banjevic, D. "A review on machinery diagnostics and prognostics implementing condition-based maintenance", *Mechanical Systems and Signal Processing*, **20**(7), pp. 1483-1510 (2006).
- Singleton, R., Strangas, E. and Aviyente, S. "Extended kalman filtering for remaining-useful-life estimation of bearings", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **62**(3), pp. 1781-1790 (2015).
- Lei, Y., Li, N., Guo, L. and et al. "Machinery health prognostics: a systematic review from data acquisition to RUL prediction", *Mechanical Systems and Signal Processing*, **104**, pp. 799-834 (2018).
- Cubillo, A., Perinpanayagam, S. and Esperon-Miguez, M. "A review of physics-based models in prognostics: application to gears and bearings of rotating machinery", *Advances in Mechanical Engineering*, **8**(8), p. 168781401666466 (2016).
- Behzad, M., Arghand, H. and Rohani Bastami, A. "Remaining useful life prediction of ball-bearings based on high-frequency vibration features", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, **232** (18), pp. 3224-3234 (2017).
- Mahamad, A., Saon, S. and Hiyama, T. "Predicting remaining useful life of rotating machinery based artificial neural network", *Computers & Mathematics With Applications*, **60**(4), pp. 1078-1087 (2010).
- Li, X., Elasha, F., Shanbr, S. and et al. "Remaining useful life prediction of rolling element bearings using supervised machine learning", *Energies*, **12**(14), p. 2705 (2019).
- Peng, C., Chen, Y., Chen, Q. and et al. "A Remaining useful life prognosis of turbofan engine using temporal and spatial feature fusion", *Sensors*, **21**(2), p. 418 (2021).
- Zhai, Y., Deng, A., Li, J. and et al. "Remaining useful life prediction of rolling bearings based on recurrent neural network", *Journal on Artificial Intelligence*, **1**(1), pp. 19-27 (2019).
- Mao, W., He, J., Tang, J. and et al. "Predicting remaining useful life of rolling bearings based on deep feature representation and long short-term memory neural network", *Advances in Mechanical Engineering*, **10**(12), p. 168781401881718 (2018).
- Yang, C., Chen, Y., Chan, Y. and et al. "Influenza-like illness prediction using a long short-term memory deep learning model with multiple open data sources", *The Journal of Supercomputing*, **76**(12), pp. 9303-9329 (2020).
- Yildirim, D., Toroslu, I. and Fiore, U. "Forecasting directional movement of forex data using LSTM with technical and macroeconomic indicators", *Financial Innovation*, **7**(1) (2021).
- Song, X., Liu, Y., Xue, L. and et al. "Time-series well performance prediction based on long short-term memory (LSTM) neural network model", *Journal of Petroleum Science and Engineering*, **186**, p. 106682 (2020).
- Reuben, L. and Mba, D. "Diagnostics and prognostics using switching Kalman filters", *Structural Health Monitoring*, **13**(3), pp. 296-306 (2014).
- Heimes, F. "Recurrent neural networks for remaining useful life estimation", *International Conference on Prognostics and Health Management* (2008).
- Zhai, Y., Deng, A., Li, J. and et al. "Remaining useful life prediction of rolling bearings based on recurrent neural network", *Journal on Artificial Intelligence*, **1** (1), pp. 19-27 (2019).
- Kulkarni, S. and Wadkar, S. "Experimental investigation for distributed defects in ball bearing using vibration signature analysis", *Procedia Engineering*, **144**, pp. 781-789 (2016).
- Behzad, M., Feizhoseini, S., Arghand, H. and et al. "Failure threshold determination of rolling element bearings using vibration fluctuation and failure modes", *Applied Sciences*, **11**(1), p. 160 (2020).
- Hamadache, M., Jung, J., Park, J. and et al. "A comprehensive review of artificial intelligence-based approaches for rolling element bearing PHM: shallow and deep learning", *JMST Advances*, **1**(1-2), pp. 125-151 (2019).
- Medjaher, K., Tobon-Mejia, D. and Zerhouni, N. "Remaining useful life estimation of critical components with application to bearings", *IEEE Transactions on Reliability, Institute of Electrical and Electronics Engineers*, **61**(2), pp. 292-302 10.1109/TR.2012.2194175. hal-00737596 (2012).
- Feng, C., Wang, H., Lu, N. and et al. "Log-transformation and its implications for data analysis", *Shanghai Arch. Psychiatry*, **26**(2), pp.105-109 (2014). DOI: 10.3969/j.issn.1002-0829.2014.02.
- Jebb, A.T., Tay, L. Wang, W. and et al. "Time series analysis for psychological research: examining and forecasting change", *Front Psychol*, **6**:727 (2015). DOI: 10.3389/fpsyg.2015.00727.
- Nectoux, P., Gouriveau, R., Medjaher, K. and et al. "PRONOSTIA: an experimental platform for bearings accelerated degradation tests", In: *IEEE International Conference on Prognostics and Health Management*, PHM 12, Denver, CO, USA. IEEE Catalog Number: CPF12PHM-CDR (June 2012).



# کنترل فعال جریان روی پرهی توربین باد محور عمودی داریوس با استفاده از عملگر پلاسما

مجید زابع جاوشی (دانشجوی دکتری)

عباس ابراهیمی\* (دانشیار)

دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف

مهندسی مکانیک شریف (بهار ۱۴۰۱)  
دوری ۳-۲، شماره ۱، ص. ۸۳-۷۳، (پژوهشی)

یکی از مشکلات اصلی توربین باد محور عمودی داریوس که باعث کاهش راندمان آن‌ها شده پدیده واماندگی دینامیکی است که با کنترل آن می‌توان عملکرد این توربین‌ها را بهبود داد. در این پژوهش، اثر عملگر پلاسما بر عملکرد توربین باد محور عمودی داریوس به صورت عددی با روش حجم محدود فشار مینا بررسی شده است. پس از شناخت دقیق جریان حول پره توربین در حالت بدون کنترل، سه چیدمان عملگر پلاسما شامل عملگر سطح داخلی، سطح بیرونی و دوطرفه با حالت بدون عملگر مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد گشتاور حول محل اتصال پره به نگهدارنده آن به صورت محلی می‌تواند تا ۲۵ درصد در ناحیه بالادست و تا ۵۰ درصد در ناحیه پایین دست پره تأثیرگذار باشد. عملگر پلاسما با کنترل واماندگی و کوچک‌تر کردن گردابه سطح مکش در طی حرکت رو به پایین پره باعث افزایش ضریب نیروی برآ و کاهش پسا شده و مقدار گشتاور مثبت حول محل اتصال را افزایش می‌دهد. در نهایت، عملگر سطح داخلی و دوطرفه باعث بهبود توان خروجی توربین تا ۱۰ درصد شده است.

واژگان کلیدی: توربین باد محور عمودی، واماندگی دینامیکی، کنترل جریان فعال، عملگر پلاسما.

zare@ae.sharif.ir  
ebrahimi.a@sharif.ir

## ۱. مقدمه

بوده و نیازی به صرف انرژی ندارند، اما کارایی آن‌ها نسبت به روش‌های فعال کم‌تر است؛ به‌ویژه در پدیده‌هایی که مانند واماندگی دینامیکی به شدت ناپایا و پیچیده‌اند.<sup>[۷]</sup> از جمله روش‌های غیرفعال که تاکنون برای کنترل واماندگی دینامیکی توسط پژوهش‌گران بررسی شده می‌توان به مولد گردابه،<sup>[۸]</sup> حفره، سیم با فاصله از سطح<sup>[۹]</sup> و فلپ‌گارنی<sup>[۱۰]</sup> اشاره کرد. روش‌های کنترل جریان فعال اگرچه کارایی بالاتری نسبت به روش‌های غیرفعال دارند اما نیازمند صرف انرژی هستند و لازم است شناخت کاملی نسبت به پدیده مورد نظر وجود داشته باشد. روش‌های کنترل فعالی که تاکنون توسط پژوهش‌گران استفاده شده عبارت‌اند از: مکش لبه‌ی حمله،<sup>[۱۱]</sup> دمش،<sup>[۱۲]</sup> نوسان<sup>[۱۳]</sup> لبه‌ی حمله،<sup>[۱۴]</sup> جت مصنوعی<sup>[۱۵]</sup> و عملگر پلاسما.<sup>[۱۶]</sup>

در بین روش‌های کنترل جریان فعال، تاکنون فقط دو روش جت مصنوعی و عملگر پلاسما در توربین باد محور عمودی داریوس و آن هم به صورت بسیار محدود استفاده شده است. جت مصنوعی ابتدا توسط ولاسکو و همکاران<sup>[۱۶]</sup> در یک بررسی عددی دوبعدی، با قرار دادن جت مصنوعی در قسمت داخلی پره توربین باد محور عمودی داریوس استفاده شد. نتایج نشان داد که جت مصنوعی می‌تواند باعث تأخیر واماندگی دینامیکی در زاویه‌ی حمله بالاتری شود که این عامل منجر به افزایش توان خروجی توربین شده است. ژو و همکاران<sup>[۱۷]</sup> در یک بررسی عددی با بهبود پارامترهای جت مصنوعی و به‌کارگیری سناریوهای مختلف

توربین‌های باد محور عمودی برای استفاده در مناطق شهری از مزایای زیادی برخوردارند؛ از جمله عدم حساسیت به جهت باد، آلودگی صوتی کمتر،<sup>[۱]</sup> کارایی بیشتر در باد با آشفستگی بالا<sup>[۲]</sup> و راحتی در تعمیر و نگهداری.<sup>[۳]</sup> توربین‌های باد محور عمودی به دو دسته توربین‌های برآ - مینا و پسا - مینا تقسیم‌بندی می‌شوند. یکی از توربین‌های برآ - مینا، توربین داریوس است که راندمان بالایی دارد ولی جدایش جریان و واماندگی دینامیکی روی پره آن، باعث کاهش عملکرد آیرودینامیکی می‌شود.<sup>[۴]</sup>

واماندگی دینامیکی با پدیده‌هایی مانند تشکیل و ریزش گردابه‌ها از لبه‌ی حمله و لبه‌ی فرار همراه است.<sup>[۵]</sup> تشکیل این گردابه‌ها باعث افزایش موضعی نیروی برآ و ریزش آن‌ها باعث کاهش ناگهانی این نیرو می‌شود. در نتیجه‌ی نوسان نیروی برآ، گشتاور وارد بر محور توربین نیز نوسانی شده که موجب لرزش‌های سازه، آلودگی صوتی و افت عملکرد می‌شود.<sup>[۶]</sup> با کنترل این پدیده‌ها می‌توان مشکلات مطرح شده و عملکرد توربین باد را بهبود بخشید. تاکنون از روش‌های کنترل جریان فعال و غیرفعال زیادی برای کنترل پدیده واماندگی دینامیکی توسط پژوهش‌گران استفاده شده است. روش‌های کنترل جریان غیرفعال، ساده‌تر

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۴۰۰/۸/۸، اصلاحیه ۱۴۰۰/۱۱/۵، پذیرش ۱۴۰۰/۱۱/۹.

DOI:10.24200/J40.2022.59189.1623

## ۲. مبانی عملکرد توربین و فرمول بندی

گشتاور ایجاد شده ( $T$ ) توسط پره‌های توربین از طریق محور میانی به ژنراتور منتقل می‌شود و توان خروجی ( $P$ ) را تولید می‌کند. این دو پارامتر با استفاده از روابط ۱ و ۲ به صورت رابطه‌ی ۱ بی‌بعد می‌شوند:

$$C_p = \frac{P}{\rho V^3 R H} \quad (۱)$$

$$C_T = \frac{T}{\rho V^2 R^2 H} \quad (۲)$$

که در آن  $\rho$  چگالی هوا ( $kg/m^3$ )،  $V$  سرعت باد ( $m/s$ )،  $R$  شعاع توربین ( $m$ ) و  $H$  ارتفاع پره‌های توربین (۱ متر در شبیه‌سازی دوبعدی) بوده و گشتاور و توان خروجی در این روابط به ترتیب برحسب نیوتن‌متر ( $N.m$ ) و وات ( $W$ ) جایگذاری می‌شود. توان خروجی توربین وابستگی شدیدی به سرعت دورانی بی‌بعد توربین دارد که نسبت سرعت دورانی پره نامگذاری شده و با رابطه‌ی ۳ بیان می‌شود.<sup>[۲۳]</sup> در این رابطه  $\omega$  سرعت دورانی توربین ( $rad/s$ ) و  $V_b$  سرعت مماسی پره توربین است.

$$\lambda = \frac{V_b}{V} = \frac{\omega R}{V} \quad (۳)$$

یکی دیگر از پارامترهای مؤثر بر عملکرد توربین، ضریب پری توربین است. این پارامتر مطابق رابطه‌ی ۴ محاسبه می‌شود:

$$\sigma = \frac{Nc}{2R} \quad (۴)$$

که در آن  $N$  تعداد پره‌های توربین و  $c$  طول وتر ( $m$ ) هر پره است.

در توربین باد محور عمودی داریوس پره‌ها تغییر زیادی در سرعت نسبی ( $W$ ) و زاویه‌ی حمله مؤثر ( $\alpha$ ) تجربه می‌کنند. با چرخش پره توربین و قرارگیری در زاویه‌ی پره‌های مختلف ( $\theta$ ) سرعت نسبی و زاویه‌ی حمله‌ی مؤثر نیز تغییر می‌کند که مقدار آن به نسبت سرعت دورانی نیز وابسته است. با فرض این که پره در حرکت ناحیه‌ی بالادست اثری بر روی ناحیه‌ی پایین دست نداشته باشد می‌توان مقادیر سرعت نسبی و زاویه‌ی حمله‌ی مؤثر را مطابق روابط ۵ و ۶ برحسب زاویه‌ی پره و نسبت سرعت دورانی به دست آورد.<sup>[۲۴]</sup>

$$W = V \times \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda \cos\theta + 1} \quad (۵)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{\sin\theta}{\lambda + \cos\theta} \quad (۶)$$

در توربین‌های باد محور عمودی، نیروهای وارد بر پره توربین در دو جهت مماسی و عمود بر پره حائز اهمیت است. نیروی مماسی در راستای وتر پره بوده و همان نیرویی است که باعث ایجاد گشتاور حول محور و تولید توان خروجی می‌شود. از طرفی نیروی عمودی که عمود بر نیروی مماسی است به محور و نگهدارنده‌های پره وارد شده و از لحاظ سازه‌یی اهمیت دارد. این دو مؤلفه‌ی نیرو می‌توانند به راستاهای مختلف از جمله راستای محورهای مختصات کارتزین ( $x, y$ ) و راستای سرعت نسبی باد و عمود بر آن تجزیه شوند. در عمل ابتدا مقادیر نیروها در راستای محورهای مختصات کارتزین ( $F_x, F_y$ ) از شبیه‌سازی عددی استخراج شده و با استفاده از روابط مثلثاتی مقادیر نیروها در سایر راستاها محاسبه می‌شود. رابطه‌ی ۷ و ۸ بیان‌گر ارتباط بین نیروهای مماسی و عمودی با نیروهای در راستای محورهای مختصات هستند. در این روابط جهت مثبت نیروی مماسی به سمت لبه‌ی حمله و جهت

کنترل جریان، کارایی جت مصنوعی را افزایش دادند به نحوی که توان تولیدی تا ۱۵ درصد افزایش یافت.

گرینبلت و همکاران<sup>[۱۸]</sup> در یک نمونه‌ی آزمایشگاهی توربین باد محور عمودی داریوس، با نصب عملگر پلاسما در قسمت داخلی پره‌ی توربین، توان خروجی را تا ۳۸ درصد بهبود دادند. در این فعالیت، شناختی نسبت به فیزیک جریان و نحوه‌ی عملکرد عملگر حاصل نشد ولی در کار بعدی<sup>[۱۹]</sup> آن‌ها سعی کردند میدان جریان حول پره را با روش سرعت‌سنجی ذرات<sup>۲</sup> استخراج کنند. مشاهدات نشان داد که عملگر پلاسما باعث شده گردابه‌ی واماندگی دینامیکی شکل گرفته روی پره، کوچک‌تر و به سطح نزدیک‌تر شود. همین عامل باعث کنترل و به تأخیر افتادن واماندگی دینامیکی و افزایش توان خروجی شد. نتایج این پژوهش به دلیل محدودیت‌های آزمایشگاهی فقط برای زاویه‌ی پره ۱۲۰ درجه انجام شد. در مقاله‌ی دیگر، بن هاراو و گرینبلت<sup>[۲۰]</sup> یک کنترل‌گر پیش‌رو<sup>۴</sup> روی توربین باد محور عمودی نصب کردند تا عملگر پلاسما فقط در زوایای پره خاص روشن شود و از این طریق در انرژی مصرف شده توسط پلاسما صرفه‌جویی شود. این اقدام در نهایت باعث بهبود ۱۰ درصدی در توان خالص تولیدی شد. گرینبلت و لوتمن<sup>[۲۱]</sup> نصب عملگر پلاسما روی دو طرف پره توربین باد محور عمودی را ارزیابی کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که نصب عملگر روی قسمت داخلی پره تا ۵۰ درصد بهبود بیشتری نسبت به نصب روی قسمت خارجی پره دارد. آن‌ها همچنین با تلفیق هر دو روش، به نحوی که عملگر قسمت داخلی پره در ناحیه‌ی بالادست و عملگر قسمت خارجی در ناحیه‌ی پایین دست فعال باشد، موفق به بهبود بسیار جزئی در توان خروجی شدند. در یک بررسی عددی دیگر<sup>[۲۲]</sup> اثر عملگر پلاسما بر کنترل واماندگی دینامیکی در توربین باد محوری عمودی با استفاده از مدل شای<sup>۵</sup> شبیه‌سازی شد. برای این منظور محققین اثر موقعیت طولی قرارگیری عملگر بر توان خروجی را بررسی کرده و بهبود ۳۶ درصدی در حالت بهینه را گزارش کردند.

مرور تحقیقات گذشته نشان می‌دهد که استفاده از عملگر پلاسما به منظور بهبود کارایی توربین باد محوری عمودی داریوس امکان‌پذیر است. از آن‌جا که کنترل مؤثر جریان توسط روش‌های کنترل فعال، مستلزم شناخت کامل نسبت به پدیده و نحوه‌ی اثرگذاری آن است، باید فیزیک جریان با حضور پلاسما و بدون حضور پلاسما شناسایی شود. تاکنون نحوه‌ی اثرگذاری عملگر پلاسما بر پدیده‌ی واماندگی دینامیکی فقط در مرجع<sup>[۱۹]</sup> به صورت محدود انجام شده است. همچنین اطلاعاتی در مورد فیزیک جریان ارائه شده،<sup>[۲۲]</sup> اما این بررسی نیز متمرکز بر اثر موقعیت طولی عملگر بوده و تنها مقدار گشتاور لحظه‌یی تولیدی را گزارش کرده است. بنابراین تاکنون شناخت فیزیک اثرگذاری عملگر پلاسما محدود به میدان سرعت اطراف پره یا گشتاور لحظه‌یی بوده است. علاوه بر این، تاکنون تمامی پژوهش‌های صورت گرفته از اثر گشتاور حول نقطه‌ی اتصال پره به نگهدارنده صرف نظر کرده‌اند؛ در صورتی که این اثر برای پره‌های ضخیم که از محل یک چهارم وتر به نگهدارنده متصل نشده باشند، اهمیت پیدا خواهد کرد.

در این مقاله ابتدا ساختار پدیده واماندگی دینامیکی پره توربین باد محور عمودی داریوس در کل سیکل حرکت شناسایی شده است. با توجه به شناخت حاصل شده، محل نصب مناسب عملگر برای کنترل جریان تعیین شده و میزان اثربخشی عملگر پلاسما بر کنترل واماندگی دینامیکی ارزیابی شده است. در بررسی حاضر علاوه بر توان خروجی توربین، گشتاور لحظه‌یی و میدان جریان اطراف پره، اثر عملگر پلاسما بر ضرایب برا و پسی لحظه‌یی پره نیز مطالعه شده است. همچنین برای اولین بار گشتاور حول محل اتصال پره در نظر گرفته شده و اهمیت آن در تولید گشتاور لحظه‌یی پره نشان داده شده است.

واماندگی دینامیکی کاربرد دارد، در این پژوهش با استفاده از سرعت باد نسبی، طول وتر و ارتفاع مطابق روابط ۱۵ تا ۱۷ بی بعد شده اند تا با نتایج سایر تحقیقات در زمینه واماندگی دینامیکی در ایرفویل قابل مقایسه باشد. در این روابط  $C_n$  ضریب نیروی عمودی،  $C_t$  ضریب نیروی مماسی،  $C_l$  ضریب نیروی برآ،  $C_d$  ضریب نیروی پسا و  $C_{m,c.p.}$  ضریب گشتاور حول نقطه‌ی اتصال را معرفی می‌کند.

$$C_n = \frac{F_n}{\rho V^2 RH} \quad (13)$$

$$C_t = \frac{F_t}{\rho V^2 RH} \quad (14)$$

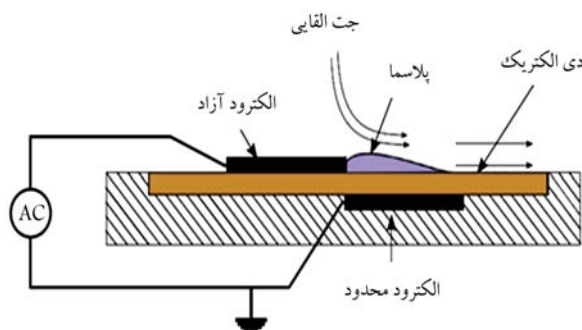
$$C_l = \frac{F_l}{\rho W^2 c H} \quad (15)$$

$$C_d = \frac{F_d}{\rho W^2 c H} \quad (16)$$

$$C_{m,c.p.} = \frac{M_{c.p.}}{\rho W^2 c^2 H} \quad (17)$$

### ۳. مدل عملگر پلاسما

عملگر پلاسما با ایجاد یک جت القایی در لایه‌ی مرزی می‌تواند به جلوگیری از جدایش جریان کمک کند.<sup>[۲۵]</sup> این عملگر مزایایی از جمله پاسخ زمانی سریع، نداشتن قسمت متحرک و وزن کم دارد. مطابق شکل ۲ عملگر پلاسما با ایجاد میدان الکتریکی بین دو الکترود عمل می‌کند. با اعمال اختلاف ولتاژ زیاد بین الکترودها، میدان الکتریکی شکل می‌گیرد و باعث القای باد الکتریکی یا یونی در نزدیکی سطح می‌شود. این جریان به دلیل برخورد یونها و ذرات خنثی در محدوده‌ی الکترود به وجود می‌آید. جریان القایی مانند نیروی حجمی عمل می‌کند و سیال نزدیک الکترودها را به حرکت درمی‌آورد. این جت تولیدی، پروفیل سرعت در لایه‌ی مرزی را بهبود بخشیده و جدایش را به تعویق می‌اندازد. طی سال‌های گذشته مدل‌های مختلفی برای مدل‌سازی اثر عملگر پلاسما بر روی ساختار جریان ارائه شده که از میان آن‌ها مدل الکترواستاتیک سوزن و هوانگ<sup>[۲۶]</sup> به دلیل دقت مناسب در این پژوهش استفاده شده است. در این مدل، توزیع غلظت شارژ بر روی دی الکتریک به صورت یک توزیع گوسی در نظر گرفته شده و میدان الکتریکی کل به دو ناحیه تقسیم شده است. ناحیه‌ی اول شامل میدان الکتریکی ناشی از ذرات باردار ناحیه‌ی دوم، میدان الکتریکی ناشی از ولتاژ اعمالی به الکترودهاست. با تفکیک میدان الکتریکی و اعمال آن بر معادلات ماکسول، دو معادله‌ی بیضوی برای میدان پتانسیل الکتریکی  $\phi$  (ولت) و توزیع غلظت شارژ  $\rho_c$  ( $C/m^3$ ) مطابق روابط ۱۸ و ۱۹ به



شکل ۲. شماتیک اجزای مختلف عملگر پلاسما.

مثبت نیروی عمودی به سمت سطح خارجی پره است. جهات مثبت قراردادی در شکل ۱ نیز نشان داده شده است.

$$F_t = -F_x \cos \theta - F_y \sin \theta \quad (7)$$

$$F_n = -F_x \sin \theta + F_y \cos \theta \quad (8)$$

یکی دیگر از مؤلفه‌های نیرو که در بحث واماندگی دینامیکی نیز بسیار مهم است نیروهای برآ و پسا هستند. این دو نیرو به ترتیب عمود و در راستای سرعت نسبی هستند. جهت مثبت نیروی برآ به سمت داخل پره و جهت مثبت نیروی پسا به سمت لبه‌ی فرار پره است (شکل ۱). رابطه‌های ۹ و ۱۰ بیان‌گر ارتباط مقادیر نیروهای برآ و پسا ( $F_l$ ,  $F_d$ ) با نیروهای در راستای محورهای مختصات است که در آن زاویه‌ی حمله‌ی مؤثر بوده و از رابطه‌ی ۶ محاسبه می‌شود.

$$F_l = F_x \sin(\theta - \alpha) - F_y \cos(\theta - \alpha) \quad (9)$$

$$F_d = F_x \cos(\theta - \alpha) + F_y \sin(\theta - \alpha) \quad (10)$$

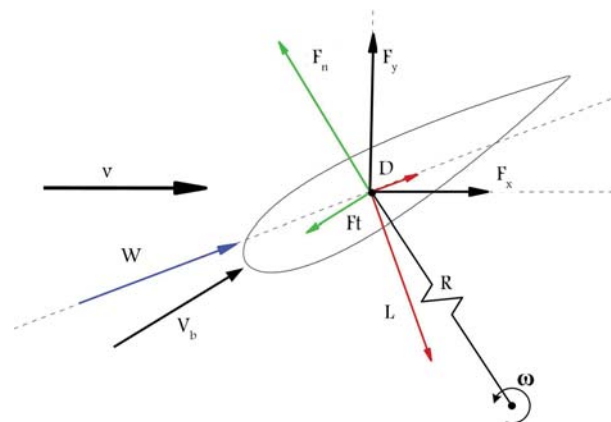
نیروی مماسی مؤثرترین عامل در تولید گشتاور پره در توربین‌های باد محور عمودی است. اما علاوه بر نیروی مماسی، گشتاور ایجاد شده حول نقطه‌ی اتصال پره به بدنه‌ی توربین نیز مؤثر است. گشتاور لحظه‌ی ایجاد شده توسط یک پره ( $M$ ) با استفاده از رابطه‌ی ۱۱ محاسبه می‌شود. در این رابطه  $M_{c.p.}$  گشتاور حول نقطه‌ی اتصال پره است و جهت مثبت قراردادی آن مانند گشتاور کل خلاف عقربه‌های ساعت در نظر گرفته شده است.

$$M = F_t R + M_{c.p.} \quad (11)$$

در رابطه‌ی ۱۱ مقدار  $F_t$  از رابطه‌ی ۷ محاسبه می‌شود. اما با جایگذاری مقدار معادل آن برحسب نیروهای برآ و پسا رابطه‌ی ۱۱ به رابطه‌ی ۱۲ تبدیل می‌شود که در آن جمله‌ی اول نقش نیروی برآ، جمله‌ی دوم نقش نیروی پسا و جمله‌ی سوم نقش گشتاور حول نقطه‌ی اتصال در گشتاور تولیدی پره است.

$$M = F_l R \sin(\alpha) - F_d R \cos(\alpha) + M_{c.p.} \quad (12)$$

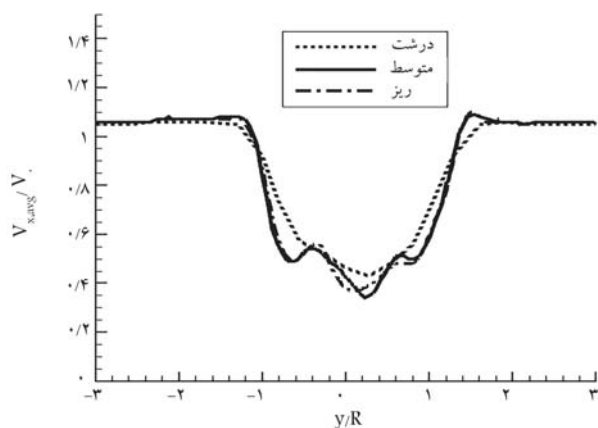
یکای نیروها و گشتاورهای آیرو دینامیکی به ترتیب نیوتن ( $N$ ) و نیوتن‌متر ( $N.m$ ) بوده اما معمولاً به صورت بی بعد بیان می‌شوند. برای بی بعد کردن نیروهای عمودی و مماسی از سرعت باد، شعاع و ارتفاع توربین مطابق روابط ۱۳ و ۱۴ استفاده می‌شود. اما از آنجا که مقادیر ضرایب نیروی برآ، پسا و گشتاور حول نقطه‌ی اتصال برای تحلیل‌های



شکل ۱. شماتیک نیروهای وارد بر پره توربین و جهات مثبت قراردادی.

جدول ۱. مشخصات هندسه‌ی مورد بررسی.

مشخصه	مقدار
ایرفویل پره	NACA ۰۰۲۱
محل اتصال پره به نگهدارنده	۰/۵ وتر ایرفویل
تعداد پره توربین	۳
قطر توربین (m)	۱/۰۲۸
ضریب پری توربین	۰/۲۵
طول وتر ایرفویل (m)	۰/۰۸۵
سرعت دورانی (RPM)	۴۰۰



شکل ۳. استقلال حل از شبکه‌ی محاسباتی در پروفیل سرعت پایین دست توربین.

به منظور بررسی استقلال حل از شبکه‌ی محاسباتی، سه شبکه‌ی درشت، متوسط و ریز به ترتیب با تعداد کل ۵۳۷، ۱۰۶، ۴۴۵ و ۷۰۰، ۷۵۹، ۱،۴۵۱ سلول در نظر گرفته شده است. در شکل ۳، پروفیل نسبت مؤلفه‌ی سرعت محوری میانگین  $(V_{x,avg})$  به سرعت باد  $(V_\infty)$  در فاصله‌ی دو برابر شعاع در پایین دست روتور برای هر سه شبکه نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود تفاوت بین شبکه‌ی متوسط با شبکه‌ی درشت زیاد بوده و در بعضی نقاط به ۲۵ درصد می‌رسد. از طرفی تفاوت شبکه‌ی متوسط با شبکه‌ی ریز در بدترین حالت کم‌تر از حدود ۱۰ درصد است. بنابراین با در نظر گرفتن هزینه‌ی محاسباتی و همچنین دقت محاسباتی، شبکه‌ی متوسط برای این بررسی انتخاب شده است که در آن مقدار  $y^+$  روی سطح ایرفویل کم‌تر از ۱ است. نمایی از شبکه‌ی محاسباتی در نزدیکی سطح ایرفویل در شکل ۴ نمایش داده شده است.

به دلیل ناپایا بودن حل عددی باید استقلال حل از گام زمانی به منظور انتخاب مناسب‌ترین گام زمانی نیز انجام شود. در توربین باد محور عمودی داریوس پدیده‌های حاکم بستگی به نسبت سرعت دورانی دارند، بنابراین گام زمانی بهینه برای نسبت‌های سرعت دورانی مختلف متفاوت است. برای رفع این مشکل به جای بررسی گام زمانی بهینه بهتر است زاویه‌ی پره‌ی روتور در یک گام زمانی طی می‌کند را به عنوان معیار مقایسه انتخاب کرد. به این ترتیب می‌توان ابتدا زاویه‌ی مناسب را تعیین کرد و بعد در هر نسبت سرعت، گام زمانی معادل آن را به دست آورد. برای این منظور سه گام زمانی به ترتیب معادل حرکت پره به اندازه‌ی ۴، ۱ و ۰/۲۵ درجه انتخاب شده است. در شکل ۵ پروفیل نسبت مؤلفه‌ی سرعت محوری به سرعت باد در فاصله‌ی دو برابر شعاع در پایین دست روتور برای گام‌های زمانی مختلف مقایسه شده است. چنان که مشاهده می‌شود گام زمانی معادل حرکت پره به اندازه ۱ درجه از لحاظ هزینه‌ی محاسباتی و همچنین دقت، مناسب است.

دست می‌آید که در آن  $\varepsilon_r$  ضریب نفوذ نسبی و  $\lambda_d$  طول دای برحسب متر است.

$$\nabla \cdot (\varepsilon_r \nabla \phi) = 0 \quad (18)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_r \nabla \rho_c) = \frac{\rho_c}{\lambda_d^2} \quad (19)$$

با فرض این که فقط میدان الکتریکی خارجی باعث اعمال نیرو به ذرات باردار می‌شود و صرف‌نظر از نیروهای مغناطیسی، میدان الکتریکی (ولت‌متر) برابر با گرادیان پتانسیل الکتریکی بوده  $(\vec{E} = -\nabla \phi)$  نیروی حجمی ظاهر شده در معادلات اندازه حرکت سیال (رابطه‌ی ۱۹) توسط معادله‌ی لورنتز محاسبه می‌شود:

$$\vec{f}_b = \rho_c (-\nabla \phi) \quad (20)$$

در این پژوهش با توجه به الزامات ابعاد و فضای داخل ایرفویل پره، عملگر پلاسمای مرجع<sup>[۲۷]</sup> انتخاب شده که در آن الکترودها از جنس مس با ضخامت ۷۰ میکرومتر و طول الکترود محدود ۵ میلی‌متر و طول الکترود آزاد ۲۰ میلی‌متر است. دی‌الکتریک به کار رفته از جنس اکریلیک با ثابت دی‌الکتریک نسبی ۳ بوده و ۳ میلی‌متر ضخامت دارد. با توجه به این که توربین باد در حالت عملکردی خود زوایای حمله‌ی زیاد را تجربه می‌کند (بسته به نسبت سرعت دورانی) جدایش جریان از لبه‌ی حمله اتفاق می‌افتد و در نتیجه مناسب‌ترین حالت کنترلی حالتی است که عملگر در لبه‌ی حمله نصب شده باشد.<sup>[۱۸]</sup>

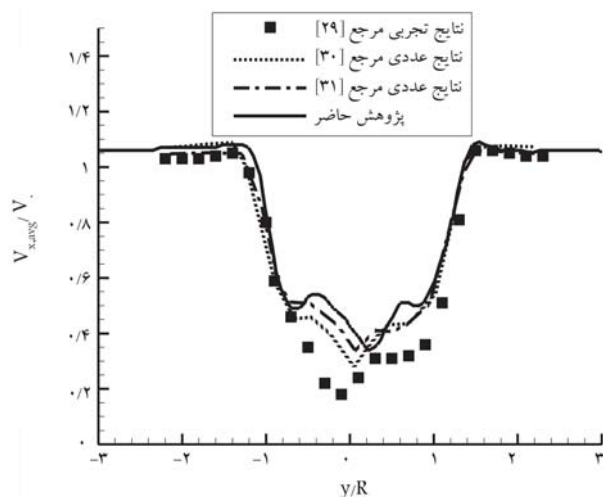
#### ۴. روش حل عددی

در این پژوهش معادلات کامل ناویر-استوکس میانگین‌گیری شده رینولدز (RANS) به صورت ناپایا و تراکم‌ناپذیر استفاده شده است. جمله‌ی تنش رینولدز ظاهر شده در معادلات با استفاده از مدل آشفتگی  $k-\omega$ SST محاسبه شده است.<sup>[۲۸]</sup> دامنه‌ی محاسباتی به دو قسمت ثابت و چرخان تقسیم شده و چرخش توربین با استفاده از روش شبکه‌ی لغزنده<sup>۶</sup> شبیه‌سازی شده

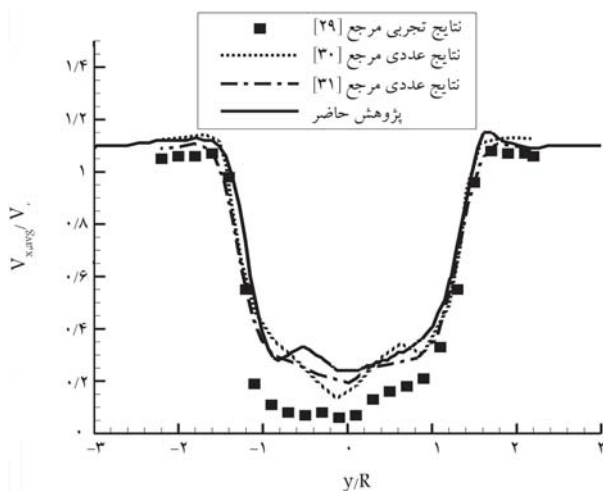
است. حل معادلات جریان به صورت کوپل بوده و گسسته‌سازی معادلات با استفاده از روش مرتبه دوم بالادستی<sup>۷</sup> و پیشروی در زمان با روش ضمنی مرتبه دوم محدود<sup>۸</sup> انجام شده است.

#### ۵. شبکه‌ی محاسباتی و شرایط مرزی

توربین استفاده شده در این پژوهش، توربین داریوس سه‌پره‌ی نوع H مرجع<sup>[۲۹]</sup> است که اطلاعات آن در جدول ۱ ارائه شده است. به منظور شبیه‌سازی این توربین، دامنه‌ی محاسباتی به اندازه‌ی ۱۰ برابر قطر روتور به سمت بالادست، ۲۰ برابر به سمت پایین دست و ۱۰ برابر به سمت اطراف امتداد داده شده تا از عدم وجود اثرات شرایط مرزی بر حل عددی اطمینان حاصل شود. دامنه‌ی محاسباتی به دو بخش چرخان و ثابت تفکیک شده است. بخش چرخان که به منظور اعمال روش شبکه‌ی لغزنده در نظر گرفته شده دایره‌ی به قطر دو برابر قطر توربین است. شرط مرزی بالادست به صورت سرعت ورودی برابر با سرعت باد (۹ متر بر ثانیه)، شرط مرزی پایین دست به صورت فشار خروجی در نظر گرفته شده و برای دیواره‌های دو طرف دامنه‌ی محاسباتی از شرط مرزی تقارن استفاده شده است. روی دیواره‌های ایرفویل نیز شرط مرزی عدم لغزش اعمال شده که باعث می‌شود سرعت جریان در مجاورت سطح، برابر با سرعت حرکت پره باشد.



شکل ۶. مقایسه‌ی پروفیل سرعت میانگین دنباله برای نسبت سرعت دورانی ۲/۴.

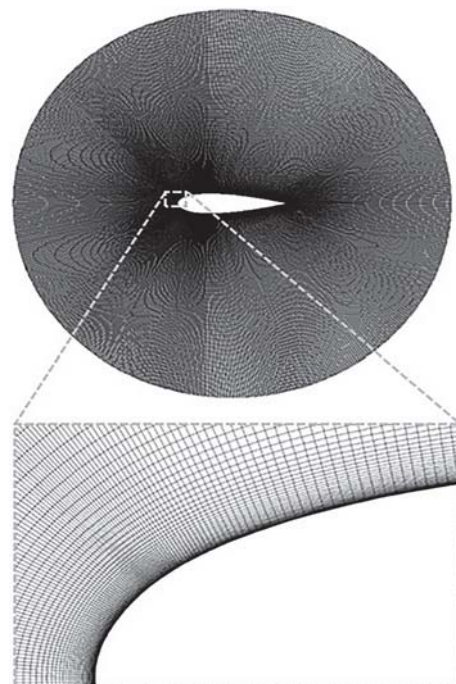


شکل ۷. مقایسه‌ی پروفیل سرعت میانگین دنباله برای نسبت سرعت دورانی ۳/۳.

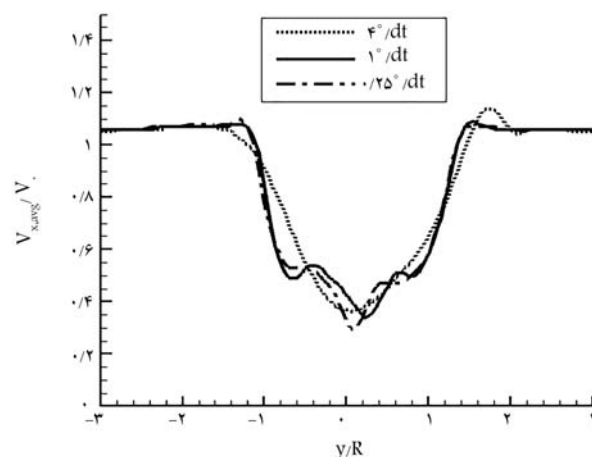
نشده است. نگهدارنده‌های پره باعث ایجاد دنباله و افت انرژی بیشتر و در نتیجه کاهش سرعت می‌شوند.<sup>[۳۲]</sup> همچنین اثرات تلفات نوک پره در مدل سه‌بعدی باعث اتلاف بیشتر انرژی و کاهش سرعت در دنباله‌ی توربین، به‌ویژه در نسبت سرعت دورانی بالا می‌شود.<sup>[۳۳]</sup>

## ۲.۶. اعتبارسنجی مدل عملگر پلاسما

به‌منظور اطمینان از درستی مدل‌سازی عملگر پلاسما، شبیه‌سازی عملگر روی صفحه‌ی تخت و در هوای ساکن صورت گرفته و نتایج حاصل با فعالیت‌های عددی مشابه<sup>[۳۲،۳۶]</sup> مقایسه شده است. هندسه‌ی انتخاب شده برای این بررسی شامل دو الکتروتود مستطیلی به طول ۱۰ میلی‌متر و با ضخامت ۰/۱۰۲ میلی‌متر و فاصله‌ی ۰/۵ میلی‌متر از هم است. دی‌الکتریک به ضخامت ۰/۱۲۷ میلی‌متر از جنس کاپتون با ضریب نفوذپذیری ۲/۷ و الکتروتود را از هم جدا کرده است. الکتروتود بیرونی در تماس با هواست که الکتروتود آزاد نام دارد و الکتروتود دیگر در تماس با ماده‌ی دی‌الکتریک است که الکتروتود محدود نامیده می‌شود. شماتیک و ابعاد این هندسه در شکل ۸ آمده است. پس از بررسی استقلال حل از دامنه‌ی محاسباتی، ابعاد دامنه‌ی محاسباتی برابر با ۸ سانتی‌متر در نظر گرفته شده و الکتروتودها در وسط مربع



شکل ۴. نمایی نزدیک از شبکه‌ی محاسباتی در نزدیکی ایرفویل.



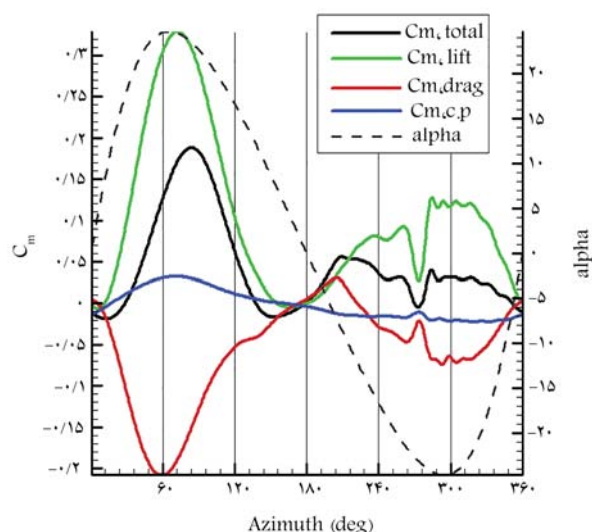
شکل ۵. استقلال حل از گام زمانی در پروفیل سرعت پایین‌دست توربین.

## ۶. اعتبارسنجی

### ۱.۶. اعتبارسنجی توربین باد محور عمودی

اعتبارسنجی حل عددی با مقایسه‌ی مقادیر عددی پژوهش حاضر با نتایج تجربی<sup>[۲۹]</sup> و نتایج عددی<sup>[۳۱،۳۰]</sup> برای توربین باد بدون عملگر پلاسما انجام شده است. پروفیل اندازه‌ی سرعت میانگین دنباله‌ی توربین در فاصله‌ی دوبرابر شعاع در پایین‌دست روتور به ترتیب برای نسبت سرعت دورانی ۲/۴ و ۳/۳ در شکل‌های ۶ و ۷ با نتایج عددی و تجربی مقایسه شده است. در هر دو شکل تطابق بسیار خوبی بین نتایج عددی پژوهش حاضر و نتایج عددی دیگر مراجع<sup>[۳۱،۳۰]</sup> مشاهده می‌شود. هر سه پروفیل سرعت در نتایج عددی، روندی مطابق نتایج تجربی را طی می‌کنند اما مقدارشان نسبت به مقدار تجربی بیشتر است. این اختلاف بدان سبب است که شبیه‌سازی‌های عددی به‌صورت دوبعدی بوده و اثرات نگهدارنده‌های پره لحاظ



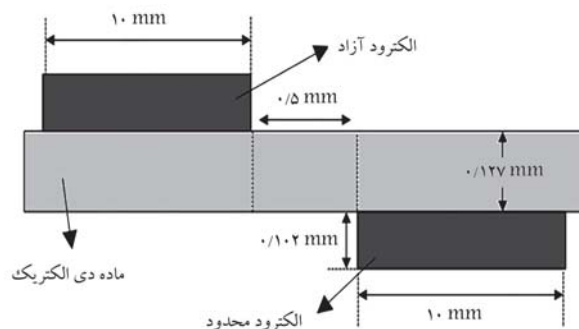


شکل ۹. نقش نیروهای برآ، پسا و گشتاور حول نقطه‌ی اتصال در یک دوران پره.

گشتاور ناشی از نیروی برآ توسط گشتاور مخالف نیروی پسا مستهلک می‌شود. گشتاور حول نقطه‌ی اتصال نیز تأثیر منفی بر گشتاور تولیدی ناشی از نیروی برآ دارد ولی مقدار آن کم‌تر از ۲ درصد گشتاور کل است. بنابراین به طور کلی می‌توان گفت نیروی برآ عامل اصلی تولید گشتاور در توربین باد داریوس بوده که نیروی پسا و گشتاور حول نقطه‌ی اتصال با آن مقابله می‌کنند.

به‌منظور بررسی تغییرات گشتاور تولیدی توربین با دوران و تغییر زاویه پره، گشتاور کل ایجاد شده برای یک پره برای نسبت سرعت دورانی ۲/۴ در شکل ۹ رسم شده است (نمودار مشکی رنگ). همچنین گشتاور ناشی از نیروی برآ با رنگ سبز، نیروی پسا با رنگ قرمز و گشتاور حول نقطه‌ی اتصال با رنگ آبی در کنار زاویه‌ی حمله‌ی نظری (محاسبه شده از رابطه‌ی ۶) نشان داده شده است. بیشتر گشتاور تولیدی توسط پره در ناحیه‌ی بالادست حرکت پره (یعنی زاویه‌ی پره صفر تا ۱۸۰ درجه) ایجاد می‌شود. با افزایش زاویه‌ی حمله مقادیر نیروهای برآ و پسا نیز افزایش می‌یابد تا در نهایت بیشترین زاویه‌ی حمله و همچنین بیشینه‌ی نیروها و گشتاورهای آیرودینامیکی در زاویه‌ی پره حدود ۷۰ تا ۹۰ درجه رخ دهد. در این ناحیه گشتاور حول نقطه‌ی اتصال مثبت شده و تا ۲۵ درصد از گشتاور کل را ایجاد می‌کند. بیشینه‌ی زاویه‌ی حمله‌ی مؤثر پره در این ناحیه حدود ۲۵ درجه است. این مقدار از زاویه و اماندگی استاتیکی ایرفویل پره NACA۰۰۲۱ که در اعداد رینولدز متوسط (حدود ۸۰,۰۰۰ تا ۱۵۰,۰۰۰) برابر ۱۳ درجه است [۲۵] بسیار بزرگ‌تر بوده که نشان‌دهنده‌ی وقوع پدیده‌ی وماندگی دینامیکی است. در پدیده‌ی وماندگی دینامیکی حرکت رو به بالای پره<sup>۹</sup> باعث می‌شود گردابه‌ی سطح مکش به سطح چسبیده و وماندگی پره در زاویه‌ی بالاتر از زاویه‌ی وماندگی استاتیکی آن رخ دهد. [۲۶]

به‌منظور مشاهده‌ی پدیده‌های وماندگی دینامیکی در توربین باد، کانترورنیسیته در زوایای مختلف پره از ۱۶۰ تا ۱۸۰ درجه در شکل ۱۰ نشان داده شده است. همچنین مقادیر ضرایب نیروی برآ، پسا و گشتاور لحظه‌ی حول نقطه‌ی اتصال برحسب زاویه‌ی حمله‌ی مؤثر در شکل ۱۱ رسم شده است. پس از رسیدن پره به بیشترین زاویه‌ی حمله، فاز حرکت رو به پایین<sup>۱۰</sup> پره با کاهش زاویه‌ی حمله شروع می‌شود. در این فاز گردابه با جهت پادساعت‌گرد که روی سطح مکش شکل گرفته، شروع به تقویت و بزرگ‌تر شدن کرده و در زاویه‌ی پره ۱۴۰ درجه (معادل زاویه‌ی حمله‌ی مؤثر حدود ۱۰ درجه) از سطح فاصله گرفته و شروع به جدا شدن



شکل ۸. ابعاد الکتروودهای عملگر پلاسمای استفاده شده برای اعتبارسنجی.

جدول ۲. مقایسه‌ی نیروی حجمی بی بعد بیشینه و سرعت القایی بیشینه، حاصل از پژوهش حاضر با سایر مراجع.

مشخصه	پژوهش حاضر	مرجع [۳۴]	مرجع [۲۶]	درصد اختلاف
نیروی حجمی بی بعد بیشینه	۱۴۰۶	۱۴۴۴	۱۲۵۰	۱۱٪
سرعت القایی بیشینه	۰/۹۲۷	۰/۹۳۴	۱/۰	۷٪

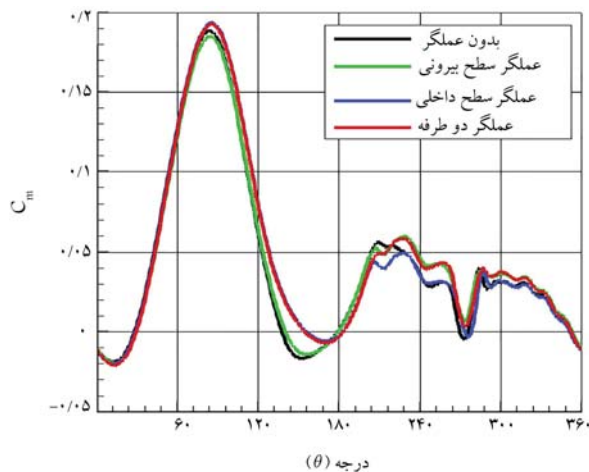
حاصل قرار داده شده‌اند. شبکه‌ی سازمان یافته درون این میدان تولید شده که تمرکز سلول‌ها در نزدیکی لبه‌های مجاور الکتروودها بیشتر است. با بررسی استقلال حل از شبکه‌ی محاسباتی، شبکه‌ی بی با تعداد کل ۱۷۴۸۰۰ سلول انتخاب شده که در نزدیکی سطح، ارتفاع کوچک‌ترین سلول حدود ۴ میکرومتر است. ارتفاع نزدیک‌ترین سلول به سطح باید از طول دمای کم‌تر باشد تا اثرات تشکیل جت پلازما به خوبی شبیه‌سازی شود. با توجه به مقادیر موجود، [۲۶] طول دمای ۱۰۰ میکرومتر و بیشینه غلظت شارژ ۸۰۰۰۰ کولمب بر مترمکعب است (معادل ولتاژ اعمالی به الکتروودها ۵ کیلوولت) که نشان می‌دهد تعداد کافی سلول در ناحیه‌ی طول دمای قرار گرفته است.

در جدول ۲ نیز، بیشینه‌ی نیروی حجمی بی بعد و بیشینه‌ی سرعت القایی، حاصل از مدل‌سازی حاضر با داده‌های مشابه بوجمال [۳۴] و سوزن و همکارانش [۲۶] مقایسه شده است که نشان می‌دهد مقدار خطای حل حاضر با سایر نتایج در بدترین حالت کم‌تر از ۱۰ درصد بوده که مقدار قابل قبولی است.

## ۷. نتایج و بحث

### ۷.۱. فیزیک جریان بدون عملگر پلازما

یکی از مشخصه‌های اصلی آیرودینامیک توربین باد محوری عمودی داریوس وجود پدیده‌های به‌شدت ناپایاست که عوامل مختلفی بر آن تأثیرگذار بوده و رفتار آن‌ها با تغییر زاویه پره نیز عوض می‌شود. گشتاور کل ایجاد شده در هر زاویه‌ی پره مطابق رابطه‌ی ۱۱ ناشی از سه عامل نیروی برآ، نیروی پسا و گشتاور حول نقطه‌ی اتصال است. با میانگین‌گیری از رابطه‌ی ۱۱ برای دوران کامل یک پره از سه پره‌ی توربین، نتایج حل عددی ضریب گشتاور میانگین ناشی از یک پره در نسبت سرعت دورانی ۲/۴ (معادل سرعت باد ۹ متر بر ثانیه) را برابر با ۰/۴۳ نشان می‌دهد. نقش نیروی برآ در این گشتاور برابر ۰/۱۰۲+، نقش نیروی پسا برابر ۰/۵۷- و نقش گشتاور حول نقطه‌ی اتصال برابر ۰/۰۲- است. همان‌طور که نتایج نشان می‌دهد و از قبل نیز انتظار می‌رفت، عمده‌ی گشتاور تولیدی ناشی از نیروی برآست. بیش از ۵۰ درصد



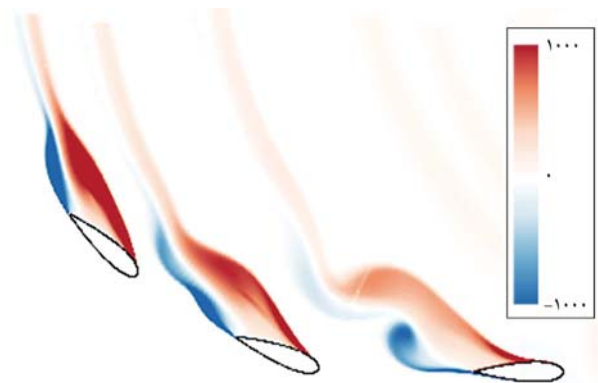
شکل ۱۲. تأثیر چیدمان نصب عملگر روی ضریب گشتاور لحظه‌یی.

گردابه پادساعت‌گرد سطح مکش شده و به کاهش نیروی پسا کمک کند. از طرفی با نصب عملگر روی سطح بیرونی گردابه کارمن معکوس تقویت شده و نیروی پیشران بیشتری تولید می‌کند.

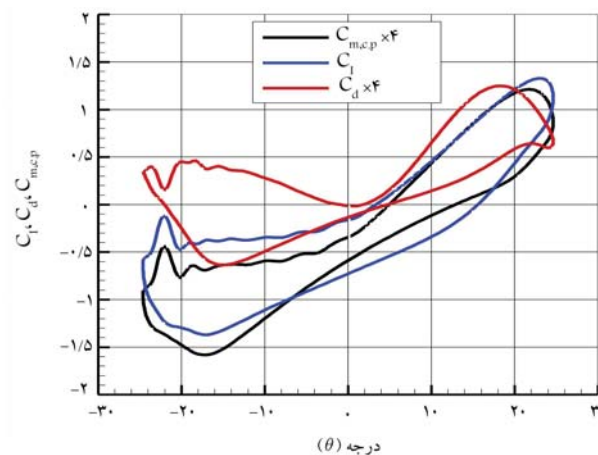
## ۲.۷. اثر عملگر پلاسما

به منظور بررسی پارامتری اثر محل قرارگیری عملگر پلاسما بر روی عملکرد توربین، سه حالت مختلف قرارگیری عملگرها در نظر گرفته شده و با حالت بدون عملگر مقایسه شده است. این حالت‌ها به ترتیب عبارت‌اند از نصب عملگر روی سطح بیرونی، نصب عملگر روی سطح داخلی و نصب دو عملگر به صورت همزمان روی هر دو سطح. ضریب توان کل توربین برای حالت بدون عملگر، عملگر بیرونی، درونی و دوطرفه به ترتیب برابر  $0/31$ ،  $0/32$ ،  $0/34$  و  $0/34$  محاسبه شد که نشان‌گر افزایش حدود  $10\%$  درصدی برای دو حالت درونی و دوطرفه نسبت به حالت بدون عملگر است.

به منظور شناخت نحوه‌ی اثرگذاری عملگر پلاسما، ضریب گشتاور لحظه‌یی یک پره در طول یک دور کامل دوران در نسبت سرعت دورانی  $2/4$  (معادل بیشینه‌ی ضریب توان توربین) برای هر سه حالت در شکل ۱۲ با حالت بدون عملگر مقایسه شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود عملگر دوطرفه به طور کلی مقدار گشتاور را افزایش داده است و مقدار گشتاور آن در ناحیه‌ی بالادست حرکت پره (زوایای دوران صفر تا  $180^\circ$  درجه) نزدیک به عملگر درونی و در ناحیه‌ی پایین دست حرکت پره (زوایای  $180^\circ$  تا  $360^\circ$  درجه) نزدیک به عملگر بیرونی است. در زاویه‌ی پره بین صفر تا  $180^\circ$  درجه پدیده‌های مربوط به واماندگی دینامیکی از جمله تشکیل گردابه پادساعت‌گرد روی سطح داخلی پره اتفاق می‌افتد. در ناحیه‌ی پایین‌دست حرکت پره این پدیده‌ها در سطح بیرونی اتفاق می‌افتد. جت تشکیل شده توسط عملگر پلاسما باعث کوچک‌تر شدن گردابه‌ی تولید شده و در نتیجه جدایش جریان ناشی از آن می‌شود. بنابراین عملگر سطح درونی در ناحیه‌ی بالادست حرکت و عملگر بیرونی در ناحیه‌ی پایین‌دست حرکت، مؤثر است (شکل ۱۲). همچنین، عملگر دوطرفه باعث کنترل جدایش به طور همزمان در کل دوران پره خواهد شد. برای درک بهتر نحوه‌ی کنترل جدایش جریان توسط عملگر پلاسما، شکل ۱۳ کانتور ورتیسیته را برای دو حالت بدون عملگر پلاسما و عملگر پلاسمای سطح درونی نشان می‌دهد. همان‌طور که در این شکل دیده می‌شود عملگر پلاسما



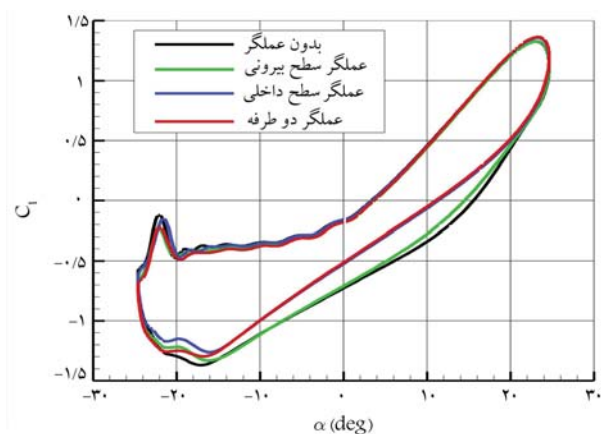
شکل ۱۰. فیزیک واماندگی دینامیکی در کانتور ورتیسیته.



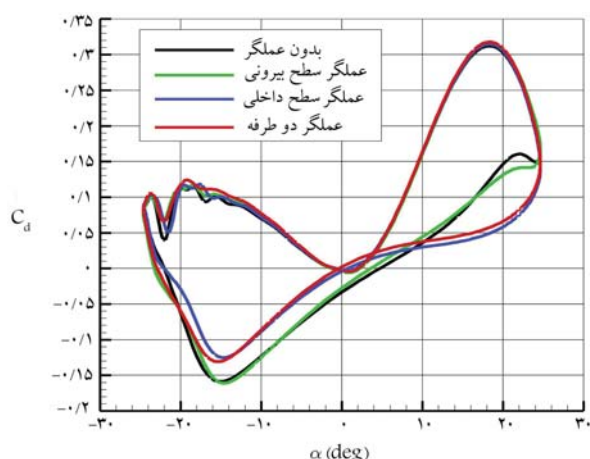
شکل ۱۱. ضرایب نیروی برآ، پسا و گشتاور حول نقطه اتصال بر حسب زاویه‌ی حمله مؤثر.

می‌کند. همین عامل باعث رول شدن لایه‌ی برشی لبه‌ی فرار شده و موجب تولید و تقویت گردابه‌ی دوم با جهت ساعت‌گرد می‌شود. در همین حال نیروی برآ کاهش یافته و نیروی پسا افزایش مجددی خواهد داشت که در شکل ۱۱ مشهود است. در ادامه با کاهش بیشتر زاویه‌ی حمله، گردابه‌ی پادساعت‌گرد از سطح جدا شده و باعث می‌شود مقدار نیروی پسا کاهش یابد. همان‌طور که در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود در زاویه‌ی پره  $180^\circ$  درجه گردابه‌ی ساعت‌گرد به طور کامل شکل گرفته و گردابه‌ی پادساعت‌گرد رو به اضمحلال است. وجود گردابه‌ی ساعت‌گرد وقتی به سمت سطح مکش پره باشد باعث ایجاد نیروی پسای منفی یا به عبارتی نیروی پیشران می‌شود. تولید نیروی پیشران توسط این گردابه (موسوم به «گردابه‌ی کارمن معکوس») توسط سایر پژوهش‌گران نیز مشاهده و گزارش شده است. [۲۷، ۲۸] وجود نیروی پسای منفی در شکل ۱۱ در زاویه‌ی حمله‌ی مؤثر صفر تا  $10^\circ$  درجه مشهود است. همچنین در شکل ۹ نیز در زاویه‌ی پره حدود  $170^\circ$  تا  $220^\circ$  درجه نیروی پسا، تولید گشتاور مثبت کرده که به دلیل وجود پدیده‌ی گردابه‌ی کارمن معکوس است.

پدیده‌ی واماندگی دینامیکی در زاویه‌ی پره حدود  $130^\circ$  تا  $180^\circ$  درجه باعث کاهش شدید نیروی برآ و افزایش نیروی پسا می‌شود به طوری که گشتاور تولیدی کل در این ناحیه مطابق شکل ۹، منفی شده و باید توسط سایر پره‌ها جبران شود. با توجه به شناخت صورت گرفته از فیزیک جریان، می‌توان پیش‌بینی کرد در صورتی که عملگر پلاسمای سطح داخلی وجود داشته باشد جت تشکیل شده باعث تضعیف



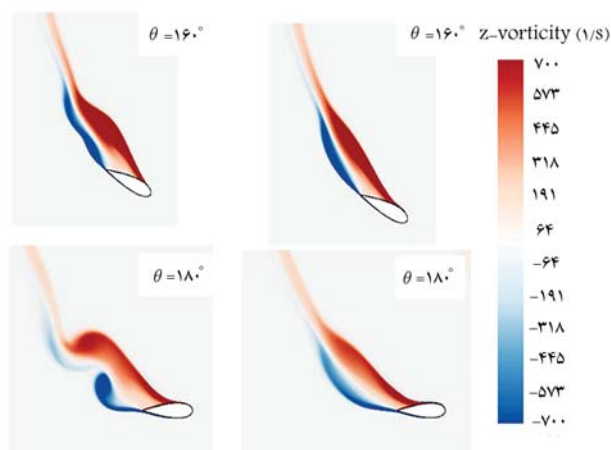
شکل ۱۴. تأثیر چیدمان نصب عملگر بر روی ضریب برای لحظه‌یی.



شکل ۱۵. تأثیر چیدمان نصب عملگر روی ضریب پسای لحظه‌یی.

داده شده است؛ چنان که مشاهده می‌شود مقادیر آن تقریباً بر حالت عملگر دوطرفه منطبق است. از زاویه‌ی حمله ۸- درجه (زاویه پره حدود ۲۰۰ درجه) به بعد کارایی عملگر سطح داخلی کاهش یافته و مقدار ضریب نیروی برای آن بر حالت بدون عملگر منطبق می‌شود. دلیل این امر قرارگیری پره در ناحیه‌ی پایین دست است که با منفی شدن زاویه‌ی حمله‌ی سطح مکش از سطح داخلی پره به سطح خارجی منتقل می‌شود. در این شرایط تشکیل گردابه در سطح خارجی افتاده و در سطح داخلی جریان کاملاً چسبیده به سطح خواهد بود و عملگر پلاسما‌ی سطح داخلی، کارایی خود را از دست می‌دهد. از این زاویه به بعد عملگر سطح بیرونی باعث افزایش مقدار نیروی برآ شده (البته نیروی برآ در این ناحیه به دلیل منفی بودن زاویه‌ی حمله منفی است اما باعث ایجاد گشتاور مثبت می‌شود) که مقدار آن منطبق بر عملگر دوطرفه است.

با مشاهده‌ی نمودار ضریب پسا مربوط به حالت بدون عملگر در شکل ۱۵ دیده می‌شود که با شروع فاز حرکت رو به پایین پره با کاهش زاویه‌ی حمله از ۲۵ درجه نیروی پسا نیز روندی کاهشی داشته است. در زاویه‌ی حمله حدود ۱۵ درجه (معادل زاویه پره ۱۶۰ درجه) این روند معکوس شده و نیروی پسا مجدداً شروع به افزایش می‌کند. دلیل این افزایش، بزرگ‌تر شدن گردابه‌ی پادساعت‌گرد در سطح مکش است. در حالتی که عملگر پلاسما در سطح داخلی (که در این زاویه پره معادل سطح مکش است) فعال است گردابه‌ی پادساعت‌گرد ضعیف شده و باعث کاهشی شدن روند نیروی پسا در حرکت رو به پایین پره می‌شود.



شکل ۱۳. خطوط هم‌تراز ورتیسسته برای حالت بدون عملگر (سمت چپ) و عملگر سطح درونی (سمت راست) برای دو زاویه‌ی پره مختلف.

باعث شده نقطه‌ی شروع لایه‌ی برشی لایه‌ی حمله در هر دو زاویه پره ۱۶۰ و ۱۸۰ درجه به سمت لایه‌ی فرار حرکت کند و در نتیجه‌ی آن، گردابه‌ی پادساعت‌گرد کوچک‌تر و ضعیف‌تر شده است. وجود گردابه‌ی پادساعت‌گرد در سطح مکش پره باعث کاهش برآ و افزایش پسا می‌شود. عملگر پلاسما با ضعیف کردن این گردابه باعث کم‌تر شدن میزان پسا، افزایش برآ و در نتیجه میزان گشتاور تولیدی پره شده است.

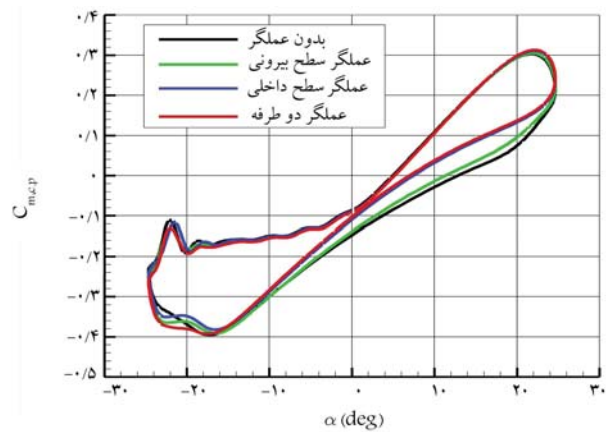
به‌منظور بررسی دقیق اثر عملگر پلاسما بر پدیده واماندگی دینامیکی مقادیر ضرایب نیروی برآ، پسا و گشتاور لحظه‌یی حول نقطه اتصال بر حسب زاویه‌ی حمله‌ی مؤثر به ترتیب در شکل‌های ۱۴ تا ۱۶ در سه حالت مختلف قرارگیری عملگر با حالت بدون عملگر مقایسه شده است. در هر سه شکل دیده می‌شود که در مسیر حرکت رو به بالای پره که معادل افزایش زاویه‌ی حمله است (زاویه‌ی پره صفر تا ۱۱۵ درجه و ۲۴۵ تا ۳۶۰ درجه برای نسبت سرعت دورانی ۲/۴) هیچ‌کدام از چیدمان‌های عملگر پلاسما تأثیری بر نیروها و گشتاورهای آیرودینامیکی نداشته است. دلیل عدم تأثیر عملگر پلاسما در این نواحی این است که در حرکت رو به بالای پره، ورتیسسته تولیدی و ریزش آن روی سطح مکش مانع جدا شدن جریان از سطح بالا می‌شود (همین عامل باعث بالاتر بودن زاویه‌ی واماندگی دینامیکی نسبت به واماندگی استاتیکی است). در جریان چسبیده عملگر پلاسما کارایی اصلی خود را که حذف ناحیه‌ی جدایش جریان است از دست می‌دهد. بنابراین می‌توان عملگر کنترلی را در این ناحیه غیرفعال کرد تا در مصرف انرژی صرفه جویی شود. اما در ناحیه‌ی حرکت رو به پایین پره که در نسبت سرعت دورانی ۲/۴ از زاویه‌ی حمله حدود ۲۵ درجه شروع شده و تا زاویه‌ی حمله ۲۵- درجه ادامه می‌یابد (زاویه‌ی پره ۱۱۵ تا ۲۴۵ درجه) عملگر پلاسما تأثیر زیادی بر روی نیروها و گشتاورهای آیرودینامیکی داشته است. به طور کلی عملگر سطح بیرونی تأثیر چشمگیری نداشته ولی عملگر سطح داخلی باعث تغییر ساختار جریان و همچنین بهبود آیرودینامیک پره شده است. همچنین عملگر دوطرفه اگرچه باعث بهبود بیشتری نسبت به عملگر سطح داخلی می‌شود اما در بیشتر نقاط، نیروهای و گشتاورهای آیرودینامیکی این دو حالت بر هم منطبق‌اند.

در شکل ۱۴ افزایش مقدار ضریب نیروی برآ در اثر وجود عملگر سطح داخلی برای فاز حرکت رو به پایین پره با کاهش زاویه‌ی حمله از ۲۵ درجه تا ۸- درجه نشان

بدون تأثیر بوده و در نتیجه گشتاور کل تولیدی نیز همان طور که در شکل ۱۲ دیده می شود تغییری نمی کند. در ناحیه ی بالادست فاز حرکت رو به پایین پره یعنی زوایای پره ۱۱۵ تا ۱۸۰ درجه، اثرات عملگر پلاسمای سطح داخلی بر روی نیروی برآ و پسا عامل اصلی و تأثیرگذار بر گشتاور کل بوده است. مهم ترین دستاورد استفاده از عملگر پلاسمای نیز در این ناحیه رخ داده که باعث شده با کاهش اثرات منفی واماندگی دینامیکی گشتاور منفی تولیدی در زاویه پره حدود ۱۵۰ درجه تا حد زیادی حذف شود. در ناحیه ی پایین دست فاز حرکت رو به پایین در زوایای پره ۱۸۰ تا ۲۴۵ درجه اثرات عملگر پلاسمای سطح خارجی بر ضرایب نیروی برآ و پسا، عامل تأثیرگذار بر افزایش گشتاور کل تولیدی است. البته در ناحیه ی پایین دست به دلیل کوچک بودن مقادیر نیروهای برآ و پسا، گشتاور حول نقطه اتصال نیز اهمیت پیدا کرده و باعث استهلاک درصد قابل توجهی از گشتاور تولیدی توسط نیروی برآ می شود.

## ۸. نتیجه گیری

در این پژوهش، کنترل فعال جریان در توربین بادی محور عمودی داریوس به وسیله عملگر پلاسمای به صورت عددی ارزیابی شد. از روش حجم محدود فشار مبتنی و مدل عملگر پلاسمای سوزن - هوانگ استفاده شد. ابتدا شناخت کاملی نسبت به پدیده ی واماندگی دینامیکی در حالت بدون عملگر صورت گرفت. نتایج نشان داد گشتاور حول نقطه ی اتصال می تواند تا ۲۵ درصد در ناحیه ی بالادست و تا ۵۰ درصد در ناحیه ی پایین دست بر گشتاور لحظه یی پره اثرگذار باشد؛ اما مجموع گشتاور ایجاد شده توسط آن کم تر از ۲ درصد گشتاور کل پره است. همچنین وجود گردابه پادساعت گرد روی سطح مکش به عنوان عامل تأثیرگذار بر ساختار جریان تشخیص داده شد که می توان با کنترل آن عملکرد توربین را تحت تأثیر قرار داد. عملگر پلاسمای باعث کنترل این گردابه شد به طوری که باعث افزایش برآ و کاهش پسا در فاز حرکت رو به پایین پره شد. اما در فاز حرکت رو به بالا به دلیل چسبیده بودن جریان، عملگر پلاسمای کارایی خود را از دست داده و تأثیری بر ساختار جریان و گشتاور تولیدی ندارد. در زوایای پره ۱۱۵ تا ۱۸۰ درجه، عملگر پلاسمای سطح داخلی و در زوایای پره ۱۸۰ تا ۲۴۵ درجه عملگر پلاسمای سطح خارجی مؤثر بوده است. در نهایت عملگر سطح داخلی و دوطرفه باعث افزایش توان خروجی تا ۱۰ درصد شده اما عملگر سطح بیرونی تغییر قابل ملاحظه یی در توان خروجی ایجاد نکرده است.



شکل ۱۶. تأثیر چیدمان نصب عملگر بر روی ضریب گشتاور لحظه یی حول نقطه اتصال.

کوچک تر شدن گردابه ی پادساعت گرد باعث کوچک تر شدن گردابه ی کارمن معکوس می شود و مقدار پسای منفی یا نیروی پیشران نیز کاهش می یابد. در حالت بدون عملگر و عملگر فعال روی سطح بیرونی، بیشینه نیروی پسای منفی برابر ۱۶٪ بوده در صورتی که در حالت عملگر داخلی یا دوطرفه فعال، این مقدار به ۱۲٪ می رسد.

نمودار ضریب گشتاور حول نقطه اتصال که در شکل ۱۶ نشان داده شده برای فاز حرکت رو به پایین پره از زاویه ی حمله ۲۵ تا ۸- درجه روندی شبیه به ضریب نیروی برآ را نشان می دهد. مقدار گشتاور مثبت تولیدی در اثر وجود عملگر پلاسمای سطح داخلی و عملگر دو طرفه افزایش می یابد. از زاویه ی حمله ۸- درجه به بعد نیز مانند روند مشاهده شده در نمودار ضریب برآ، ضریب گشتاور حول نقطه اتصال عملگر سطح داخلی منطبق بر حالت بدون عملگر است. عملگر سطح بیرونی و دو طرفه در زوایای حمله کم تر از ۸- درجه باعث افزایش مقدار گشتاور منفی تولیدی شده و از این طریق اثر نامطلوب بر تولید گشتاور کل پره خواهند داشت.

در مجموع اثر هر سه پارامتر نیروی برآ، نیروی پسا و گشتاور حول نقطه ی اتصال مطابق رابطه ی ۱۲ باعث ایجاد گشتاور کل حول یک پره توربین می شود. در فاز حرکت رو به بالای پره عملگر پلاسمای بر روی نیروها و گشتاورهای آیرودینامیکی

## پانویس ها

1. Gurney Flap
2. Buzzing
3. Particle Image Velocimetry (PIV)
4. Feed-Forward
5. Shyy
6. Sliding Mesh
7. Upwind

8. Bounded Second Order Implicit
9. Up-Stroke
10. Down-Stroke

## منابع (References)

1. Wang, Y., Sun, X., Dong, X. and et al. "Numerical investigation on aerodynamic performance of a novel vertical

- axis wind turbine with adaptive blades", *Energy Convers. Manag.*, **108**, pp. 275-286 (Jan 2016).
2. Wekesa, D.W., Wang, C., Wei, Y. and et al. "A numerical analysis of unsteady inflow wind for site specific vertical axis wind turbine: a case study for marsabit and garissa in Kenya", *Renew. Energy*, **76**, pp. 648-661 (Apr 2015).
3. Sagharichi, A., Maghrebi, M.J. and ArabGolarcheh, A. "Variable pitch blades: an approach for improving performance of darrieus wind turbine", *J. Renew. Sustain. Energy*, **8**(5), p. 053305, (Sep 2016).
4. Zhong, J., Li, J., Guo, P. and et al. "Dynamic stall control on a vertical axis wind turbine aerofoil using leading-edge rod", *Energy*, **174**, pp. 246-260 (2019).
5. Buchner, A.J., Soria, J., Honnery, D. and et al. "Dynamic stall in vertical axis wind turbines: scaling and topological considerations", *J. Fluid Mech.*, **841**, pp. 746-766 (2018).
6. Rezaeiha, A., Montazeri, H. and Blocken, B. "CFD analysis of dynamic stall on vertical axis wind turbines using scale-adaptive simulation (SAS): comparison against URANS and hybrid RANS/LES", *Energy Convers. Manag.*, **196**, pp. 1282-1298 (2019).
7. Collis, S.S., Joslin, R.D., Seifert, A. and et al. "Issues in active flow control: theory, control, simulation, and experiment", *Prog. Aerosp. Sci.*, **40**, (4-5), pp. 237-289 (2004).
8. Mai, H., Dietz, G., Geißler, W. and et al. "Dynamic stall control by leading edge vortex generators", *J. Am. Helicopter Soc.*, **53**(1), p. 26 (2008).
9. Choudhry, A., Arjomandi, M. and Kelso, R. "Methods to control dynamic stall for wind turbine applications", *Renew. Energy*, **86**, pp. 26-37 (Feb 2016).
10. Joo, W., Lee, B.-S., Yee, K. and et al. "Combining passive control method for dynamic stall control", *J. Aircr.*, **43**, (4), pp. 1120-1128 (Jul 2006).
11. Karim, M.A. and Acharya, M. "Suppression of dynamic-stall vortices over pitching airfoils by leading-edge suction", *AIAA J.*, **32**(8), pp. 1647-1655 (Aug 1994).
12. Müller-Vahl, H.F., Nayeri, C.N., Paschereit, C.O. and et al. "Dynamic stall control via adaptive blowing", *Renew. Energy*, **97**, pp. 47-64 (Nov 2016).
13. Park, Y.W., Lee, S.-G., Lee, D.-H. and et al. "Stall control with local surface buzzing on a NACA 0012 Airfoil", *AIAA J.*, **39**(7), pp. 1400-1402 (Jul 2001).
14. Yen, J. and Ahmed, N.A. "Enhancing vertical axis wind turbine by dynamic stall control using synthetic jets", *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.*, **114**, pp. 12-17 (Mar 2013).
15. Post, M.L. and Corke, T.C. "Separation control using plasma actuators: dynamic stall vortex control on oscillating airfoil", *AIAA J.*, **44**(12), pp. 3125-3135 (Dec 2006).
16. Velasco, D., López Mejia, O. and Lain, S. "Numerical simulations of active flow control with synthetic jets in a darrieus turbine", *Renew. Energy*, **113**, pp. 129-140 (Dec 2017).
17. Zhu, H., Hao, W., Li, C. and et al. "Simulation on flow control strategy of synthetic jet in an vertical axis wind turbine", *Aerosp. Sci. Technol.*, **77**, pp. 439-448 (Jun 2018).
18. Greenblatt, D., schulman, M. and Ben-Harav, A. "Vertical axis wind turbine performance enhancement using plasma actuators", *Renew. Energy*, **37**(1), pp. 345-354 (Jan 2012).
19. Greenblatt, D., Ben-Harav, A. and Mueller-Vahl, H. "Dynamic stall control on a vertical-axis wind turbine using plasma actuators", *AIAA J.*, **52**(2), pp. 456-462 (Feb 2014).
20. Ben-Harav, A. and Greenblatt, D. "Plasma-based feed-forward dynamic stall control on a vertical axis wind turbine", *Wind Energy*, **19**(1), pp. 3-16 (Jan 2014).
21. Greenblatt, D. and Lautman, R. "Inboard/outboard plasma actuation on a vertical-axis wind turbine", *Renew. Energy*, **83**, pp. 1147-1156 (Nov 2015).
22. Ma, L., Wang, X., Zhu, J. and et al. "Dynamic stall of a vertical-axis wind turbine and its control using plasma actuation", *Energies*, **12**(19), p. 3738 (Sep 2019).
23. Mohamed, O.S., Elbaz, A.M.R. and Bianchini, A. "A better insight on physics involved in the self-starting of a straight-blade darrieus wind turbine by means of two-dimensional computational fluid dynamics", *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.*, **218**, p. 104793 (Nov 2021).
24. Du, L. "Numerical and experimental investigations of darrieus wind turbine start-up and operation", University of Durham, Phd Thesis, Ann Arbor (2015).
25. Greenblatt, D. and Wygnanski, I. "Dynamic stall control by periodic excitation, part 1: NACA 0015 parametric study", *J. Aircr.*, **38**(3), pp. 430-438 (May 2001).
26. Suzen, Y., Huang, G., Jacob, J. and et al. "Numerical simulations of plasma based flow control applications", *In 35th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit* (2005).
27. Durscher, R. and Roy, S. "Evaluation of thrust measurement techniques for dielectric barrier discharge actuators", *Exp. Fluids*, **53**(4), pp. 1165-1176 (2012).
28. Menter, F.R. "Review of the shear-stress transport turbulence model experience from an industrial perspective", *Int. J. Comput. Fluid Dyn.*, **23**(4), pp. 305-316 (Apr 2009).
29. Battisti, L., Persico, G., Dossena, V. and et al. "Experimental benchmark data for H-shaped and troposkien VAWT architectures", *Renew. Energy*, **125**, pp. 425-444 (2018).
30. Franchina, N., Persico, G. and Savini, M. "2D-3D computations of a vertical axis wind turbine flow field: modeling issues and physical interpretations", *Renew. Energy*, pp. 1-20 (2018).
31. Silva-Llanca, L. and Inostroza-Lagos, S. "Optimum power generation assessment in an H-Darrieus vertical axis wind turbine via exergy destruction minimization", *Energy Convers. Manag.*, **243**, pp. 1-13 (2021).
32. Castelli, M.R., Pavesi, G., Battisti, L. and et al. "Modeling strategy and numerical validation for a darrieus vertical axis micro-mind turbine", *Proceedings of the ASME 2010 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, **7**(IMECE2010-39548), *Fluid Flow, Heat Transfer and Thermal Systems, Parts A and B*. Vancouver, British Columbia, Canada. November, pp. 409-418, ASME (May 2010). <https://DOI.org/10.1115/IMECE2010-39548>.

33. Lam, H.F. and Peng, H.Y. "Study of wake characteristics of a vertical axis wind turbine by two-and three-dimensional computational fluid dynamics simulations", *Renew. Energy* 90, pp.386-398 (May 2016).
34. Bouchmal, A. "Modeling of dielectric-barrier discharge actuator", Master Science Thesis (Delft University) (2011).
35. Balduzzi, F., Bianchini, A., Ferrara, G. and et al. "Static and dynamic analysis of a NACA 0021 airfoil section at low reynolds numbers based on experiments and CFD", *In Volume 9: Oil and Gas Applications; Supercritical CO2 Power Cycles; Wind Energy*, p. V009T48A004 (2018).
36. Zou, S., Gao, A., Shi, Y. and et al. "Causal mechanism behind the stall delay by airfoil's pitching-up motion", *Theor. Appl. Mech. Lett*, **7**(5), pp. 311-315 (Sep 2017).
37. Sarkar, S. and Venkatraman, K. "Numerical simulation of thrust generating flow past a pitching airfoil", *Comput. Fluids*. **35**(1), pp. 16-42 (Jan 2006).
38. Hosseini, A.A. and Ashrafizadeh, A. "Numerical simulation of the wake structure and thrust/lift generation of a pitching airfoil at low reynolds number via an immersed boundary method", *J. Aerosp. Technol. Manag*, **7**(3), pp. 334-350 (Sep 2015).





# مطالعه‌ی عددی پارامترهای تأثیرگذار بر عملکرد حرارتی و دینامیکی کوره‌ی حرارتی پرس گرم

سعید شعاعی (دانشجوی کارشناسی ارشد)

مصطفی باکویی (کارشناس ارشد)

محمدمتین بهزادی (دانشجوی دکتری)

مجتبی تقی‌پور\* (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

مهندسی مکانیک شریف (بهار ۱۴۰۱)  
دوره ۳-۲، شماره ۱، ص. ۹۷-۸۵ (پژوهشی)

پرس ایزواستاتیک گرم یا هیپ یکی از فرایندهای مورد استفاده در متالورژی پودر است. به دلیل هزینه‌ی بسیار بالای ساخت نمونه آزمایشگاهی این نوع از کوره، استفاده از شبیه‌سازی عددی به منظور مطالعه‌ی رفتار آن بسیار حائز اهمیت است. در این پژوهش، عملکرد هندسه‌ی خاصی از یک کوره‌ی حرارتی پرس گرم به صورت عددی مطالعه شده است. به منظور افزایش دقت حل مسئله از مدل ترمودینامیکی گاز واقعی استفاده شده و معادلات پیوستگی، مومنتوم، آشفتگی و انرژی به صورت هم‌زمان حل شده است. در این پژوهش ضمن مطالعه‌ی رفتار کوره بر اساس شرایط مرزی و اولیه پیش فرض، تأثیر فراسنجه‌های مختلف بر رفتار کوره‌ی حرارتی پرس گرم مثل تغییر نوع گاز، دمای دیواره‌ی آبگرد، وجود یا عدم وجود سپر حرارتی، شرایط مرزی المنت و نیز فشار اولیه بررسی شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که فشار اولیه‌ی گاز داخل کوره و نیز دمای مرز آبگرد تأثیر قابل توجهی بر میزان فشار نهایی گاز کوره دارند. همچنین مطالعه‌ی تغییرات گذرای دمای ناحیه گرم در دو حالت خاموش شدن المنت می‌تواند مبنایی برای طراحی و ساخت یک سیستم کنترل دمای مناسب برای کوره باشد.

Saeed.shoaei@mech.sharif.edu  
bakouei.mostafa@mech.sharif.edu  
mohammadmatin.behzadi@mech.sharif.edu  
mtaghipoor@sharif.ir

واژگان کلیدی: کوره‌ی حرارتی پرس گرم، شبیه‌سازی عددی، انتقال حرارت، مدل‌سازی فیزیک‌های چندگانه.

## ۱. مقدمه

با توجه به دما و فشار بالای کوره، دیواره‌ی کوره باید با ضریب اطمینان بالا ساخته شود. دیواره‌ی کوره عموماً از استیل با مقاومت بالا - که تحت فرایندهای آهن‌گری (فورج)،<sup>۱</sup> آبدهی (کوئنچ)<sup>۲</sup> و برگشت دادن (تمپر)<sup>۳</sup> قرار گرفته است - ساخته می‌شود. در بعضی از موارد، محفظه‌ی کوره به شکل سیم‌پیچ یا از اتصالات چدنی ساخته می‌شود. در مورد دیواره‌ی کوره، مطالعه‌ی تمرکز تنش و خوردگی اهمیت به‌سزایی دارد. همچنین از طریق فرایند سرمایش (به‌وسیله‌ی آبگرد تعبیه شده در بدنه)، گرمای جذب شده در دیواره دفع می‌شود. ضریب رسانش حرارتی دیواره‌ی کوره باید به اندازه‌ی کافی بالا باشد تا حرارت را به سرعت به سیال سرد منتقل کرده و دچار افزایش دما نشود. بالا رفتن دمای دیواره‌ی بدنه، تحت فشار بالا می‌تواند به شدت استحکام مکانیکی آن را تحت تأثیر قرار دهد و باعث شکست شود.<sup>[۱]</sup> در کوره‌ی هیپ، هر سه فرایند انتقال حرارت - رسانش، جابه‌جایی و تشعشع - دخالت دارند. به این وجود، به دلیل استفاده از عایق‌های مناسب و نیز ضریب رسانش پایین گاز، انتقال حرارت رسانشی در این میان سهم کم‌تری خواهد داشت.<sup>[۲]</sup> برای ساخت المنت حرارتی کوره در دماهای کمتر از ۱۲۰۰ درجه می‌توان از آلیاژ نیکل کروم یا کانتال (آلیاژی از آهن، کروم و آلومینیوم) استفاده کرد. در دماهای

پرس ایزواستاتیک گرم (هیپ)<sup>۱</sup> یکی از فرایندهای مورد استفاده در متالورژی پودر است که در آن ذرات پودر شده‌ی فلزات، آلیاژها و سرامیک‌ها تحت فشار ایزواستاتیک و حرارت بالا به همدیگر چسبیده و یک جزء واحد را تشکیل می‌دهند. این روش برای کاهش تخلخل فلزات و افزایش چگالی بسیاری از سرامیک‌ها به کار می‌رود. در این فرایند ابتدا قالب قطعه‌ی مورد نظر طراحی و ساخته شده و سپس قالب از پودر موادی که قرار است با یکدیگر ترکیب شده و آلیاژ نهایی را تولید کنند پر می‌شود. در مرحله‌ی بعد، قالب در دمای بالا که مقدار آن می‌تواند به ۲۰۰۰ درجه سلسیوس نیز برسد، تحت فشار بالای ایزوتروپیک (همسانگرد) قرار می‌گیرد. بزرگی این فشار ممکن است تا حدود ۲۰۰ مگاپاسکال نیز باشد. با استفاده از این روش امکان ساخت قطعاتی با اندازه‌های مختلف (مانند تیغه‌های تراشکاری، پره‌های توربین) وجود دارد. در این روش برای اعمال فشار به قالب، از گازهای بی‌اثر مانند آرگون یا هلیوم استفاده می‌شود.<sup>[۱]</sup>

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۴۰۰/۸/۲۳، اصلاحیه ۱۴۰۰/۱۰/۱۲، پذیرش ۱۴۰۰/۱۰/۲۸

DOI:10.24200/J40.2022.59079.1621

بالا تر (محدوده‌ی دمایی ۱۰۰۰ تا ۱۶۵۰ درجه سلسیوس) استفاده از مولیبدن، به دلیل برخورداری از شکل‌پذیری مناسب و قابلیت تولید در اشکال مختلف (مانند سیم، نوار یا ورق) مرسوم است. همچنین مولیبدن به سادگی قابل تعمیر است. در صورت استفاده از گرمکن‌های الکتریکی (المنت) مولیبدنی، به دلیل تابعیت خطی مقاومت الکتریکی آن با دما، تغییرات دمایی داخل کوره بر عملکرد آن تأثیر می‌گذارد. در محدوده‌های دمایی که بزرگ‌تر از دمای کاری مولیبدن باشند از گرافیت استفاده می‌شود که در این صورت می‌بایست از ولتاژ پایین و جریان بالا استفاده کرد. در دماهای بالاتر (در حدود ۲۸۰۰ درجه سلسیوس) هیترهای شبکه‌یی تنگستن یا میله‌های پلاتینیومی می‌توانند جایگزین مناسب گرمکن‌های (هیتر) گرافیتی باشند.<sup>[۱]</sup> یکی دیگر از مواردی که در مورد کوره‌های هیپ مورد توجه قرار گرفته است، شکل هندسی المنت هاست که بر عمر و عملکرد المنت تأثیر می‌گذارد. به عنوان مثال در برخی مطالعات<sup>[۴]</sup> از یک هیتر  $U$  شکل استفاده شده است. باید توجه داشت که نوع گاز مورد استفاده در محفظه و حتی جنس گرمکن‌های الکتریکی (المنت‌ها) می‌تواند در خواص مکانیکی قطعه‌یی که در داخل کوره قرار دارد مؤثر واقع شود. به عنوان مثال، در مورد سرامیک‌هایی که در ساختار خود بیش از ۹۹ درصد  $Al_2O_3$  دارند، وجود کربن در اتمسفر کوره بر خواص آن‌ها تأثیر منفی می‌گذارد. از همین روی، در این حالت استفاده از مولیبدن به جای گرافیت در کوره اولویت خواهد داشت.<sup>[۱]</sup> به منظور جلوگیری از اتلاف حرارت، بهبود فرایند کنترل دمای محفظه و ایجاد یک منطقه‌ی داغ با دمای همگن، در داخل کوره از عایق حرارتی استفاده می‌شود. از جمله عایق‌های مورد استفاده می‌توان به فیبر کربن و صفحات انعطاف‌پذیر گرافیتی اشاره کرد. نکته‌ی حائز اهمیت این است که به دلیل محدودیت فضا، ضخامت عایق مورد استفاده باید حتی‌الامکان کم باشد. در عین حال، فرایند سرد شدن کوره نیز در بعضی کاربردها بایستی به اندازه کافی سریع باشد که در این موارد نیاز به استفاده از سازوکاری برای سرمایش سریع احساس می‌شود. همچنین، در چرخه‌های دمایی، کوره بایستی طوری طراحی شود که دچار فرسودگی نشده و عمر بالایی داشته باشد. به عنوان مثال فیبر سرامیکی که گاهی به عنوان عایق استفاده می‌شود، در اثر کریستالی شدن در چرخه‌های دمایی دچار فرسودگی می‌شود.<sup>[۵]</sup>

در بررسی‌های محققین، از صفحات گرافیتی انعطاف‌پذیر به عنوان عایق استفاده شده است.<sup>[۴]</sup> این صفحات دارای ضخامت کمی در حدود ۰/۱ تا ۱ میلی‌متر بوده که به صورت یک در میان دارای سوراخ‌هایی با ابعاد و هندسه مشخص هستند. همچنین در فاصله‌ی بسیار کم بین صفحات، گاز آرگون به دام افتاده است. از آنجا که این گاز ضریب رسانش حرارتی کمی دارد، در این فضای کوچک اجازه‌ی حرکت (انتقال حرارت به روش جابه‌جایی) نداشته و این مسئله به افزایش مقاومت حرارتی عایق کمک می‌کند.

نقش سیال عامل مورد استفاده در کوره، اعمال فشار یکنواخت به قطعه است. به منظور جلوگیری از واکنش شیمیایی میان قطعه و سیال، عموماً از گازهای بی‌اثر در داخل کوره‌های پرس حرارتی گرم استفاده می‌شود. در گذشته استفاده از گاز هلیوم به عنوان سیال عامل کوره رایج بوده است. هلیوم نسبت به آرگون دارای چگالی کم‌تر و ضریب رسانش حرارتی بیشتری است. اما در حال حاضر به دلیل هزینه‌ی کم‌تر از گاز آرگون استفاده می‌شود. ضریب انبساط حرارتی بالای گاز آرگون باعث افزایش سهم انتقال حرارت جابه‌جایی می‌شود. در بعضی از موارد مانند وقتی که  $Si_3N_4$  کپسوله نشده در داخل کوره قرار دارد، احتمال تجزیه‌ی جزئی سرامیک نیتريد در فضای حاوی آرگون دما بالا وجود دارد. در این شرایط از نیتروژن به جای آرگون استفاده می‌شود.<sup>[۱]</sup>

یکی دیگر از مسائلی که در خصوص فشار محفظه باید به آن توجه کرد، مسئله‌ی

دما در نواحی مختلف استفاده شود. در دماهای بالا روش‌های اندازه‌گیری مختلفی هستند که می‌توان از آن استفاده کرد، اما تعداد کمی از آن‌ها در فشارهای بالا که کوره‌ی هیپ در آن کار می‌کند از صحت و دقت برخوردارند. روش‌های نوری که بر مبنای تابش حرارتی الکترومغناطیسی کار می‌کنند می‌توانند برای اندازه‌گیری دما بسیار مفید باشند. در این دسته از روش‌ها که دما به سادگی و با استفاده از معادله‌ی پلانک محاسبه می‌شود می‌توانند برای اندازه‌گیری دماهای بالاتر از ۲۲۰۰ درجه نیز مورد استفاده قرار بگیرند و در عین حال در عملکرد آن‌ها اختلالی به وجود نیامده و دقت آن‌ها کاهش پیدا نکند. یکی از مهم‌ترین مزیت‌های استفاده از روش نوری برای اندازه‌گیری دما، نشت‌بندی محفظه است. از روش نوری در محفظه با فشار ۱ گیگاپاسکال و دمای ۱۶۰۰ درجه سلسیوس و نیز محفظه با فشار ۹۸۰ مگاپاسکال و دمای ۲۰۰۰ درجه سلسیوس استفاده شده است.<sup>[۲]</sup>

یکی از مراحل کاری کوره‌ی هیپ، فرایند خنک‌کاری و سرمایش است. در این مرحله که با هدف دفع حرارت از محفظه‌ی فشار انجام می‌شود، برای جذب حرارت عموماً از آب استفاده می‌شود. گاهی برای تسریع در فرایند سرمایش کوره، از انتقال حرارت جابه‌جایی اجباری استفاده می‌شود. در این حالت گاز داغ با هدایت به خارج از کوره، در مجاورت چرخه‌ی آب سرد، حرارت جذب شده از قطعه را به بیرون دفع کرده و پس از کاهش دما مجدداً به داخل کوره بازمی‌گردد. اگرچه در کوره‌های قدیمی، مرحله‌ی سرمایش گاهی تا ۲۴ ساعت زمان می‌برده، اما استفاده از انتقال حرارت جابه‌جایی اجباری می‌تواند منجر به نصف شدن مدت زمان سرمایش شود.<sup>[۶]</sup> پژوهش‌های صورت گرفته در زمینه‌ی کوره‌ی حرارتی پرس گرم تمرکز کم‌تری بر استفاده از شبیه‌سازی عددی در مدل‌سازی رفتار این نوع از کوره‌ها دارند. علت این امر می‌تواند انحصاری بودن دانش ساخت این تجهیز و تعداد کم شرکت‌های سازنده آن در دنیا باشد. تحقیقات انجام شده عموماً مرتبط با استفاده از این کوره در مطالعات متالورژیکی است.

از معدود مطالعات انجام شده می‌توان به تحقیقات آکر برگ<sup>[۷]</sup> و همکارانش اشاره کرد. در این پژوهش با استفاده از یک مدل پایای دوبعدی و مقارن محوری<sup>۱۰</sup> به شبیه‌سازی فرایند حرارت‌دهی و خنک‌کاری کوره‌ی ساخت شرکت آوور<sup>۱۱</sup> پرداخته شده است. اگرچه این گروه برای صحت‌سنجی نتایج خود از داده‌های تجربی (میزان حرارت خروجی از دیواره‌ی کوره، دما و فشار محفظه) استفاده کرده‌اند اما در مورد محدودیت داده‌برداری تجربی در فشار و دمای بالا، این گروه تحقیقاتی اذعان کرده‌اند که داده‌های تجربی کمی برای صحت‌سنجی وجود داشته است. در این پژوهش از نرم‌افزار انسیس فلونت استفاده شده و اثر تشعشع در آن نادیده گرفته شده است. در حالی که انتقال حرارت تشعشعی، به ویژه در دمای بالا، از جمله روش‌های غالب انتقال حرارت در داخل کوره است. در این پژوهش برای مطالعه‌ی آشفتنگی از مدل

در فشار و دمای بالا به صورت عددی مطالعه شده و تأثیر تغییر پارامترهای مختلف، مانند شرایط مرزی، شرایط اولیه و جنس گاز مورد استفاده، بر عملکرد آن بررسی شده است. در این مطالعه برای آن که نتایج بیش از پیش به واقعیت نزدیک باشند، ضمن استفاده از جریان آشفته و مدل ترمودینامیکی گاز واقعی، بر همکنش دینامیکی و حرارتی سیال با دیواره کوره و عایق در نظر گرفته شده است. همچنین تمامی معادلات انتقال حرارت رسانشی، جابه جایی و تشعشعی به صورت همزمان حل شده است. از آنجا که مسئله دارای فیزیک های چندگانه است، از نرم افزار کامسول و به منظور کاهش هزینه محاسباتی و افزایش سرعت حل، از یک هندسه ی دوبعدی و مقارن محوری استفاده شده است.

## ۲. معادلات حاکم بر پدیده

شبیه سازی رفتار کوره های حرارتی مشتمل بر دو بخش جریان سیال و انتقال حرارت است که به صورت متقابل بر یکدیگر اثر می گذارند. در شبیه سازی جریان سیال دو معادله ی پیوستگی و مومنتوم باید حل شوند. در بخش انتقال حرارت سیستم نیز باید معادله ی انرژی همراه با معادلات حاکم بر فیزیک تشعشع حل شود. معادلات حاکم بر پدیده های فوق عبارت اند از:

معادله ی پیوستگی:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot u = 0 \quad (1)$$

معادله ی مومنتوم:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -\nabla P + \nabla \cdot (\mu (\nabla u + (\nabla u)^T)) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot u) + \rho g \quad (2)$$

معادله ی انرژی:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p u \cdot \nabla T - \nabla \cdot (k \nabla T) = Q''' \quad (3)$$

در معادله ی پیوستگی،  $u$  بیانگر سرعت و  $\rho$  چگالی سیال است. همچنین در معادله ی مومنتوم  $P$  بیانگر فشار بوده و  $g$  شتاب گرانش است. در معادله ی انرژی نیز  $T$  معرف دما بوده و  $C_p$  بیانگر ظرفیت حرارتی سیال در فشار ثابت است.  $k$  نیز ضریب رسانش در جسم جامد است. معادلات فوق با این فرض ساده سازی شده اند که پخش حرارتی ناشی از تنش کم باشد. در بسیاری از مسائل انتقال حرارت جابه جایی آزاد، این فرض مرسوم است.  $Q'''$  نیز بیانگر تولید انرژی حجمی است. معادلات مورد استفاده برای انتقال حرارت تشعشعی مطابق روابط زیر است. در این مسئله، کلیه سطوح، خاکستری، دیفیوز و کدر در نظر گرفته شده اند.

معادلات تشعشع:

$$J = \varepsilon e_b(T) + \rho_a G \quad (4)$$

$$G = G_m(T) + G_{amb} + G_{ext} \quad (5)$$

$$e_b(T) = \sigma T^* \quad (6)$$

در این معادلات  $J$  بیانگر شار تابشی خارج شده از جسم است و  $G$  بیانگر شار ورودی است.  $G_m$  بیانگر تشعشع متقابل بین سطوح و  $G_{amb}$  تشعشع محیط پیرامون و  $G_{ext}$  بیانگر تشعشع ناشی از منبع خارجی است. همچنین  $\varepsilon$  نشان دهنده ی ضریب

$K - \omega$  SST استفاده شده است. همچنین بر اساس این مقاله، شبیه سازی فرایند سرمایشی در حدود ۲ هفته زمان برده است که نشان از هزینه ی محاسباتی بسیار بالای مدل مورد استفاده دارد.

ژیائو پینگ<sup>۱۲</sup> به شبیه سازی فرایند سرمایش در یک کوره ی حرارتی پرس گرم پرداخته است.<sup>[۸]</sup> در این مطالعه از یک هندسه ی سه بعدی در نرم افزار  $Star - CCM+$  استفاده شده است. همچنین به منظور مش بندی هندسه از نرم افزار  $ICEM - CFD$  استفاده شده و اثر تشعشع در نظر گرفته شده است. به منظور مدل سازی آشفته گی نیز از مدل  $K - \epsilon$  استفاده شده است. هزینه ی محاسباتی مدل مورد استفاده بسیار زیاد بوده است.

مانیر<sup>۱۳</sup> و همکارانش به مدل سازی کوره ی پخت<sup>۱۴</sup> پرداخته اند.<sup>[۹]</sup> در این پژوهش ابتدا نتایج به دست آمده از طریق مقایسه ی با یک مدل تجربی صحت سنجی شده و سپس کوره های با ابعاد مختلف که حاوی قطعات با چیدمان و اشکال گوناگون بوده اند بررسی شده است. به منظور شبیه سازی از نرم افزار کامسول استفاده شده و اثرات تشعشع و تغییر شکل جسم نیز در نظر گرفته شده است. جریان سیال در داخل کوره به صورت آرام در نظر گرفته شده و از یک هندسه ی دوبعدی و مقارن محوری استفاده شده است. برای کنترل دمای کوره از یک کنترلر  $PID$  استفاده شده است. نتایج شبیه سازی سازگاری خوبی با نتایج تجربی دارد که می تواند بیانگر کارایی نرم افزار کامسول در شبیه سازی عملکرد این کوره باشد.

کندارس<sup>۱۵</sup> و همکارانش به شبیه سازی کوره پخت در مدت زمان ۱۲۰۰ ثانیه پرداخته اند.<sup>[۱۰]</sup> در این نوشتار به نرم افزار مورد استفاده برای شبیه سازی اشاره یی نشده است اما برای تولید هندسه و ایجاد مش، به ترتیب از نرم افزارهای  $Siemens NX$  و  $Ansys Meshing$  استفاده شده و نیز یک مدل دوبعدی کاربرد داشته است. برای مدل سازی آشفته گی از مدل  $Realizable K - \epsilon$  استفاده شده و به منظور مطالعه ی ترمودینامیکی رفتار سیال از مدل گاز ایده آل استفاده شده است. اگرچه دیواره ی کوره و جنس آن بر رفتار حرارتی کوره تأثیرگذار است، اما در این پژوهش از مدل سازی سطوح جامد صرف نظر شده است. همچنین دیواره ی عایق به صورت متخلخل مدل سازی شده است. از نتایج این شبیه سازی در جایگذاری و چینش مناسب قطعات مختلف در داخل کوره استفاده شده است.

مرجع<sup>[۱۱]</sup> با موضوع شبیه سازی کوره های فشار بالای مورد استفاده در تولید ابررساناها، در کنفرانس سال ۲۰۱۹ کامسول ارائه شده است. در این مطالعه از جریان آرام در یک هندسه ی دوبعدی و مقارن محوری استفاده شده است. نقطه ی ضعف این پژوهش، در چشم پوشی از اثرات انتقال حرارت تشعشعی است. در نهایت با استفاده از نتایج به دست آمده شکل کوره ی مورد استفاده اصلاح شده است.

چنانچه پیش تر ذکر شد، از آنجا که کوره ی حرارتی پرس گرم در دما و فشار بالا عمل می کند، مطالعه ی تجربی عملکرد کوره، حتی در مقیاس آزمایشگاهی هزینه بر بوده و از این رو استفاده از حل عددی به منظور پیش بینی تأثیر پارامترهای مختلف بر عملکرد آن حائز اهمیت است. همچنین محدود مطالعات عددی که نتایج آن منتشر شده است، هرکدام با فرض های ساده کننده یی همراه بوده اند که سبب عدم تطابق کامل مدل مورد استفاده با واقعیت شده است. از سویی، لزوماً نتایج به دست آمده برای یک هندسه خاص، قابل تعمیم به دیگر انواع کوره های حرارتی پرس گرم نیست.

از این رو در این پژوهش، هندسه ی خاصی از یک کوره ی حرارتی پرس گرم

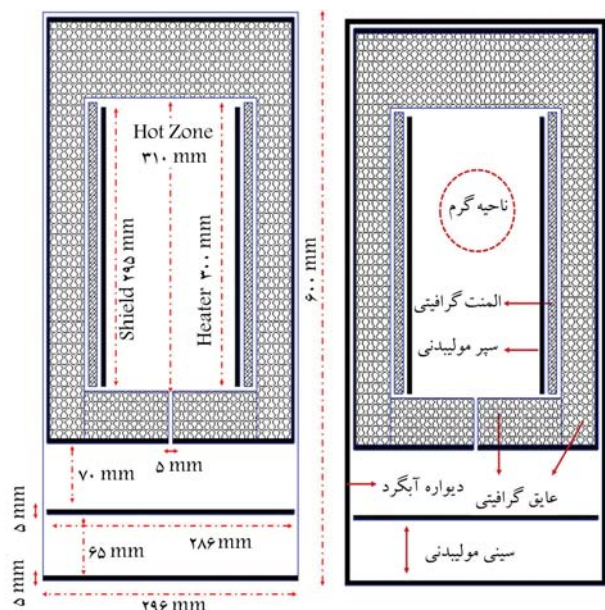
$$\begin{aligned}\sigma_{W1} &= 1 \\ \beta_2 &= 0.828 \\ \gamma_2 &= 0.44 \\ \sigma_{K2} &= 1 \\ \sigma_{W2} &= 0.856 \\ \beta_2^* &= 0.9 \\ \alpha_1 &= 0.31\end{aligned}\quad (16)$$

در نرم‌افزار کامسول، هر یک از معادلات فوق به صورت جداگانه تعریف شده و در نهایت کلیه متغیرهای مورد استفاده به کمک از فیزیک جریان غیر هم دما<sup>۱۶</sup> و انتقال حرارت تشعشعی<sup>۱۷</sup> با هم کوپل می‌شوند.

### ۳. هندسه‌ی مورد استفاده

کوره‌ی مورد مطالعه به شکل استوانه است. از این رو در این مسئله به منظور کاهش هزینه‌ی محاسباتی از یک هندسه‌ی دوبعدی و متقارن محوری استفاده شده است. المنت مورد استفاده در این کوره از جنس گرافیت و عایق مورد استفاده در کوره از جنس صفحات گرافیتی لوله شده (پتوی گرافیتی<sup>۱۸</sup>) است. در مقابل المنت، یک سپر<sup>۱۹</sup> حرارتی استوانه‌یی از جنس مولیبدن قرار دارد. بخش مرکزی کوره که در این مقاله ناحیه‌ی گرم<sup>۲۰</sup> نامیده شده است، محل قرارگیری نمونه است. به منظور افزایش مقاومت مکانیکی عایق گرافیتی، در قسمت زیرین ناحیه‌ی گرم مجرای وجود دارد که فشار بخش داخلی را به بخش خارجی عایق انتقال داده و مانع از ایجاد اختلاف فشار در طرفین عایق می‌شود. در قسمت پایینی سازه، دو عدد سینی مولیبدنی قرار دارد که اجزای جانبی کوره در آن قرار می‌گیرند. پوسته خارجی نیز به فاصله‌ی ۵ میلی‌متر از دیواره عایق قرار داشته و از بیرون با سیستم خنک‌کننده (آبگرد) در تماس است. هندسه‌ی مورد استفاده و ابعاد آن در شکل ۱ نشان داده شده است.

ضریب رسانش حرارتی پتوی گرافیتی برابر با  $0.3W/K.m$  در نظر گرفته



شکل ۱. هندسه و ابعاد مورد استفاده در مسئله.

گسیل است که در جسم خاکستری مقدار آن برابر با ضریب جذب است.  $\sigma$  نیز ثابت بولتزمن است. در نهایت میزان انتقال حرارت تشعشعی برای هر سطح از رابطه‌ی ۷ محاسبه می‌شود:

$$q = \varepsilon(G - e_b(T)) \quad (7)$$

در این مسئله با توجه به آن که دما و فشار داخل کوره پرس گرم بالا است، به منظور افزایش دقت حل مسئله، برای محاسبه‌ی مؤلفه‌های ترمودینامیکی گاز، از مدل گاز واقعی  $SRK$  استفاده شده است. شکل کلی معادلات مورد استفاده مطابق رابطه‌ی ۸ است:<sup>[۱۲]</sup>

$$P = \frac{RT}{V - b + c} - \frac{\alpha}{V^2 + \delta V + \epsilon} \quad (8)$$

در این مقاله به منظور مطالعه‌ی آشفته‌گی از مدل  $K - \omega$  استفاده شده است.<sup>[۱۳]</sup> این مدل، نسخه‌ی بهبود یافته‌ی مدل  $K - \omega$  محسوب می‌شود که در مجاورت دیواره‌ی مشابه با مدل  $K - \omega$  و در نقاط دور از دیواره‌ی مشابه با مدل  $K - \epsilon$  عمل می‌کند. در این مدل پارامترهای آشفته‌گی توسط روابط ۹-۱۴ توصیف می‌شوند.

$$(u \cdot \nabla)\omega = \nabla \cdot [(\mu + \mu_T \sigma_\omega) \nabla K] + \frac{\gamma}{\mu_T} \rho P^* - \rho \beta_\omega \omega^2 + \gamma(1 - f_{v1}) \frac{\sigma_\omega \rho}{\omega} \nabla K \cdot \nabla \omega \quad (9)$$

$$\begin{aligned}P^* &= \min(P_K, 10^6 \rho \beta_\omega \omega k) \\ \rightarrow P_K &= \mu_T [\nabla u : (\nabla u + (\nabla u)^T) - \frac{\gamma}{\mu_T} (\nabla \cdot u)^2] - \frac{\gamma}{\mu_T} \rho K \nabla \cdot u\end{aligned} \quad (10)$$

$$\mu_T = \rho \frac{a_1 K}{\max(a_1 \omega, S f_{v2})} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}S &= \sqrt{2S : S} \\ \rightarrow S &= \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T)\end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}f_{v1} &= \tanh(\theta_1^*), \theta_1 \\ &= \min[\max(\frac{\sqrt{K}}{\beta_\omega \omega l_w}, \frac{500 \mu}{\rho \omega l_w^2}), \frac{\gamma \rho \sigma_\omega K}{CD_{K\omega} l_w^2}], CD_{K\omega} \\ &= \max(\frac{\gamma \rho \sigma_\omega}{\omega} \nabla \omega \cdot \nabla K, 10^{-10})\end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}f_{v2} &= \tanh(\theta_2^*) \\ \rightarrow \theta_2 &= \max(\frac{\gamma \sqrt{K}}{\beta_\omega \omega l_w}, \frac{500 \mu}{\rho \omega l_w^2})\end{aligned} \quad (14)$$

در روابط فوق،  $K$  بیانگر انرژی جنبشی توربولانس،  $\omega$  بیانگر نرخ اتلاف ویژه،  $\mu$  و  $\mu_T$  به ترتیب ویسکوزیته‌ی سیال و ویسکوزیته‌ی توربولانسی هستند.  $f_{v1}$  و  $f_{v2}$  توابع میان‌یابی در نواحی نزدیک و دور از دیواره هستند.  $P^*$  نیز بیانگر نرخ تولید حجمی انرژی و  $l_w$  بیانگر فاصله تا نزدیک ترین دیواره است. سایر ضرایب نیز برحسب مقادیر تجربی، به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned}\phi &= f_{v1} \phi_1 + (1 - f) \phi_2 \\ \rightarrow \phi &= \beta, \gamma, \sigma_K, \sigma_\omega\end{aligned} \quad (15)$$

مقادیر ثوابت تجربی به کار رفته نیز برابرند با:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 0.75 \\ \gamma_1 &= \frac{5}{9} \\ \sigma_{K1} &= 1\end{aligned}$$



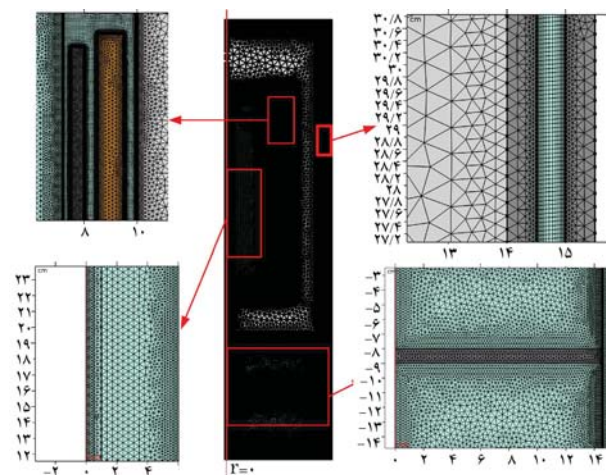
شکل ۳. شرایط مرزی پیش فرض.

## ۵. شرایط مرزی

با توجه به شکل ۳، در این مسئله به صورت پیش فرض دمای دیواره خارجی (دیواره آبگرد) برابر با ۴۰۰ درجه کلوین (برابر با پیشینه دمای مجاز برای دیواره آبگرد) و دمای المنت برابر با ۲۵۰۰ کلوین در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که فرض شده است دمای دیواره آبگرد و المنت ظرف مدت زمان ۱۰۰۰ ثانیه، از مقدار اولیه ۳۰۰ کلوین تا مقدار نهایی افزایش پیدا می کند. همچنین روی تمام سطوح، شرط عدم لغزش اعمال شده است. با توجه به دمای بالای المنت، انتقال حرارت تشعشعی نقش به سزایی در تحولات داخل کوره حرارتی دارد. از این رو اثر تشعشع در تمام سطوح در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی مورد بحث، در ادامه مقاله، جهت اختصار در نوشتار، شرایط مرزی پیش فرض نامیده شده است.

## ۶. شرایط اولیه

پس از روشن شدن المنت، دمای دیواره ها و گاز داخل کوره با گذشت زمان افزایش پیدا کرده و در نهایت به یک مقدار ثابت میل می کند. از این رو رفتار کوره دارای ماهیت گذرا و متغیر با زمان است. از این رو لازم است تا یک شرط اولیه مناسب تعیین شود. به صورت پیش فرض، دما و فشار اولیه گاز داخل کوره به ترتیب برابر با ۳۰۰ کلوین (دمای محیط) و ۵۰ مگاپاسکال در نظر گرفته شده است. فشار اولیه به کمک کمپرسوری که گاز را به داخل کوره تزریق می کند تأمین می شود. در ادامه، فشار گاز در اثر تبادل حرارت با المنت و در نتیجه ازدیاد دما تا مقدار مطلوب افزایش پیدا می کند. شرایط اولیه مورد اشاره، در ادامه مقاله به جهت رعایت اختصار در نوشتار، شرایط اولیه پیش فرض نامیده شده است.



شکل ۲. شبکه بندی هندسه حل.

شده است.<sup>[۲]</sup> همچنین ضریب گسیل گرافیت برابر با ۰/۸ و ضریب گسیل حرارتی مولیبدن برابر با ۰/۱ در نظر گرفته شده است.

## ۴. شبکه بندی

چنان که در شکل ۲ مشاهده می شود، در این مسئله به دلیل وجود مجراهای با ضخامت مختلف برای حرکت سیال از شبکه بندی بی سازمان و دو نوع شبکه ی مثلثی و مربعی استفاده شده است. لازم به ذکر است که در صورت استفاده از مش با سازمان در این هندسه، تعداد مش تا پنج برابر افزایش پیدا کرده و این مسئله منجر به افزایش هزینه ی محاسباتی مسئله می شود. در کانال های با ضخامت کم، ناحیه ی سرمایش و نیز نواحی اطراف المنت و سپر، از شبکه ی مربعی استفاده شده است. به منظور شبکه بندی قسمت هایی که دارای تغییرات اندازه شبکه اند، از شبکه ی مثلثی استفاده شده است. به منظور افزایش دقت در محاسبه گرادیان دما و میدان سرعت در مجاورت دیواره، از شبکه لایه مرزی استفاده شده است. در سایر قسمت ها که گرادیان دما و سرعت در آن کوچک تر است از شبکه های بزرگ تر و با نرخ رشد بیش تر استفاده شده است تا در عین حفظ دقت، هزینه ی محاسباتی مسئله و مدت زمان حل کاهش پیدا کند.

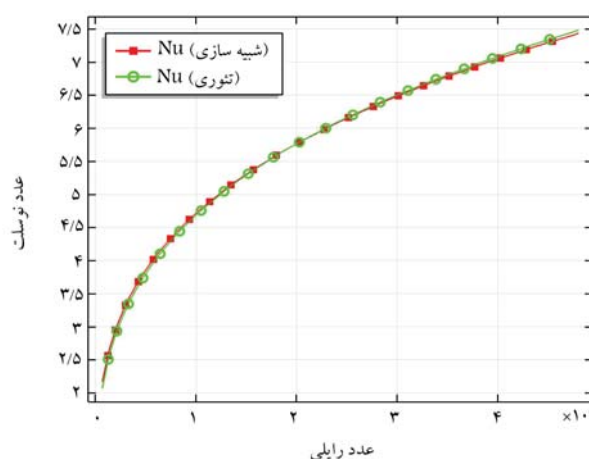
به منظور مطالعه ی استقلال از شبکه، سه شبکه مختلف به نام های  $C_1$ ،  $C_2$  و  $C_3$  تولید شده است. در شکل ۲ شبکه  $C_1$  نشان داده شده است. در شبکه های  $C_2$  و  $C_3$  اندازه کوچک ترین و بزرگ ترین المان مورد استفاده به ترتیب ۲ و ۳ برابر المان های مورد استفاده در شبکه  $C_1$  است. تعداد المان مورد استفاده در شبکه های  $C_1$ ،  $C_2$  و  $C_3$  به ترتیب برابر با ۱۱۱۶۶۵، ۴۴۲۵۵ و ۲۶۱۳۹ عدد است. نتایج به دست آمده برای شار خروجی از دیواره ی آبگرد، متوسط دما و فشار کوره در حالت شبه پایا نشان می دهد که تغییر اندازه شبکه، بیشترین اثر را بر فشار محفظه می گذارد که البته میزان این تغییر در سه شبکه بندی مذکور کم تر از ۱ درصد است و لذا نتایج مستقل از مش بوده است.

به این ترتیب در ادامه برای آن که علاوه بر کاهش هزینه ی محاسباتی، مسئله از دقت قابل قبولی برخوردار باشد از شبکه ی  $C_2$  استفاده شده است. در این حالت متوسط کیفیت مش از لحاظ معیار خوایدگی<sup>۲۱</sup> برابر با ۸۹/۹ و متوسط کیفیت مش از لحاظ معیار لحاظ کننده ی نسبت منطری<sup>۲۲</sup> ۷۱/۹ است و در لایه مرزی از ۶ لایه با ضخامت ۰/۱ میلی متر استفاده شده است.

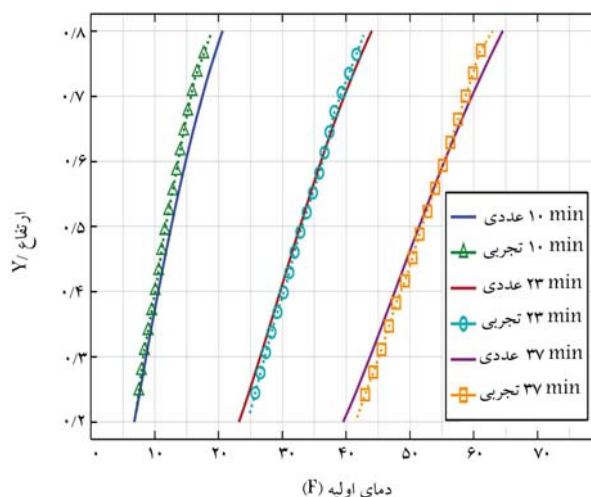
## ۷. اعتبارسنجی

به منظور راستی‌آزمایی نتایج، مسائلی که در آن انتقال حرارت تشعشی و جابه‌جایی به صورت توأمان وجود دارد را به دو پدیده جداگانه انتقال حرارت جابه‌جایی و تشعشی تفکیک کرده و سپس نتایج روش عددی را براساس نتایج مطالعات قبلی صحت‌سنجی می‌کنند. [۱۶-۱۴] در نوشتار حاضر نیز به دلیل عدم دسترسی به نتایج تجربی کوره پیشنهادی، ابتدا مسئله به دو قسمت انتقال حرارت جابه‌جایی و تشعشی تقسیم شده و سپس نتایج مربوط به هریک از این روش‌ها صحت‌سنجی شده است. به منظور راستی‌آزمایی حل عددی انتقال حرارت جابه‌جایی، نتایج شبیه‌سازی انتقال حرارت در داخل یک محفظه مربعی شکل دو بعدی، با استفاده از مدل نرم‌افزاری مورد بحث با نتایج تجربی کتون [۱۷] ۲۳ مقایسه شده است (شکل ۴). بیشینه اختلاف بین نتایج حل عددی با نتایج تجربی کم‌تر از ۱ درصد است.

در این مدل‌سازی از فرض تقارن محوری استفاده شده است. از این رو با استفاده از این مدل، نتایج مربوط به انتقال حرارت در کوره‌ی استوانه‌یی شکل ایوانز [۱۸] ۲۴ استخراج شده و نتایج به دست آمده و با نتایج گزارش شده در مرجع اصلی مقایسه شده است (شکل ۵).



شکل ۴. مقایسه نتایج روش حل عددی پژوهش حاضر با نتایج کتون. [۱۷]



شکل ۵. بررسی انتقال حرارت در کوره استوانه‌یی شکل ایوانز با استفاده از مدل مورد استفاده در مقاله. [۱۸]

در ادامه مشابه با مقاله ون اک، [۲۵] ۱۹ انتقال حرارت تشعشی به ترتیب در بین سه صفحه متقاطع، در داخل یک بلوک مکعبی و میان دو صفحه‌ی موازی مدل‌سازی شده است. مقدار دما و شار حرارتی عبوری از هریک از صفحات در حالت پایا به صورت عددی محاسبه شده و با مقادیر حاصل از حل عددی مقایسه شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که خطای مدل عددی مورد استفاده در مقایسه با روابط تحلیلی کم‌تر از ۱ درصد است.

## ۸. نتایج

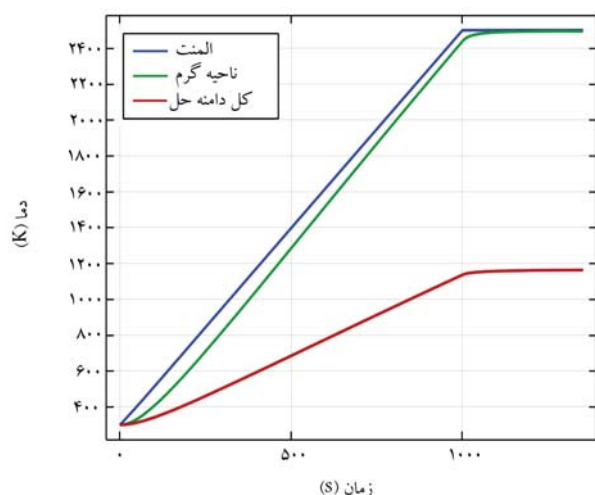
در ادامه نتایج حاصل از حل مسئله برای شرایط مرزی و اولیه پیش فرض ارائه شده و پس از آن تأثیر تغییر پارامترهای مختلف بر عملکرد کوره‌ی حرارتی پرس گرم بررسی شده است.

### ۱.۸. حل مسئله با استفاده از شرایط مرزی و اولیه پیش فرض

در شکل ۶ نمودار تغییرات دمای متوسط گاز در ناحیه گرم و دمای متوسط گاز در کل محفظه ترسیم شده است. چنانچه مشاهده می‌شود، با توجه به شرایط مرزی و اولیه مورد استفاده در مسئله، مقدار متوسط دما بعد از گذشت ۱۱۰۰ ثانیه به سمت یک مقدار ثابت میل کرده است. مقدار دمای متوسط ناحیه گرم در حدود ۲۵۰۰ کلوین و مقدار دمای متوسط محفظه ۱۲۰۰ کلوین است.

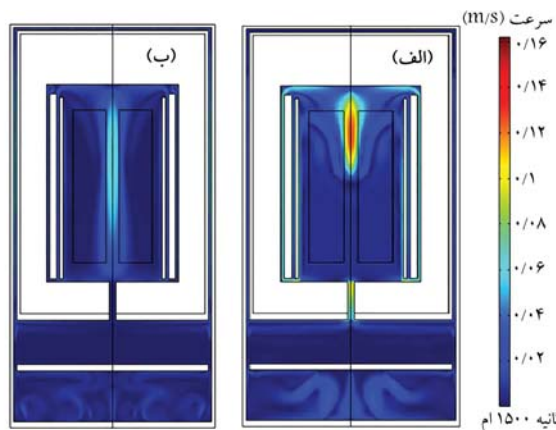
در شکل ۷ نمودار تغییرات فشار گاز آرگون در داخل کوره نشان داده شده است. با توجه به آن که افزایش فشار متأثر از افزایش دماست، با ثابت شدن دما، فشار نیز به سمت یک مقدار ثابت متمایل شده است. فشار نهایی محفظه برابر با ۱۵۰۰ بار است.

در شکل ۸، کانتور توزیع دمای گاز آرگون در ثانیه ۱۵۰۰ نشان داده شده است. در این پژوهش مقدار متوسط دما به عنوان معیار شبه پایا شدن رفتار کوره در نظر گرفته شده است. پس از شبه پایا شدن رفتار کوره، تغییرات دما در بخش‌های پایینی کوره با گذشت زمان بسیار ناچیز خواهد بود؛ زیرا عملاً جریان از بخش‌های داخلی به بخش‌های خارجی نفوذ پیدا نکرده و سازوکار انتقال حرارت به سیال ناحیه پایینی



شکل ۶. نمودار تغییرات دمای متوسط ناحیه گرم و دمای متوسط کل محفظه برحسب زمان (با استفاده از شرایط مرزی و اولیه پیش فرض).

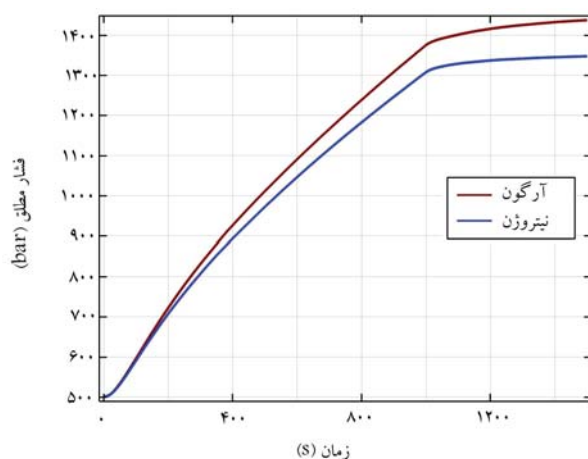




شکل ۹. الف) کانتور توزیع سرعت گاز آرگون در ثانیه ۵۰۰. ب) کانتور تغییرات سرعت گاز آرگون در ثانیه ۱۵۰۰ (با استفاده از شرایط مرزی و اولیه پیش فرض).

جدول ۱. مقایسه جرم مورد نیاز گاز آرگون و نیتروژن مورد نیاز (بر اساس شرایط مرزی و اولیه پیش فرض).

نوع گاز	جرم مورد نیاز (kg)
آرگون	۱۴۰۵۵
نیتروژن	۸۷۰۴۴

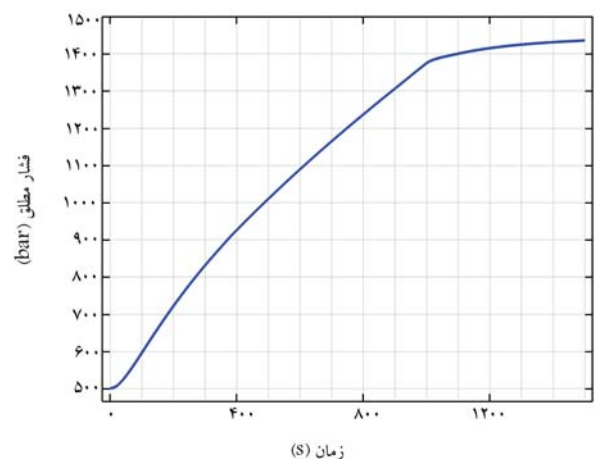


شکل ۱۰. تغییرات فشار در گذر زمان برای گاز آرگون و نیتروژن.

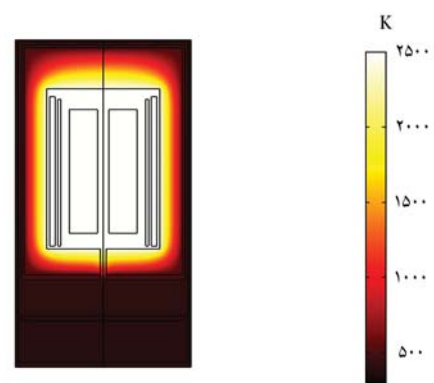
حرارتی گاز در مقایسه با اینرسی سایر اجزای کوره کم تر است؛ اما با دانستن مقدار جرم گاز داخل کوره می توان در خصوص سایر مسائل مثل هزینه ی مربوط به تأمین گاز و توان مصرفی کمپرسور اطلاعات دقیق تری به دست آورد. جرم گاز آرگون و نیتروژن مورد استفاده در داخل کوره در جدول ۱ گزارش شده است.

یکی از مسائل مورد مطالعه در این پروژه، مقایسه تغییرات فشار در اثر تغییر نوع گاز است. با توجه به تفاوت در مقدار ضریب تراکم پذیری گازهای مختلف، انتظار می رود تغییرات چگالی و در نتیجه تغییرات فشار متفاوت باشند. با توجه به شکل ۱۰ تغییرات فشار گاز نیتروژن از گاز آرگون کم تر است (حدود ۱۰۰ بار).

در شکل ۱۱ تغییرات دمایی گازهای آرگون و نیتروژن بر حسب زمان با یکدیگر مقایسه شده اند. نتایج به دست آمده تفاوت چشمگیر و قابل ملاحظه یی میان تغییرات متوسط دما بر حسب زمان برای گاز آرگون و نیتروژن نشان نمی دهد. علت این امر تأثیر کم انتقال حرارت رسانشی و اینرسی حرارتی پایین ماده در فاز گازی است که



شکل ۷. نمودار تغییرات فشار گاز آرگون بر حسب زمان (با استفاده از شرایط مرزی و اولیه پیش فرض).



شکل ۸. کانتور توزیع دما در داخل کوره در ثانیه ۱۵۰۰ با استفاده از شرایط مرزی و اولیه پیش فرض.

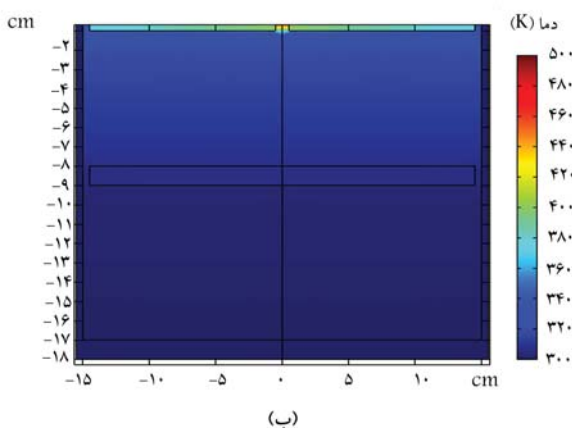
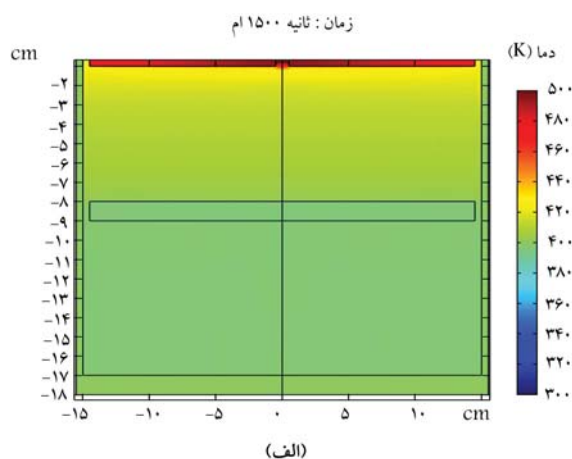
عمدتاً از نوع رسانشی است. در نتیجه با توجه به مقدار کم رسانایی حرارتی گاز و عایق، زمان زیادی لازم است تا حرارت به بخش های پایین تر نفوذ پیدا کند. در شکل ۹ الف کانتور توزیع سرعت گاز آرگون در داخل کوره، در ثانیه ۵۰۰ نشان داده شده است. در این لحظه، از آن جا که هنوز رفتار کوره به حالت پایا نرسیده است، جریان جابه جایی آزاد در داخل کوره برقرار است و لذا سرعت در ناحیه ی گرم بیشتر است.

از ثانیه ۱۵۰۰ به بعد (شکل ۹ ب)، جایی که رفتار کوره شبه پایا شده است، سازوکار غالب انتقال حرارت تشعشع خواهد بود و جابه جایی آزاد در داخل ناحیه ی گرم ضعیف می شود. با این وجود، در خارج از ناحیه ی گرم، چون مرزها دمای پایینی دارند، کماکان انتقال حرارت جابه جایی آزاد برقرار بوده و نوسانات جریان سیال مشاهده می شود. با توجه به این نکته می توان گفت که رفتار کوره هیچگاه مطلقاً پایا نمی شود و همواره مقدار کوچکی از نوسان در نتایج حل وجود خواهد داشت. (این شرایط که در آن میزان تبادل حرارتی سیستم با محیط اطراف و همچنین تغییرات دمایی ناحیه گرم ثابت شده اما جریان های گردابه یی و نوسانی در آن وجود دارد در این نوشتار حالت شبه پایا نامیده شده است).

## ۲.۸. بررسی تأثیر گاز مورد استفاده در داخل کوره

میزان جرم گاز در واکنش حرارتی سیستم تأثیر زیادی نخواهد داشت چرا که اینرسی





شکل ۱۲. الف) دمای دیواره‌ی آبگردد ۴۰۰ کلوین؛ ب) دمای دیواره آبگردد ۳۰۰ کلوین.

سیال می‌شود. این موضوع مبین حساسیت بالای فشار سیستم به عملکرد سامانه آبگردد و خنک‌کاری است. در چنین شرایطی، سامانه کنترلی کوره بایستی قادر باشد با سازوکار مجزایی فشار تعیین شده در سیستم را تأمین کند.

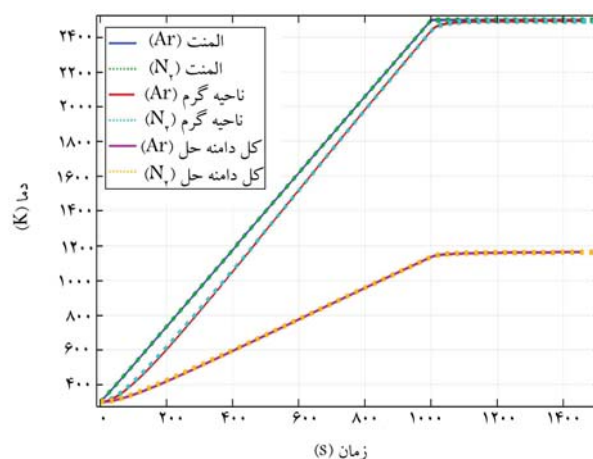
به منظور بررسی علت این پدیده کانتورهای توزیع دما و چگالی سیال در مجاورت سینی‌های مولیدنی زیرین کوره که در نزدیکی دیواره‌ی آبگردد (ناحیه‌ی سرمایشی) قرار دارند ارائه شده است. با توجه به شکل ۱۲ مشاهده می‌شود که علت کم‌تر بودن فشار گاز در حالتی که دمای دیواره آبگردد برابر با ۳۰۰ کلوین است، کم‌تر بودن دمای قسمت‌های مجاور سینی و ناحیه‌ی سرمایشی است.

لازم به ذکر است که در ادامه‌ی حل، در کلیه حالت‌ها، به منظور پیشینه شدن شار حرارتی خروجی از دیواره آبگردد، دمای آن برابر با ۳۰۰ کلوین در نظر گرفته شده است.

#### ۴.۸. بررسی تأثیر سیر حرارتی بر رفتار سیستم

در برخی از انواع کوره‌های پرس گرم در مقابل المنت حرارتی از یک سیر حرارتی استفاده می‌شود.<sup>[۶۵]</sup> در ادامه، تأثیر عدم وجود سیر و نیز استفاده از دو جنس مختلف گرافیتی و مولیدنی برای آن بررسی شده است. در شکل ۱ موقعیت قرارگیری سیر در هندسه‌ی کوره نشان داده شده است.

در ابتدا چگونگی توزیع جریان و تغییرات سرعت سیال در داخل کوره بررسی شده است. چنانچه در شکل ۱۳ نشان داده شده است، در صورت عدم استفاده از سیر، توزیع سرعت یکنواخت‌تر خواهد بود که این مسئله به معنای انتقال حرارت



شکل ۱۱. بررسی تغییرات دمای سطح المنت، دمای ناحیه‌ی گرم و متوسط گاز در حضور گاز آرگون و نیتروژن.

جدول ۲. مطالعه‌ی تأثیر تغییر شرایط مرزی دیواره آبگردد.

عنوان		دمای دیواره‌ی آبگردد	
		۳۰۰ کلوین	۴۰۰ کلوین
شار حرارتی خروجی از ناحیه سرمایش (W)		۴۸۷۱	۴۵۱۵
		۲۴۹۴	۲۴۹۴
دمای ناحیه گرم کوره (K)		۱۱۰۱	۱۱۶۳
		۱۰۲۳	۱۳۴۷
متوسط دمای گاز در کل فضای داخلی (K)			
فشار سیال (bar)			

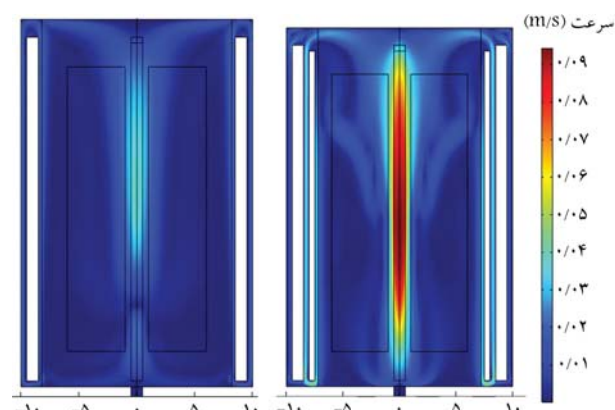
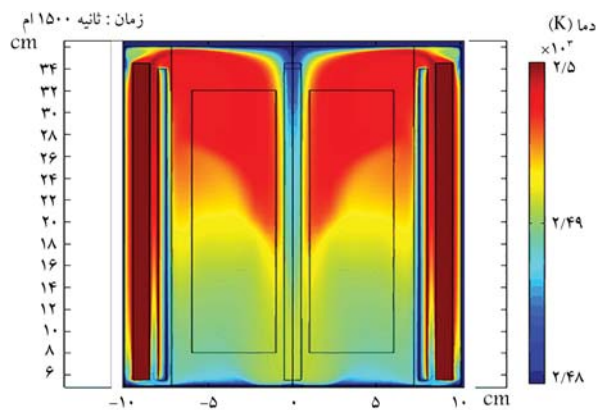
باعث می‌شود تغییر در جرم گاز، اثر قابل توجهی بر رفتار دمایی آن نداشته باشد.

#### ۳.۸. بررسی تأثیر تغییر شرایط مرزی دیواره آبگردد بر پاسخ مسئله

تعیین شرط مرزی مناسب روی دیواره‌ی آبگردد از این جهت که در طراحی مبدل حرارتی نقش دارد حائز اهمیت است. پیش‌تر مسئله برای حالت دمای دیواره ثابت (برابر با ۴۰۰ کلوین) حل شده است. در ادامه تأثیر استفاده از شرط مرزی دما ثابت ۳۰۰ کلوین روی دیواره آبگردد بررسی شده است.

در جدول ۲ شار حرارتی خروجی از دیواره آبگردد، متوسط دمای کل گاز، متوسط دمای ناحیه گرم و فشار حالت شبه پایای سیستم نشان داده شده است. بر اساس نتایج به دست آمده، در حالت شبه پایای کوره، شار حرارتی خروجی از دیواره آبگردد با تغییر دمای آن از ۴۰۰ به ۳۰۰ کلوین حدود ۱۰ درصد افزایش پیدا کرده است. از سویی، تغییر شرط مرزی دیواره آبگردد، تأثیر به‌سزایی در متوسط دمای ناحیه گرم نداشته است (کم‌تر از ۱ کلوین)؛ اما متوسط دمای گاز در کل فضای کوره، با فرض استفاده از شرط مرزی دما ثابت ۳۰۰ کلوین، در حدود ۶۰ درجه کلوین نسبت به قبل کاهش یافته است.

همچنین فشار حالت شبه پایای سیال در ازای شرط مرزی دمای دیواره ۳۰۰ کلوین و دمای دیواره ۴۰۰ کلوین به ترتیب برابر با ۱۰۴۸ و ۱۴۲۲ بار بوده است. به بیان دیگر کاهش ۱۰۰ درجه‌ی دمای دیواره موجب کاهش ۲۶ درصدی فشار



الف) سیر گرافیتی؛ ب) فاقد سیر گرافیتی.

شکل ۱۳. الف) توزیع اندازه‌ی سرعت سیال در حالت وجود سیر گرافیتی در حالت پایا؛ ب) توزیع اندازه‌ی سرعت سیال در نبود سیر حرارتی در حالت پایا.

جابه‌جایی ضعیف‌تر با قطعه‌ی تعبیه شده در مرکز کوره است. در صورت استفاده از سیر، جریان سیال، در فضای محدود بین سیر و المنت سرعت گرفته و در قسمت بالایی کوره به سمت مرکز کوره پرتاب می‌شود که این امر عامل غیر یکنواختی بیشتر در توزیع سرعت سیال است.

به طریق مشابه، درخصوص توزیع دما، استفاده از سیر باعث می‌شود تا جریان داغ به سمت خط مرکزی کوره هدایت شود. بنابراین در حالتی که از سیر استفاده نشود توزیع دما یکنواخت‌تر است (شکل ۱۴)؛ بنابراین به نظر می‌رسد در شرایطی که نیاز به انتقال حرارت جابه‌جایی با شدت بیشتری باشد، استفاده از سیر می‌تواند مؤثر واقع شود.

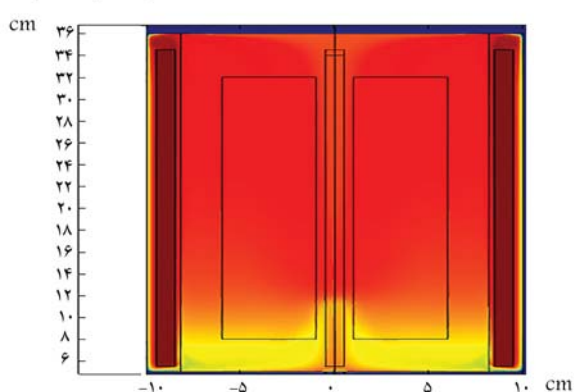
در شکل ۱۵، تأثیر هر یک از حالت‌های مورد بحث بر شار حرارتی جذب شده توسط دیواره‌ی سرد بررسی شده است. چنانچه مشاهده می‌شود، در صورتی که سیر حرارتی در کوره وجود نداشته باشد، شار بیشتری از دیواره آبرگرد خارج می‌شود. زمانی که سیر وجود نداشته باشد، توزیع دما در ناحیه گرم یکنواخت‌تر شده و مقدار دما نیز بیشتر می‌شود. این موضوع سبب می‌شود تا حرارت بیشتری از ناحیه‌ی گرم به بخش سینی‌های زیرین و ناحیه‌ی دیواره‌ی آبرگرد منتقل بشود و در نتیجه دمای این نواحی نیز در حالت بدون سیر بیشتر باشد (شکل ۱۶). لذا می‌توان انتظار داشت که نرخ انتقال حرارت خروجی از کوره نیز در حالت بدون سیر بیشتر باشد. همچنین در صورت استفاده از سیر گرافیتی، پیش از رسیدن به حالت شبه پایا مشاهده می‌شود که حرارت بیشتری از دیواره دفع می‌شود (در مقایسه با سیر مولیبدنی). علت این امر را می‌توان تابش بیشتر گرافیت نسبت به مولیبدن و انتقال حرارت از آن به دیواره دانست.

در شکل ۱۷ تأثیر وجود و جنس سیر حرارتی بر فشار گاز آرگون بررسی شده است. با توجه به این که متوسط دمای کل گاز و دمای گاز در ناحیه‌ی گرم در نبود سیر حرارتی بیشتر از سایر حالات است لذا مشاهده می‌شود که فشار نهایی گاز نیز در این حالت بیشتر خواهد بود.

## ۵.۸. بررسی تأثیر مقدار ضریب رسانش حرارتی عایق بر رفتار سیستم

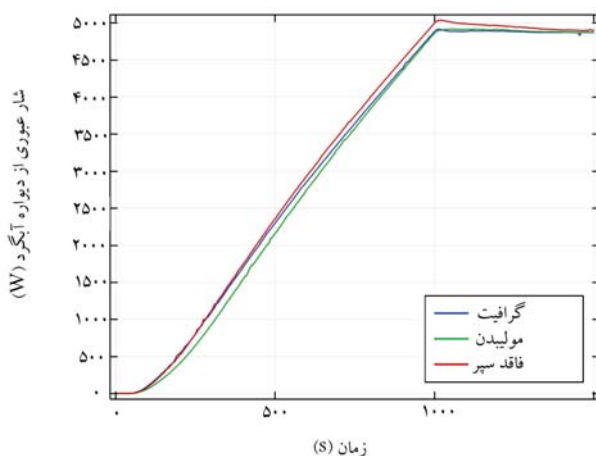
یکی از عوامل مؤثر بر عملکرد کوره‌های پرس گرم، ضریب رسانش حرارتی عایق مورد استفاده در آن است. استفاده از عایق حرارتی با ضریب رسانشی کوچک، منجر

الف) سیر گرافیتی؛ ب) فاقد سیر گرافیتی.



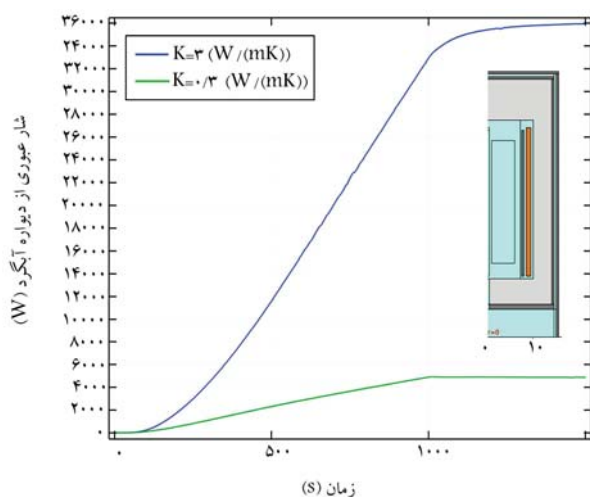
ب) فاقد سیر گرافیتی.

شکل ۱۴. الف) توزیع دما در حالت وجود سیر گرافیتی در حالت پایا؛ ب) توزیع دما در نبود سیر حرارتی در حالت پایا.

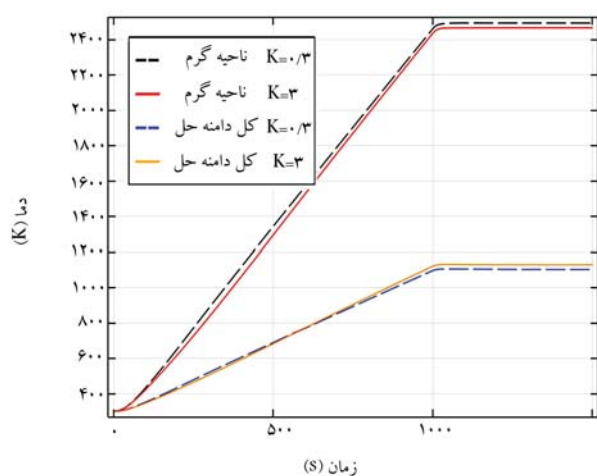


شکل ۱۵. بررسی تأثیر وجود و جنس سیر حرارتی بر شار خروجی از ناحیه سرمایش.

به کاهش میزان اتلاف حرارتی می‌شود. از سویی اگر ضریب رسانش حرارتی عایق بیش از اندازه کوچک باشد، مرحله‌ی سرد شدن محفظه طولانی مدت خواهد بود. تمام نتایجی که پیش‌تر ارائه شده، با فرض استفاده از عایق، با ضریب هدایت حرارتی  $0.3 \text{ W/m.K}$  به دست آمده است. عایق مورد استفاده در کوره باید در برابر تنش‌های حرارتی و چرخه‌های حرارتی از مقاومت مکانیکی خوبی برخوردار باشد و در عین حال تحمل دمای ناحیه گرم را نیز دارا باشد. در کوره‌های دما بالا، از



شکل ۱۸. مقایسه‌ی مقدار شار حرارتی خروجی از ناحیه‌ی سرمایش با در نظر گرفتن ضریب رسانش حرارتی  $0.3^\circ\text{C}$  و  $3^\circ\text{C}$  وات بر متر کلوین برای عایق.

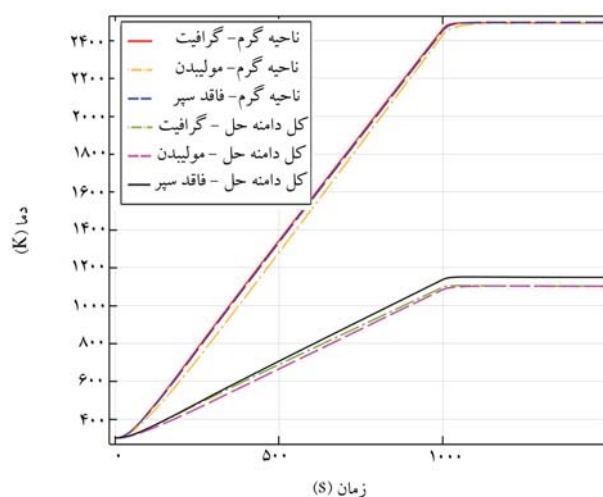


شکل ۱۹. مقایسه‌ی متوسط دمای گاز در کل هندسه‌ی حل و نیز متوسط دمای گاز در ناحیه‌ی گرم در ازای مقادیر مختلف ضریب رسانش حرارتی عایق.

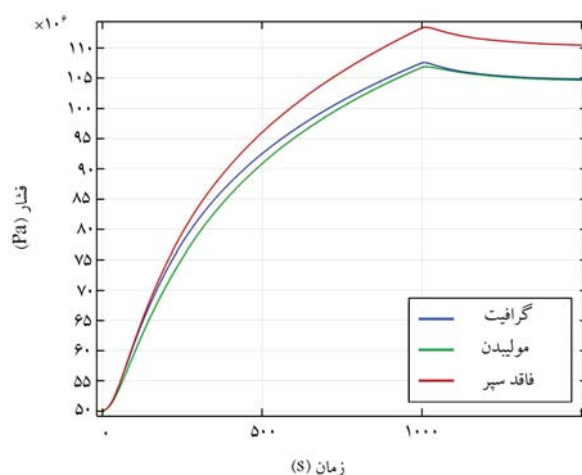
محفظه گرم کاهش می‌یابد اما متوسط دمای کل کوره افزایش یافته است. علت این امر را می‌توان بالاتر رفتن دمای قسمت زیرین کوره (گاز موجود در مجاورت سینی‌های دستگاه) بر اثر افزایش انتقال حرارت از طریق دیواره‌ی عایق به قسمت زیرین دانست (شکل ۲۰). در شکل ۲۱ کانتور توزیع دما در داخل کوره نشان داده شده است. با افزایش ضریب رسانش حرارتی مشاهده می‌شود که دمای دیواره افزایش یافته و حرارت به سمت ناحیه سرد (قسمت زیرین کوره) نیز منتقل شده است.

#### ۶.۸. بررسی تأثیر تغییر شرایط اولیه بر نتایج مسئله

یکی از عوامل مؤثر بر فشار نهایی گاز داخل کوره در حالت شبه پایا، فشار اولیه است. به منظور بررسی تأثیر فشار اولیه بر پاسخ شبه پایای کوره، مسئله با استفاده از مقادیر مختلف  $700^\circ\text{C}$ ،  $800^\circ\text{C}$  و  $900^\circ\text{C}$  بار برای فشار اولیه حل شده و نتایج به دست آمده با نتیجه حاصل از فشار اولیه برابر با  $500^\circ\text{C}$  بار مقایسه شده است. تغییرات فشار گاز آرگون بر حسب زمان، در ازای مقادیر مختلف فشار اولیه در شکل ۲۲ نشان داده شده است.



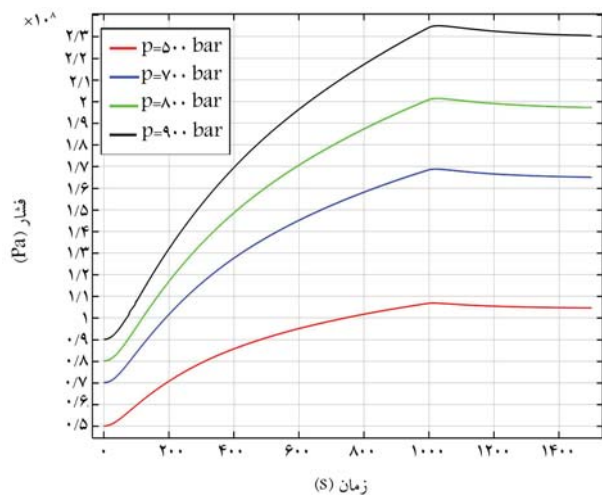
شکل ۱۶. تأثیر استفاده از سپر حرارتی بر تغییرات دما.



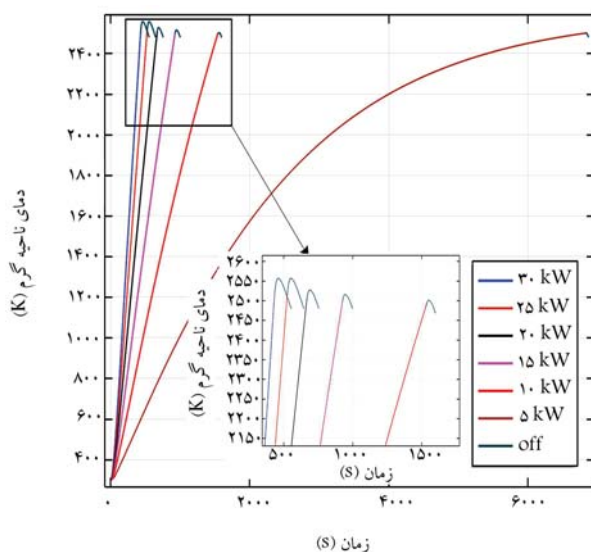
شکل ۱۷. بررسی تأثیر سپر حرارتی بر فشار گاز آرگون.

گرافیت به عنوان عایق حرارتی استفاده می‌شود. گرافیت دارای ضریب رسانش بالایی (بزرگ‌تر از  $25^\circ\text{C}$  وات بر متر کلوین) است. با استفاده از برخی راهکارهای نوآورانه می‌توان ضریب رسانش حرارتی گرافیت را تا حدود  $3^\circ\text{C}/\text{W/m.K}$  یا کمتر کاهش داد. برای پاسخ به این که در صورت استفاده از عایق با ضریب رسانش حرارتی بالا، رفتار سیستم چه تغییری می‌کند، در ادامه و به عنوان نمونه تأثیر استفاده از عایق با ضریب رسانش حرارتی  $3^\circ\text{C}/\text{W/m.K}$  در حضور گاز آرگون بررسی شده است. در شکل ۱۸ مقدار شار حرارتی خروجی از ناحیه‌ی سرمایش بررسی شده است. مشاهده می‌شود که با تغییر ضریب رسانش حرارتی عایق از  $0.3^\circ\text{C}$  به عدد  $3^\circ\text{C}$ ، شار حرارتی دیواره‌ی سرد در حالت شبه پایا از حدود  $450^\circ\text{C}$  وات به حدود  $3600^\circ\text{C}$  وات تغییر کرده است. این مسئله به معنی نیاز به سامانه‌ی سرمایشی به مراتب قوی‌تر است که ممکن است با الزامات فنی سازه‌ی کوره سازگار نباشد.

در شکل ۱۹ دمای متوسط محفظه گرم و نیز دمای متوسط کل محفظه برای هر دو حالت ضریب رسانش عایق بررسی شده است. اگرچه تغییرات رفتاری دمای کوره در حالت شبه پایا با تغییر ضریب رسانش حرارتی عایق تغییر زیادی نمی‌کند، براساس انتظاری که از عملکرد دستگاه و دقت آن وجود دارد، تغییرات اندک دمای نیز می‌تواند حائز اهمیت باشد. چنانچه انتظار می‌رود، با افزایش ضریب رسانش حرارتی عایق و در نتیجه افزایش شار حرارتی خروجی از دیواره آبگردد، دمای متوسط



شکل ۲۲. تغییرات فشار گاز آرگون بر حسب زمان در ازای مقادیر مختلف فشار اولیه.



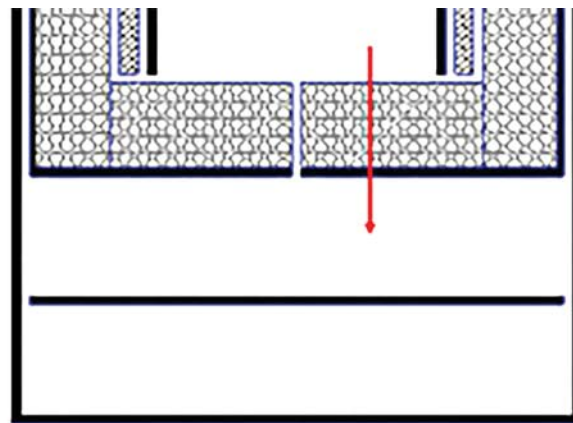
شکل ۲۳. تغییرات متوسط دما در ناحیه گرم با گذر زمان طی دو گام متوالی ناحیه‌ی سبز رنگ، پاسخ سیستم در حالت خاموش بودن المنت را نشان می‌دهد.

شده و در ادامه تغییرات دمای ناحیه گرم و المنت بر حسب زمان مورد بررسی قرار گرفته است. لازم به ذکر است که در این قسمت، معیار توقف حل، رسیدن متوسط دمای ناحیه گرم به مقدار  $2500^{\circ}\text{K}$  کلون بوده است.

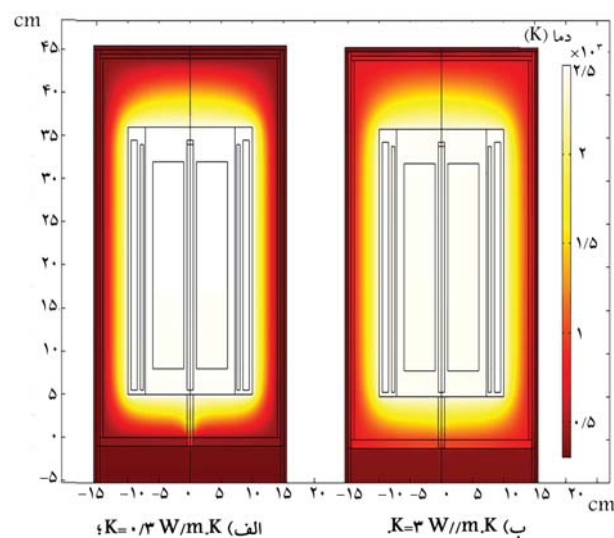
با رسیدن متوسط دمای ناحیه گرم به عدد  $2500^{\circ}\text{K}$ ، المنت خاموش شده و رفتار گذرای کوره در لحظات ابتدایی فرایند سرمایش تا جایی که متوسط دمای ناحیه گرم برابر با  $2480^{\circ}\text{K}$  کلون (این مقدار به صورت اختیاری انتخاب شده است) شود بررسی شده است.

در این قسمت فشار اولیه کوره برابر با  $80^{\circ}\text{K}$  و دمای دیواره آبگرد برابر با  $300^{\circ}\text{K}$  کلون در نظر گرفته شده است. با توجه به شکل ۲۳ در حالتی که میزان شار المنت زیاد باشد، دمای ناحیه‌ی گرم به صورت خطی و در مدت زمان کوتاهی به  $2500^{\circ}\text{K}$  درجه کلون می‌رسد. در مقابل اگر شار المنت کم باشد (به ویژه در حالت شار ۵ کیلووات) مدت زمان زیادی برای رسیدن به دمای  $2500^{\circ}\text{K}$  کلون نیاز است و تغییرات دمای سیستم نیز خطی نیست.

رفتار سیستم پس از خاموشی المنت در تمامی نمودارها با رنگ سبز نمایش



شکل ۲۰. افزایش انتقال حرارت به قسمت زیرین کوره از طریق عایق با افزایش ضریب رسانش حرارتی عایق.



شکل ۲۱. مقایسه‌ی توزیع دما برای دو ضریب رسانش حرارتی مختلف برای عایق.

با توجه به شکل ۲۲ می‌توان گفت که میان مقدار فشار حالت شبه پایای کوره و فشار اولیه گاز آرگون یک رابطه‌ی خطی برقرار است. معادله‌ی ریاضی حاکم بر فشار حالت شبه پایا برحسب فشار اولیه مطابق با رابطه‌ی ۱۷ است. در این رابطه،  $P_s$  معرف فشار حالت شبه پایای کوره و  $P_i$  بیان‌گر فشار اولیه‌ی کوره برحسب بار است. ضریب رگرسیون این معادله برابر با ۹۹/۹۶ درصد است.

$$P_s = 3.1317P_i - 528.74 \quad (17)$$

به عنوان مثال چنانچه هدف دست‌یابی به فشار تقریبی  $2000^{\circ}\text{K}$  بار در حالت شبه پایای کوره باشد، لازم است تا فشار اولیه برابر با  $800^{\circ}\text{K}$  بار انتخاب شود. لازم به ذکر است که در ادامه‌ی مقاله، نتایج ارائه شده بر مبنای فشار اولیه برابر با  $800^{\circ}\text{K}$  بار است. تغییرات فشار اولیه تأثیر قابل توجهی بر سایر نتایج ندارد.

## ۷.۸. بررسی تأثیر تغییر شرایط مرزی المنت بر پاسخ مسئله

پیش‌تر مسئله با فرض شرط مرزی دما ثابت برای المنت حرارتی حل شده و تأثیر استفاده از شرط مرزی شار ثابت روی المنت حرارتی بررسی شده است. به این منظور از مقادیر مختلف شار برای المنت، در بازه ۵ تا  $300^{\circ}\text{K}$  کیلووات با گام ۵ استفاده

جدول ۳. مدت زمان لازم برای تغییرات دمایی در ازای مقادیر مختلف شار، افزایش دما تا ۲۵۰۰ کلوین و کاهش دما به ۲۴۸۰ کلوین.

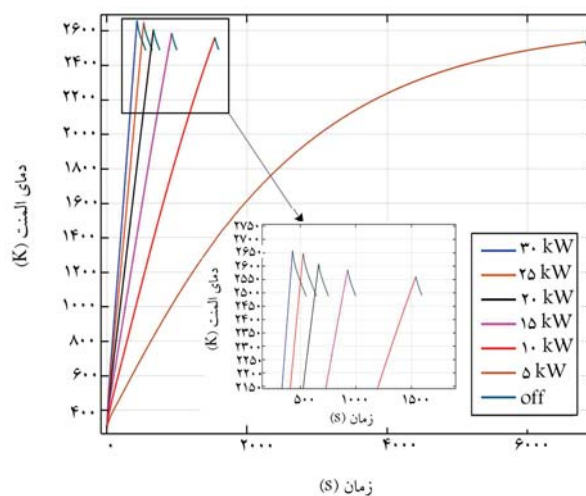
شارالمنت (KW)	زمان رسیدن متوسط دمای ناحیه گرم به ۲۵۰۰ کلوین	زمان بازگشت متوسط دمای ناحیه گرم به ۲۴۸۰ کلوین
بر حسب ثانیه	بر حسب ثانیه	بر حسب ثانیه
۵	۶۸۳۰	۳۵
۱۰	۱۵۴۰	۵۳
۱۵	۹۲۵	۷۳
۲۰	۶۶۵	۸۹
۲۵	۵۲۵	۱۲۰
۳۰	۴۳۰	۱۲۳

حرارتی پرس گرم به صورت عددی مطالعه شده است. در این مقاله، به منظور افزایش دقت حل مسئله از مدل ترمودینامیکی گاز واقعی استفاده شده و معادلات پیوستگی، مومنتوم، آشفستگی و انرژی به صورت همزمان توسط نرم افزار کامسول حل شده و انتقال حرارت با استفاده از رسانش، جابه جایی و تشعشع انجام شده است. همچنین ضمن مطالعه‌ی رفتار کوره بر اساس شرایط مرزی و اولیه پیش فرض، تأثیر تغییر جنس گاز، دمای دیواره آبرگرد، وجود یا عدم وجود سپر حرارتی، شرایط مرزی المنت و نیز فشار اولیه بر رفتار کوره‌ی حرارتی پرس گرم بررسی شده است.

تغییر جنس گاز تأثیر قابل ملاحظه‌یی بر رفتار دمایی کوره نداشته و فشار حالت شبه پایای کوره را نیز چندان دستخوش تغییر نمی‌کند. با این وجود، مقدار جرم کل گاز موجود در داخل کوره با افزایش چگالی گاز بیشتر می‌شود که این مسئله در اندازه و قیمت کمپرسور و دیگر تجهیزات تولید فشار مؤثر است.

کاهش دمای دیواره‌ی آبرگرد بر متوسط دمای محفظه‌ی گرم تأثیر به سزایی ندارد، اما کاهش ۱۰۰ درجه‌یی دمای آن منجر به افزایش ۱۰ درصدی حرارت خروجی از کوره و نیز کاهش ۶۰ درجه‌یی متوسط دمای کل کوره می‌شود. مهم‌ترین تأثیر عملکرد سامانه آبرگرد بر فشار نهایی کوره است. با تغییر دمای دیواره آبرگرد از ۴۰۰ کلوین به مقدار ۳۰۰ کلوین، فشار حالت شبه پایای کوره ۳۲۴ بار (در حدود ۲۵ درصد) کاهش یافته است.

استفاده از سپر حرارتی، ضمن آن که منجر به کاهش حرارت خروجی از کوره می‌شود، چگونگی توزیع سرعت و دما در داخل کوره را دستخوش تغییر می‌کند. وجود سپر حرارتی باعث می‌شود که جریان داغ به سمت خط مرکزی کوره هدایت شود. چنانچه از سپر حرارتی استفاده نشود، توزیع دما و سرعت یکنواخت تر است. تغییرات ضریب رسانش حرارتی عایق تأثیر به سزایی بر دمای حالت شبه پایای کوره ندارد، اما منجر به تغییرات قابل توجهی در مقدار حرارت خروجی از کوره می‌شود. فشار اولیه‌ی کوره، با فشار نهایی و شبه پایای کوره یک رابطه‌ی خطی دارد. چنانچه از شرط مرزی شار ثابت بر روی المنت استفاده شود، با افزایش شار حرارتی، مدت زمان رسیدن دمای داخل کوره به یک مقدار مشخص، کاهش می‌یابد. چنانچه شارالمنت بالا باشد، حتی پس از خاموش شدن المنت نیز، به دلیل بالاتر بودن دمای المنت نسبت به گاز داخل کوره، افزایش دمای محفظه گرم متوقف نمی‌شود؛ اما اگر بزرگی شارالمنت کوچک باشد، فرایند سرمایش بلافاصله آغاز می‌شود.



شکل ۲۴. متوسط دمای گاز بر روی المنت حرارتی در گذر زمان در شرایط شارهای ثابت ۵ تا ۳۰ کیلووات روی المنت.

داده شده و به منظور بررسی دقیق‌تر، تصویر آن بزرگ‌نمایی شده است. در مواردی که شارالمنت زیاد بوده، حتی پس از خاموش شدن المنت نیز برای مدتی دمای ناحیه‌ی گرم افزایش یافته است. با توجه به شکل ۲۴ و مقایسه آن با شکل ۲۳ می‌توان گفت تأخیر زمانی پاسخ سیستم، تفاوت دمایی بین المنت و ناحیه‌ی گرم در زمانی است که دمای ناحیه‌ی گرم به ۲۵۰۰ می‌رسد (دمای المنت بالاتر است)؛ اما این پدیده در شارهای پایین المنت (به ویژه شار ۵ کیلووات) مشاهده نمی‌شود.

در نتیجه مدت زمان بیشتری طول می‌کشد تا متوسط دمای ناحیه گرم از ۲۵۰۰ به ۲۴۸۰ کلوین برسد. در جدول ۳ مدت زمان رسیدن ناحیه گرم به ۲۵۰۰ کلوین و نیز مدت زمان کاهش دما از ۲۵۰۰ به ۲۴۸۰ کلوین در حالت‌های مختلف گزارش شده است.

## ۹. نتیجه‌گیری

کوره‌ی حرارتی پرس گرم یکی از فرایندهای مورد استفاده در متالورژی پودر است که در دما و فشار بالا کار می‌کند. از این رو مطالعه‌ی تجربی عملکرد دستگاه هزینه‌ی زیادی در بر دارد. در این پژوهش، عملکرد هندسه خاصی از یک کوره‌ی

## پانویسها

1. hot isostatic pressure (HIP)
2. forging
3. quenching
4. tempering
5. dwell
6. dwell time
7. tungsten-rhenium
8. rhodium
9. akerberg
10. 2-D axisymmetric
11. avure technologies
12. Xiaoping
13. maniere
14. sintering furnace
15. chandras
16. non-isothermal flow
17. heat transfer with surface-to-surface radiation
18. graphite felt
19. shield
20. hot zone
21. skewness
22. aspect ratio
23. Catton
24. evans
25. Van Eck

## منابع (References)

1. Brook, Richard.J., ed. "Concise encyclopedia of advanced ceramic materials", Elsevier (2012).
2. Bocanegra-Bernal, M. "Hot isostatic pressing (HIP) technology and its applications to metals and ceramics", *Journal of Materials Science*, **39**(21), pp. 6399-6420 (2004).
3. Gopinathan, M., Mehra, R.K., and Runkle, J.C. "Hot isostatic pressing furnaces", *IEEE Control Systems Magazine*, **20**(6), pp. 67-82 (2000).
4. Moritoki, M. and et al. "Heat insulator for hot isostatic pressing apparatus", Kabushiki Kaisha Kobe Seiko Sho, Kobe, Japan (1986).
5. Nakai, t., Yoneda, M., Masuoka, I. and et al. "Hot isotropic pressure devise", Kobe Steel, Ltd., Kobe-shi (JP) (2014).
6. Ahlfors, M. and et al. "High pressure heat treatment-phase transformation under isostatic pressure in HIP", *Hot Isostatic Pressing: HIP'17*, **10**, p. 149 (2019).
7. Åkerberg, A., *CFD Analyses of the Gas Flow Inside the Vessel of a Hot Isostatic Press* (2012).
8. Wu, X., Zhang, Y., He, X. and et al.. "Analysis of flow and heat transfer in the furnace of hot isostatic press", *China Metalforming Equipment & Manufacturing Technology*, **51**(6), pp. 39-44 (2016).
9. Manière, C., Zahrah, T. and Olevsky, E.A. "Fluid dynamics thermo-mechanical simulation of sintering: uniformity of temperature and density distributions", *Applied Thermal Engineering*, **123**, pp. 603-613 (2017).
10. Chandras, A. and Sonawane, C. "Numerical simulation of hot isostatic pressing process utilized during sintering of tool inserts", in *Advances in Industrial and Production Engineering*, Springer. pp. 101-115 (2019).
11. Bosque, E., Trociewitz, U. and English, L. "An Overpressure furnace: understanding performance and analysis-led design improvements", *In Excerpt From the Proceedings of the 2019 COMSOL Conference*, Boston (2019).
12. Redlich, O. and Kwong, J.N. "On the thermodynamics of solutions. V. An equation of state. fugacities of gaseous solutions", *Chemical Reviews*, **44**(1), pp. 233-244 (1949).
13. Barati, H. and et al. "Assessment of different turbulence models for the motion of non-metallic inclusion in induction crucible furnace", *In IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, IOP Publishing (2016).
14. Mikhailenko, S.A., Miroshnichenko, I.V. and Sheremet, M.A. "Thermal radiation and natural convection in a large-scale enclosure heated from below: Building application", *In Building Simulation*, Springer (2021).
15. Tighchi, H.A., Sobhani, M. and Esfahani, J.A. "Effect of volumetric radiation on natural convection in a cavity with a horizontal fin using the lattice boltzmann method", *The European Physical Journal Plus*, **133**(1), pp. 1-18 (2018).
16. Li, R. and et al. "Effect of surface radiation on natural convective flows and onset of flow reversal in asymmetrically heated vertical channels", *International Journal of Thermal Sciences*, **65**, pp. 9-27 (2013).
17. Catton, I. "Natural convection in enclosures", *In International Heat Transfer Conference Digital Library*, Begel House Inc (1978).
18. Evans, L., Reid, R. and Drake, E. "Transient natural convection in a vertical cylinder", *AIChE Journal*, **14**(2), pp. 251-259 (1968).
19. Van Eck, R., Klep, M. and Van Schijndel, J. "Surface to surface radiation benchmarks", *In Proceedings of the Comsol Conference*, Munich, Germany (2016).





# مطالعه‌ی عددی تأثیر افزایش شدت توربولانسی و تغییر زاویه‌ی پاشش سوخت بر عملکرد و آلایندگی موتور دیزل دریایی کاترپیلار

امیرحمزه فرج‌الهی\* (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی، دانشگاه امام علی (ع)

رضا فیروزی (کارشناس ارشد)

دانشکده‌ی فنی و مهندسی، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)

مهندسی مکانیک شریف، بهار ۱۴۰۱  
دوره ۳-۲، شماره ۱، ص. ۹۹-۱۱۳، (پادداشت فنی)

در این نوشتار، به بررسی تأثیر افزایش شدت توربولانسی و تغییر زاویه‌ی پاشش سوخت بر عملکرد و آلایندگی موتور دیزل دریایی کاترپیلار به کمک روش دینامیک سیالات محاسباتی در نرم‌افزار فایرپرداخته شده است. به منظور افزایش شدت توربولانسی از شیای درون نازل انژکتور استفاده شده و زاویه‌ی پاشش سوخت افزایش داده شده است. نتایج عددی شبیه‌سازی انژکتور و موتور دیزل در شرایط کارکردی با داده‌های تجربی مقایسه و تطابق خوبی بین آن‌ها مشاهده شده است. نتایج مربوط به عملکرد موتور دیزل نشان می‌دهد که ایجاد شیای، افزایش شدت توربولانسی و زاویه‌ی پاشش سوخت منجر به افزایش ۷۵ درصدی توان و گشتاور تولیدی و کاهش ۳۷ درصدی مصرف سوخت نسبت به نازل استوانه‌یی سوخت می‌شود. همچنین نتایج مربوط به آلایندگی این موتور دیزل دریایی نشان می‌دهد که در این حالت آلایندگی مونوکسید کربن و اکسید نیتروژن به مقدار ۴۲/۷۳ درصد و ۴۵/۴۵ درصد کاهش می‌یابد.

واژگان کلیدی: موتور دیزل دریایی، جریان چرخشی، شدت توربولانسی، زاویه‌ی پاشش سوخت، آلایندگی.

## ۱. مقدمه

موتورهای دیزل در مقایسه با سایر موتورهای احتراق داخلی دارای نسبت تراکم، راندمان، گشتاور و توان تولیدی بالاتر و مصرف سوخت نسبتاً پایین‌تری هستند؛ به همین علت در صنایع مختلف نظامی و حمل و نقل دریایی کاربرد نسبتاً گسترده‌یی دارند. با توجه به کاربرد گسترده این نوع موتورها در صنایع دریایی و همچنین وضع قوانین سخت‌گیرانه از لحاظ آلایندگی محیط زیست و همچنین محدود بودن منابع سوخت‌های فسیلی و افزایش هزینه‌ی آن‌ها در سال‌های اخیر، تلاش برای بهینه‌سازی احتراق به منظور کاهش هم‌زمان مصرف سوخت و آلایندگی آن‌ها به همراه بهبود عملکرد موتور همواره مد نظر طراحان موتور و پژوهش‌گران در صنایع دریایی قرار داشته و دارد. تاکنون روش‌های مختلفی برای بهینه‌سازی احتراق موتورهای احتراق داخلی مانند پاشش‌های چندمرحله‌یی، به کارگیری سوخت‌های زیستی (بیوسوخت‌ها) و ترکیبی و ... ارائه شده است. هریک از این روش‌ها دارای مزایا و معایب خاصی هستند. بنابراین ارائه‌ی یک روش کامل‌تر (کاهش هم‌زمان آلایندگی، مصرف سوخت و افزایش توان و گشتاور تولیدی) برای بهینه‌سازی احتراق در موتورهای دیزل دریایی حائز اهمیت است.

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۹/۱۰/۶، اصلاحیه ۱۴۰۰/۶/۶، پذیرش ۱۴۰۰/۷/۱۷.

DOI:10.24200/J40.2021.57189.1573

## ۱.۱. مروری بر مطالعات انجام شده

در مطالعات گذشته تأثیر پارامترهای مختلف بر عملکرد و آلایندگی موتورهای احتراق تراکمی دیزل و همچنین سیستم‌های سوخت‌رسانی بررسی شده است.

احمدی و همکاران<sup>[۱]</sup> با بررسی تأثیر جایگزینی مقادیر مختلف هیدروژن به جای اهدی و همکاران<sup>[۱]</sup> با بررسی تأثیر جایگزینی مقادیر مختلف هیدروژن به جای دیزل بر عملکرد و آلایندگی موتور، دریافتند که جایگزینی هیدروژن موجب تأخیر در شروع احتراق و رشد نرخ افزایش فشار و افزایش حرارت آزاد شده خواهد شد ولی این افزایش فشار منجر به پدیده‌ی کوبش نخواهد شد.

شروانی تبار و همکاران<sup>[۲]</sup> برای بررسی عددی اثر تابع پاشش سوخت بر عملکرد موتور، شش تابع پاشش سوخت مختلف انتخاب کردند و نشان دادند که با استفاده از توابع پاششی مناسب سوخت، توان موتور افزایش و مقدار آلایندگی‌های تولیدی آن کاهش می‌یابد. پاشش سوخت شبه‌مثلی در مقایسه با نرخ پاشش ثابت دارای عملکرد مناسب‌تری است و مصرف سوخت و ویژه در آن کاهش و مقدار توان آن افزایش می‌یابد. همچنین در این تابع، مقدار آلایندگی اکسید نیتروژن اندکی افزایش می‌یابد.

حسین‌پور و همکاران<sup>[۳]</sup> با استفاده از کد KIVAII، تأثیر پارامترهای پاشش

سوخت - از جمله زمان بندی پاشش، فشار پاشش و استفاده از خنک‌کن میانی - را بر عملکرد و تولید آلایندہ‌ها در یک موتور پاشش مستقیم و نیز تأثیر حالت خاصی از پاشش چندمرحله‌یی بر تولید آلایندہ‌ی اکسیدهای نیتروژن را مورد بررسی قرار دادند؛ در این حالت آلایندہ‌ی اکسید نیتروژن تا ۶ درصد کاهش یافت.

برگ استراند<sup>[۴]</sup> پنج نوع نازل با شکل‌های مختلف را بررسی کرد و نشان داد که نازل مخروطی همگرا به‌طورکلی دوده و گاز نیتروژن اکسید خروجی و مصرف سوخت کم‌تری نسبت به نازل استوانه‌یی دارد. همچنین نازل با قطر کوچک‌تر نسبت به نازل با قطر بزرگ‌تر دوده‌ی کم‌تری تولید می‌کند.

نیشیدا و همکاران<sup>[۵]</sup> به بررسی تجربی تأثیر فشار تزریق بالا بر مشخصه‌های افشانه‌ی سوخت دیزل - نظیر قطر متوسط ساتر، طول نفوذ و آشفتگی محیط تزریق - پرداختند. بدین منظور از سه فشار ۱۰۰۰ و ۲۰۰۰ و ۳۰۰۰ بار استفاده کردند و نشان دادند که ترکیب بهتر سوخت و هوا و فرایند آتمی شدن سوخت در فشارهای تزریق بالا با افزایش آشفتگی در محیط تزریق همراه بودند.

قبادیان و همکاران<sup>[۶]</sup> به بهینه‌سازی نسبت EGR، سوخت بیودیزل و شرایط کاری یک موتور دیزل تک‌سیلندر چهارزمانه با روش RSM پرداختند. در این بررسی، با استفاده از سامانه‌ی EGR، آلایندہ‌ی اکسیدهای نیتروژن حداکثر تا ۶۳/۷ درصد برای سوخت B۱۰ و نسبت EGR ۳۰ درصد کاهش یافت. همچنین استفاده هم‌زمان از سوخت بیودیزل و سامانه‌ی EGR موجب کاهش آلایندہ‌ی CO در دور موتورهای مختلف می‌شود.

فرج‌الهی و فیروزی<sup>[۷]</sup> رفتار جریان حفره‌زایی و پاشش سوخت دیزل را در یک محفظه‌ی احتراق حجم ثابت برای هندسه‌های مختلف سوراخ نازل و پروفیل‌های جابه‌جایی سوزن متفاوت، به‌منظور بهبود خواص افشانه‌ی سوخت و عملکرد موتور دیزل دریایی با کمک نرم‌افزار فایر بررسی کردند. نتایج عددی نشان داد که افزایش قطر و شعاع منحنی ورودی سوراخ نازل و مدت‌زمان باز بودن سوزن انژکتور سبب افزایش جرم سوخت پاشش و بخار شده و همچنین افزایش طول نفوذ افشانه می‌شوند.

مرور مقالات گذشته نشان می‌دهد که تأثیر پارامترهای مختلفی بر عملکرد و آلاینده‌ی موتورهای احتراق داخلی و همچنین سیستم‌های سوخت‌رسانی بررسی شده است ولی تاکنون تأثیر افزایش شدت توربولانسی به همراه تغییر زاویه‌ی پاشش سوخت درون محفظه‌ی احتراق موتور دیزل دریایی کاترپیلار صورت نگرفته است؛ که همین موضوع هدف مطالعه‌ی حاضر قرار گرفته است.

## ۲. معادلات حاکم

### ۲.۱. انژکتور

معادلات حاکم بر شبیه‌سازی جریان درون انژکتور شامل معادلات بقای جرم، مومنتوم و انرژی جنبشی آشفتگی است. با توجه به فرض هم‌دما بودن، از ارائه و حل معادله‌ی انرژی و تبادل بین حالتی آنتالپی صرف‌نظر شده است.<sup>[۸]</sup> معادله‌ی بقای جرم

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot \alpha_k \rho_k v_k = \sum_{l=1, k \neq l}^N \Gamma_{kl}, \quad k = 1, \dots, N \quad (۱)$$

که در آن،  $\alpha_k$  کسر حجمی فاز  $k$ ،  $v_k$  سرعت فاز  $k$  و  $\Gamma_{kl}$  بیان‌گر تبادل جرمی بین دو فاز  $k$  و  $l$  است.<sup>[۸]</sup>

معادله‌ی بقای مومنتم

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_k \rho_k v_k}{\partial t} + \nabla \cdot \alpha_k \rho_k v_k &= -\alpha_k \nabla p + \nabla \cdot \alpha_k (\bar{\tau}_k + \bar{T}_k^t) \\ &+ \alpha_k \rho_k \bar{f} + \sum_{l=1, k \neq l}^N M_{kl} + v_k \sum_{l=1, k \neq l}^N \Gamma_{kl}, \quad k = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (۲)$$

در معادله‌ی ۲،  $f$  بردار نیروی حجمی شامل نیروی جاذبه و اینرسی است.  $\tau_k$  بردار تنش برشی،  $T_k^t$  بردار تنش رینولدزی،  $M$  بیان‌گر اندرکنش مومنتوم بین حالت‌ها و  $p$  فشار استاتیکی است.<sup>[۸]</sup>

معادله‌ی انرژی جنبشی آشفتگی و نرخ اتلاف آشفتگی

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_k \rho_k K_k}{\partial t} + \nabla \cdot \alpha_k \rho_k v_k K_k &= \nabla \cdot \alpha_k \left( \mu_k + \frac{\mu_k^t}{\sigma_k} \right) \nabla K_k + \\ &\alpha_k p_k - \alpha_k \rho_k \varepsilon_k + \sum_{l=1, k \neq l}^N K_{kl} + K_k \sum_{l=1, k \neq l}^N \Gamma_{kl}, \quad k = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (۳)$$

در معادله‌ی ۳،  $k$  انرژی جنبشی آشفتگی،  $\mu_k$  لزجت ملکولی،  $\mu_{k,t}$  لزجت آشفتگی،  $\sigma$  کشش سطحی و  $\varepsilon$  نرخ تلفات آشفتگی است. تنش برشی فاز  $k$  برابر است با:

$$\tau_k = \mu_k \left[ \left( \nabla v_k + \nabla v_k^T \right) - \frac{2}{3} \nabla \cdot v_k \right] \quad (۴)$$

و تنش رینولدز برابر است با:

$$T_k^t = -\rho_k \overline{v_k' v_k'} = \mu_k^t \left[ \left( \nabla v_k + \nabla v_k^T \right) - \frac{2}{3} \nabla \cdot v_k \right] - \frac{2}{3} \rho_k K_k I \quad (۵)$$

لزجت آشفتگی  $(\mu_{k,t})$  نیز مطابق رابطه‌ی ۶ مدل می‌شود:

$$\mu_k^t = \rho_k C_\mu \frac{K_k}{\varepsilon_k} \quad (۶)$$

### ۲.۲. تبادل بین حالتی

با توجه به حفره‌زایی و جریان دوفازی سوخت درون انژکتور، معادلات تبادل بین حالتی جرم و مومنتوم نیز بررسی می‌شود. معادلات حاکم بر شبیه‌سازی تبادل بین حالتی، معادلات تبادل جرم و تبادل مومنتوم بین دو فاز مایع و بخار را شامل می‌شوند. با توجه به ثابت در نظر گرفتن دما، از ارائه و حل معادلات تبادل بین حالتی آنتالپی صرف‌نظر شده است.

#### ۲.۲.۱. تبادل بین حالتی جرم

تبادل جرم بین دو حالت مایع و بخار با مدل حفره‌زایی خطی مدل شده است. معادله‌ی حاکم عبارت است از:<sup>[۷]</sup>

$$\Gamma_c = \rho_d N''' \epsilon \pi R' \dot{R} = -\Gamma_d \quad (۷)$$

که در آن،  $N'''$  چگالی عددی حباب و  $R$  شعاع آن است. تغییرات شعاع حباب نسبت به زمان با کمک معادله‌ی رایلی محاسبه می‌شود:<sup>[۷]</sup>

$$R \ddot{R} + \frac{2}{3} \dot{R}^2 = \frac{\Delta p}{\rho_c} \quad (۸)$$

که در آن  $\Delta p$  اختلاف فشار مؤثر و  $\rho_c$  چگالی مایع است.

## ۲.۲.۲. تبادل بین حالتی مومنتوم

تبادل مومنتوم بین دو حالت مایع و بخار با در نظر گرفتن تأثیر نیروهای پسا و پخش آشفته‌گی چنین محاسبه می‌شود: [۸]

$$M_c = \frac{1}{\lambda} C_D \rho_c A_i''' |v_r| v_r + C_{TD} \rho_c k_c \nabla \alpha_d = -M_d \quad (۹)$$

$v_r$  سرعت نسبی بین دو فاز مایع و بخار و  $C_{TD}$  ضریب پخش آشفته‌گی است.  $A_i'''$  بیان‌گر چگالی سطح مشترک بین دو حالت است و برای مدل حفره‌زای پسا چنین محاسبه می‌شود: [۸]

$$A_i''' = \pi D_b^* N''' = (36 \pi N''')^{\frac{1}{3}} \alpha_d^{\frac{2}{3}} \quad (۱۰)$$

## ۳.۲. افشانه

در شبیه‌سازی افشانه‌ی سوخت، برای فاز مایع، محاسبات در محیط مهندسی بر پایه‌ی روش آماری قطره‌گسسته با حل کردن معادلات دیفرانسیل معمولی برای مسیر، مومنتوم، انتقال جرم و حرارت قطرات واحد که هرکدام از آن‌ها عضو یک گروه قطرات بدون فعل و انفعال داخلی یکسان هستند، انجام می‌شود. معادلات حاکم عبارت است از: [۹]

معادله‌ی بقای مومنتوم

$$m_d \frac{du_{id}}{dt} = F_{idr} + F_{ig} + F_{ip} + F_{ib} \quad (۱۱)$$

که در آن،  $F_{idr}$  نیروی پسا،  $F_{ig}$  شامل نیروهای گرانشی و شناوری،  $F_{ip}$  نیروی فشار و  $F_{ib}$  سایر نیروهای خارجی مانند نیروی الکترواستاتیکی و مغناطیسی هستند. شتاب قطره‌ی افشانه‌ی سوخت در محیط گازی مطابق رابطه‌ی ۱۲ محاسبه می‌شود: [۹]

$$\frac{du_{id}}{dt} = \frac{3}{4} C_D \frac{\rho_g}{\rho_d} \frac{1}{D_d} |u_g - u_d| (u_g - u_d) + (1 - \frac{\rho_g}{\rho_d}) g_i \quad (۱۲)$$

برای مدل‌سازی برخورد و انعقاد قطرات، از زیرمدل نوردین<sup>۱</sup> و برای تبخیر سوخت از زیرمدل دوکوویچ<sup>۲</sup> استفاده شده است. زیرمدل استفاده شده در تبخیر قطرات افشانه‌ی سوخت، مدل دوکوویچ است که این مدل ضرورتاً بر مبنای فرض کروی و متقارن بودن قطره، جریان نیمه‌آرام فیلم گاز اطراف قطره، دمای یکنواخت قطره در طول قطر قطره، خواص فیزیکی یکنواخت سیال احاطه‌کننده، تعادل گرمایی مایع - بخار بر سطح قطره‌ی شکل گرفته است. [۹] نرخ تغییرات دمای قطرات سوخت توسط معادله‌ی بالانس انرژی (معادله‌ی ۱۳) ارائه می‌شود که بیان می‌دارد انرژی هدایت شده به قطرات سوخت منجر به افزایش دما یا تبخیر آن‌ها می‌شود: [۹]

$$\dot{m}_d c_{pd} \frac{dT_d}{dt} = L \frac{dm_d}{dt} + \dot{Q} \quad (۱۳)$$

$\dot{Q}$  شار حرارتی جابه‌جایی منتقل شده از سیال محیط اطراف به سطح قطره است. برای فروپاشی اولیه‌ی افشانه‌ی سوخت از مدل تزریق گلوله<sup>۳</sup> استفاده شده است. در این مدل مشخصه‌ی شعاع قطره  $r_A$  و مشخصه‌ی زمان فروپاشی  $\tau_A$  است.  $R$  بیان‌گر شعاع واقعی قطره است و نرخ فروپاشی آیرودینامیکی طبق رابطه‌ی ۱۴ محاسبه می‌شود: [۹]

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)_a = R_a = - \frac{(r - r_a)}{C_{\tau} \tau_a} \quad (۱۴)$$

برای فروپاشی ثانویه‌ی فواره‌ی سوخت از زیرمدل موج استفاده شده است. در مدل موج مورد استفاده برای فروپاشی ثانویه توصیه شده که قطر ابتدایی قطرات باید در

حد قطر سوراخ نازل در نظر گرفته شود. [۹] در نازل با ورودی تیز به علت وقوع پدیده‌ی حفره‌زایی، قطر قطرات کوچک‌تر از قطر سوراخ نازل خواهد بود. در این مدل نرخ کاهش شعاع قطره نسبت به زمان به صورت زیر ارائه می‌شود که در آن،  $\tau_a$  زمان فروپاشی مدل و  $r$  شعاع قطره است: [۹]

$$\frac{dr}{dt} = - \frac{(r - r_{stable})}{\tau_a} \quad (۱۵)$$

## ۴.۲. موتور دیزل

معادلات حاکم شامل معادلات پایستگی جرم، مومنتوم و انرژی هستند. در موتورهای پاشش مستقیم به دلیل پاشش افشانه‌ی سوخت درون محفظه‌ی احتراق، ترم‌هایی به روابط پایستگی جرم، مومنتوم و انرژی اضافه می‌شود. [۱۰] فرم دیفرانسیلی معادلات حاکم مطابق معادله‌ی ۱۶ است که در آن  $i$  بیان‌گر جهت مختصات است.

معادله‌ی بقای جرم

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = S_m \quad (۱۶)$$

$S_m$  بیان‌گر تولید جرم به واسطه‌ی تبخیر قطرات افشانه‌ی سوخت است. [۱۰]

معادله‌ی بقای مومنتوم

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{v_j \partial (\rho v_i)}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho F_{v,i} + F_{p,i} \quad (۱۷)$$

در معادله‌ی ۱۷،  $F_{v,i}$  بیان‌گر نیروهای حجمی است و  $F_{p,i}$  نیز عمدتاً به نیروی فشاری در جریان دوفازی اشاره دارد.  $\tau_{ij}$  بیان‌گر تنش برشی است که برای سیالات نیوتنی از رابطه‌ی ۱۸ به دست می‌آید و  $\delta_{ij}$  دلتای کرونکر است. [۱۰]

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (۱۸)$$

معادله‌ی بقای انرژی

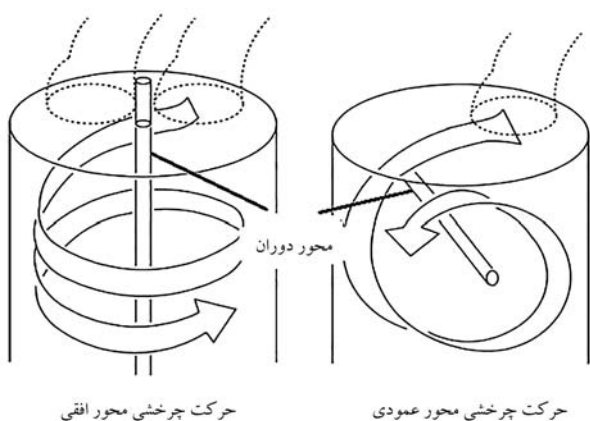
$$\frac{\partial (\rho h)}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial (\rho v_j h)}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\tau_{ij} \partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial t} + v_i \frac{\partial P}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + S_h \quad (۱۹)$$

در رابطه‌ی ۱۹،  $h$  آنتالپی بر واحد جرم و برابر با  $e + \frac{p}{\rho}$  است.  $e$  نیز انرژی داخلی بر واحد جرم است.  $q_i$  شار حرارتی در راستای  $i$  به واسطه‌ی گرادیان دماست که از قانون فوریه برابر با  $-k \frac{\partial T}{\partial x_i}$  است و  $k$  ضریب هدایت حرارتی سیال است. [۱۰] همچنین  $S_h$  تولید انرژی به واسطه‌ی جرم تبخیر شده‌ی قطرات افشانه‌ی سوخت است. [۱۰]

## ۳. مدل محاسباتی

### ۱.۳. انژکتور

انژکتور مورد نظر، انژکتور موتور دیزل دریایی کانریلار از نوع سیستم تغذیه‌ی مشترک<sup>۴</sup> و دارای پنج سوراخ است که با فاصله‌ی یکسان از هم قرار گرفته‌اند و در آن، سوخت به وسیله‌ی پاشش سوخت توسط انژکتور، پودرسازی می‌شود. در این روش، فرایند احتراق را می‌توان با تولید مقادیر آلاینده‌ی کم‌تر و مصرف سوخت پایین‌تر بهینه‌سازی



شکل ۳. جریان چرخشی حول محور سیلندر (چپ) و جریان چرخشی حول محور عمود بر محور سیلندر (راست). [۱۱]



شکل ۴. جزئیات شبکه‌بندی انژکتور در نزدیکی سوراخ نازل در حالت‌های مختلف بدون شیار (بالا) و با شیار (پایین).

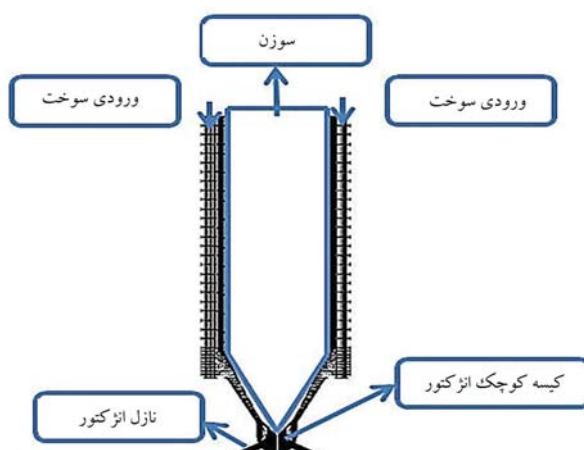
جدول ۱. خواص سوخت دیزل در دمای ۳۱۳ کلوین. [۱۳]

فاز سوخت	مایع	بخار
چگالی ( $\frac{kg}{m^3}$ )	۸۲۵	۵
لزجت ( $Pa.s$ )	۰٫۰۰۰۲۱	۰٫۰۰۰۰۱
فشار بخار (Pa)	۱۰۰۰	-

است که خواص آن در دمای ۳۱۳ کلوین در جدول ۱ آورده شده است. [۱۳] پروفیل جابه‌جایی سوزن برحسب زاویه‌ی میل‌لنگ برای مدت زمان پاشش سوخت ۰٫۸ میلی ثانیه در شکل ۵ آورده شده است. مدل آشفستگی مورد استفاده روش  $k - \epsilon - f$  با رفتار تابع دیواره‌ی استاندارد برای تمامی مقادیر وای‌پلاس در مدل آشفستگی مورد نظر است. در این مدل توربولانسی علاوه بر معادلات انرژی جنبشی توربولانس و نرخ اضمحلال انرژی که در مدل  $k - \epsilon$  پس‌یون حل می‌شود، دو معادله‌ی دیگر - معادله‌ی انتقال برای نوسانات سرعت و معادله‌ی تخفیف بیضی‌گون  $f$  که به منظور مدل کردن اثرات غیرایزوتروپیک دیواره است - باید حل شود. استفاده از این مدل به افزایش دقت حل عددی، مخصوصاً در مسائل شبیه‌سازی انژکتور و پاشش و موتورهای احتراق داخلی که با یک شبکه‌ی دینامیک (متحرک) روبه‌رو هستیم، منجر



شکل ۱. شماتیک سیستم سوخت‌رسانی تغذیه‌ی مشترک.

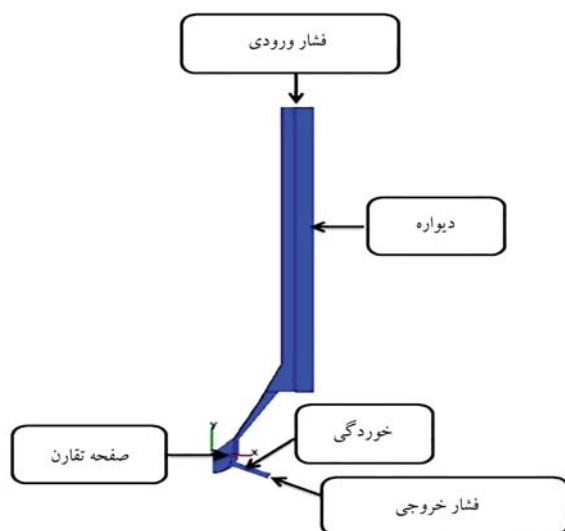


شکل ۲. شماتیک محل قرارگیری سوزن و نام‌گذاری قسمت‌های مختلف انژکتور دیزل.

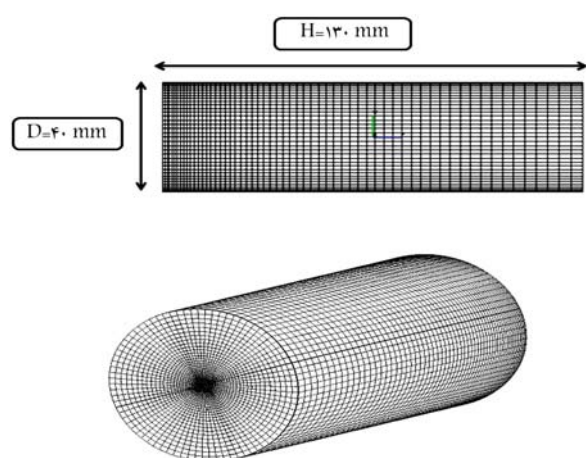
کرد. [۱۱] در شکل ۱ شماتیک سیستم سوخت‌رسانی تغذیه‌ی مشترک و در شکل ۲ نام‌گذاری قسمت‌های مختلف انژکتور دیزل مورد نظر آورده شده است.

ایجاد جریان چرخشی یکی از روش‌های افزایش شدت توربولانسی محفظه‌ی موتور و افزایش راندمان و بهینه‌سازی احتراق است. در شکل ۳ جریان‌های چرخشی شاخصی که درون سیلندر موتورهای احتراق داخلی می‌توان ایجاد کرد، نشان داده شده است. این جریان‌ها اکثراً حول محور سیلندر و محور عمود بر آن ایجاد می‌شوند. [۱۱] به‌منظور بررسی تأثیر تغییر هندسه‌ی سوراخ نازل انژکتور بر شدت وقوع حفره‌زایی، مشخصات افشانه‌ی سوخت و افزایش شدت توربولانسی درون محفظه‌ی احتراق، ۴ عدد شیار با گام ۰٫۱ میلی‌متر و ضخامت ۰٫۰۴ میلی‌متر درون نازل انژکتور مورد نظر ایجاد شده است. سوراخ نازل مخروطی انژکتور CRI ساخت شرکت بوش آلمان دارای طول ۰٫۷ میلی‌متر، قطر ورودی ۰٫۱۴۳ میلی‌متر، قطر خروجی ۰٫۱۳ میلی‌متر و شعاع منحنی ورودی سوراخ ۱۰ میکرومتر است. همچنین سوراخ نازل استوانه‌یی انژکتور مورد نظر دارای قطر ورودی ۰٫۱۳ میلی‌متر با شعاع منحنی ورودی ۲ میکرومتر است. شبکه‌ی محاسباتی انژکتور مورد نظر در دو حالت با شیار و بدون شیار به‌صورت شکل ۴ است که با کمک نرم‌افزار فایر انجام شده است. با توجه به این که سوراخ‌ها در فاصله‌ی یکسانی از هم قرار گرفته‌اند، شبیه‌سازی تنها یک پنجم هندسه‌ی کل انژکتور صورت گرفته است. [۷]

در بررسی استقلال جواب از شبکه‌ی محاسباتی، تأثیر اندازه‌ی شبکه‌ی محاسباتی مختلف بر دبی جرمی جریان سوخت خروجی از نازل انژکتور در هر حالت بررسی شده است. [۱۲] با توجه به نتایج حاصله، در شبیه‌سازی انژکتور با نازل دارای شیار از تعداد سلول محاسباتی ۷۱۶۱۴۸ و در نازل بدون شیار از تعداد سلول محاسباتی ۱۵۴۰۰۰ استفاده شده است. سوخت مورد نظر دیزل رایج در کشورهای اروپایی



شکل ۶. شرایط مرزی موجود در شبیه‌سازی آنزکتور.



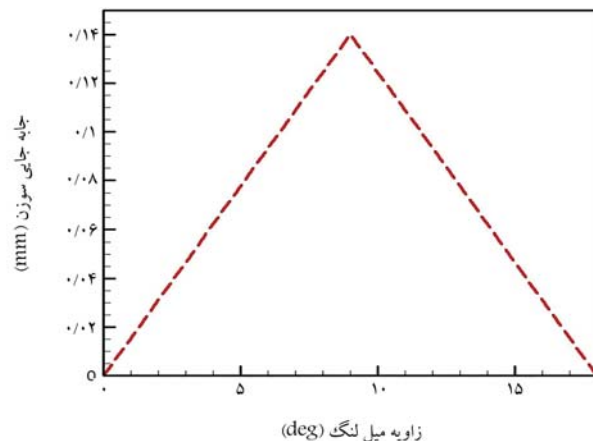
شکل ۷. ابعاد و شبکه‌ی محاسباتی محفظه‌ی احتراق استوانه‌یی حجم ثابت.

توجه به نتایج بررسی استقلال حل از شبکه (طول نفوذ اسپری برای مقادیر متفاوت سلول محاسباتی)،<sup>[۷]</sup> در تعداد سلول محاسباتی ۲۴۸۰۰۰ صورت گرفته است. سیال درون محفظه‌ی احتراق مورد نظر هوای متراکم (دارای فشار ۱۰ بار، دمای ۳۰۰ کلوین و چگالی ۱۱/۷۳ کیلوگرم بر متر مکعب) است. مدل آشفته‌گی مورد استفاده نیز همانند شبیه‌سازی آنزکتور روش k-zeta-f است. برای حل معادلات فشار - ممنتوم از الگوریتم سیمپل استفاده شده است.

### ۳.۳. موتور دیزل

به منظور بررسی تأثیر تغییر هندسه نازل آنزکتور و افزایش شدت توربولانسی درون محفظه‌ی احتراق موتور دیزل بر عملکرد و آلایندگی آن، ابتدا موتور دیزل کاترپیلار با آنزکتور متداول آن شبیه‌سازی شده است. به منظور شبیه‌سازی احتراق در موتور کاترپیلار از نرم‌افزار فایر استفاده شده است. در شکل ۸ نمایی از یک موتور دیزل کاترپیلار مورد استفاده برای پیش‌رانش در یک شناور دریایی آورده شده است.

ایجاد هندسه و شبکه‌بندی آن با کمک قسمت محیط شبیه‌سازی موتور دیزل<sup>۶</sup> در نرم‌افزار فایر صورت گرفته است. مشخصات موتور و آنزکتور آن و همچنین شرایط هوای داخل محفظه‌ی احتراق در ابتدای تراکم به ترتیب در جداول ۴ و ۵ آورده



شکل ۵. پروفیل بالابری سوزن برحسب زاویه‌ی میل لنگ.<sup>[۱۲]</sup>

جدول ۲. شرایط اولیه و مرزی جریان سیال درون آنزکتور.

شرایط		
شرایط اولیه	فشار: ۱۳۵۰ بار سرعت: ۰ متر بر ثانیه	دما: ۳۱۳ کلوین -
شرایط مرزی	فشار ورودی: ۱۳۵۰ بار فشار خروجی: ۱۰ بار دما: ۳۱۳ کلوین دیواره نازل: سایش سایر دیواره‌ها: متقارن	(نوع: فشار استاتیک) (نوع: فشار استاتیک) (نوع: حرارتی - دما) (نوع: دیواره - سایش) (نوع: دیواره - متقارن)

جدول ۳. پارامترهای موجود در شبیه‌سازی سایش در آنزکتور.<sup>[۱۴]</sup>

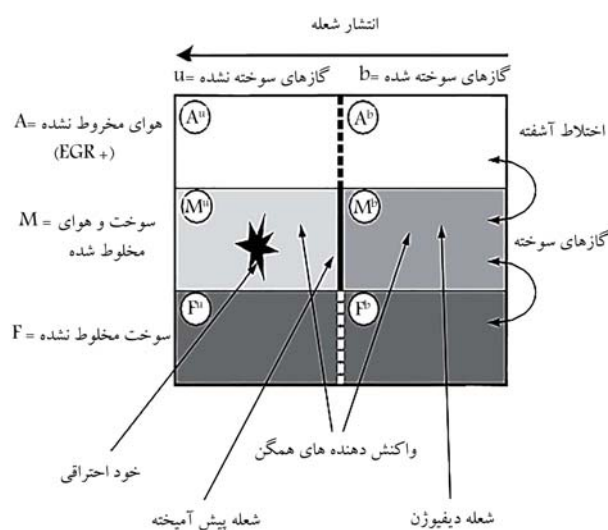
پارامتر	مقدار
جنس نازل آنزکتور	Stainless Steel ۳۱۶ L
سرعت صوت (متر بر ثانیه)	۱۵۰۰
تنش ماکزیمم (پاسکال)	$1e+09$

می‌شود.<sup>[۱۱]</sup> شرایط مرزی و اولیه برای شبیه‌سازی آنزکتور در تمامی حالت‌های مورد نظر در جدول ۲ ارائه شده است. با توجه به وقوع حفره‌زایی درون سوراخ نازل آنزکتور و سایش ناشی از آن، شرط مرزی دیواره‌ی نازل آنزکتور به صورت سایش در نظر گرفته شده است.<sup>[۱۴]</sup> با وقوع حفره‌زایی درون نازل آنزکتور، حباب‌ها هنگام ورود به مناطق پرفشار و ترکیدن آن‌ها باعث ایجاد تنش در سطوح فلزی و در نتیجه ایجاد سایش و خوردگی می‌شود. پارامترها و مقادیر مورد نیاز در شبیه‌سازی سایش نازل آنزکتور در جدول ۳ ارائه شده است.<sup>[۱۴]</sup> همچنین برای حل معادلات فشار - مومتوم نیز از الگوریتم سیمپل<sup>۵</sup> استفاده شده است.

همچنین شرایط مرزی مورد استفاده در شبیه‌سازی آنزکتور مورد نظر در شکل ۶ نشان داده شده است.

### ۲.۳. اسپری

به منظور مشاهده‌ی نتایج افشانه‌ی حاصل از هندسه‌های مختلف سوراخ نازل از یک محفظه‌ی احتراق استوانه‌یی حجم ثابت که ابعاد و شبکه‌ی محاسباتی ایجاد شده برای آن در شکل ۷ آورده شده، استفاده شده است.<sup>[۷]</sup> شبیه‌سازی اسپری حاصل با



شکل ۹. شماتیک مدل احتراقی ۳Z – ECFM.

حل معادلات فشار – مومنتوم از الگوریتم SIMPLE-PISO استفاده شده است. این الگوریتم برای جریان‌های تراکم پذیر و گذرا مناسب است و به همین علت در شبیه‌سازی احتراق موتور دیزل مورد نظر کاربرد داشته است.<sup>[۱۶]</sup>

به منظور کاهش مدت زمان محاسبات عددی و شرط تقارن هندسه، شبیه‌سازی تنها یک ششم از کل هندسه موتور صورت گرفته است. مدل دوده‌ی مورد استفاده در این نوشتار بر اساس الگوی آلایندگی هیروياسو است. این الگو شامل دو فرایند شکل‌گیری و اکسایش دوده است و بر اساس آن نرخ تغییر در جرم دوده برابر با اختلاف نرخ تشکیل دوده و نرخ اکسایش آن است. دوده‌ی اکسایش یافته و به وجود آمده به صورت زیر مدل می‌شوند:<sup>[۱۵]</sup>

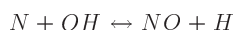
$$\frac{dM_{soot}}{dt} = \frac{dM_{form}}{dt} - \frac{dM_{oxide}}{dt} \quad (20)$$

که در آن تشکیل دوده و آهنگ اکسایش آن بر طبق روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\frac{dM_{form}}{dt} = A_f M_{fv} P^{0.5} \exp\left(-\frac{E_f}{RT}\right) \quad (21)$$

$$\frac{dM_{oxide}}{dt} = \frac{6 MW_c}{\rho_s D_s} M_s R_{tot} \quad (22)$$

الگوی نیتروژن اکسید مورد استفاده نیز مدل زلدویچ توسعه یافته است. این الگو به شدت وابسته به دما بوده و توسط واکنش نیتروژن و اکسیژن موجود در هوا در دماهای بالا تولید می‌شود. در این مدل کاهش شیمیایی چندمرحله‌ای بر اساس تعادل جزئی واکنش‌های مقدماتی عبارت است از:<sup>[۱۵]</sup>

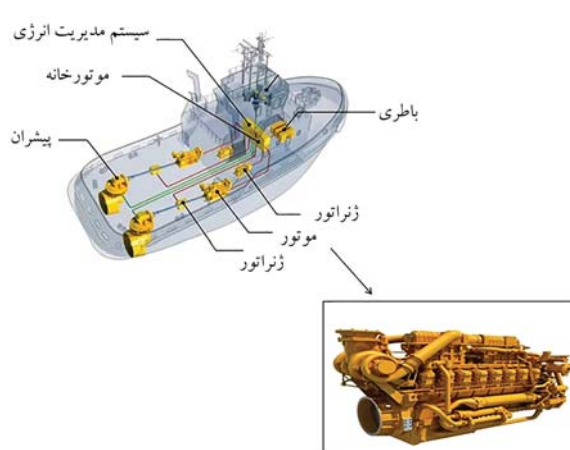


واکنش کلی زیر از ضرب کردن طرف‌های راست و چپ معادله‌ی فوق به دست می‌آید:



آهنگ تشکیل اکسید نیتروژن از طریق رابطه‌ی ۲۵ محاسبه می‌شود:

$$\frac{d[NO]}{dt} = 2k_f [N_2] [O_2] \quad (25)$$



شکل ۸. موتور دیزل کاترپیلار مورد استفاده در یک شناور دریایی.

جدول ۴. مشخصات موتور دیزل شبیه‌سازی شده.<sup>[۱۷]</sup>

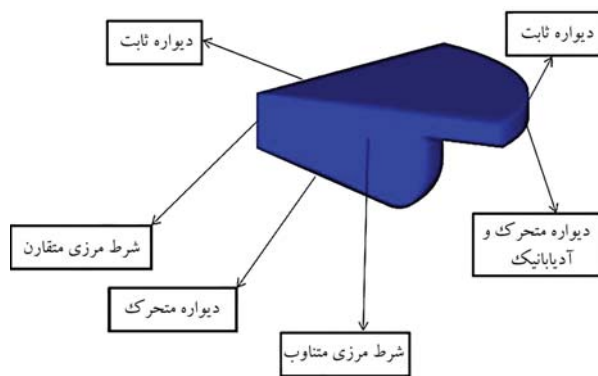
تعداد سیلندر (عدد)	۴
قطر استوانه (m)	۰/۱۳۷۱۹
فاصله‌ی چاب‌جایی (m)	۰/۱۶۵۱
نسبت تراکم (-)	۱۵/۱
طول شاتون (m)	۰/۲۶۱۶۲
زاویه‌ی افشانه‌ی سوخت (deg) (α + ۹۰)	۱۲۵
سرعت دورانی (rpm)	۱۶۰۰
میزان سوخت تزریقی در هر سیکل (mg)	۱۶۲/۲
بسته شدن سوپاپ ورودی (BTDC)	۱۴۷
باز شدن سوپاپ خروجی (ATDC)	۱۳۴
شروع پاشش سوخت (deg)	۷۱۱/۵
مدت پاشش سوخت (deg)	۲۱/۵
تعداد سوپاپ انژکتور	۶
حجم چاب‌جایی (lit)	۲/۴۴
شکل کاسه‌ی سمپه	Mexican hat
نوع انژکتور	تغذیه مشترک

جدول ۵. شرایط هوای داخل سیلندر در ابتدای تراکم.<sup>[۱۷]</sup>

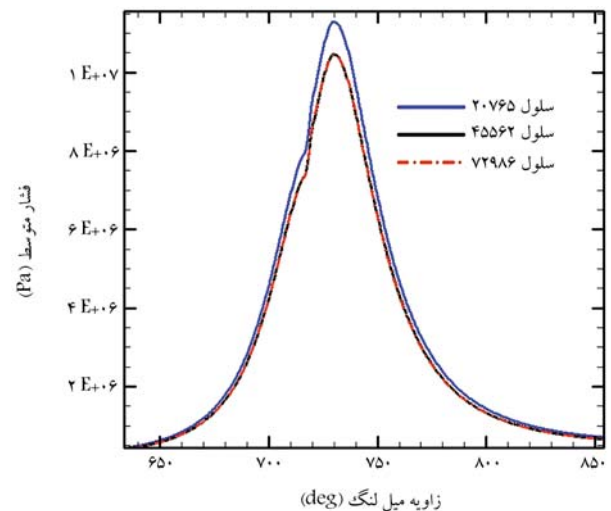
دما (k)	۳۴۴
فشار (KPa)	۲۰۰
گاز خروجی بازخورانی شده EGR (%)	۰

شده است. سوخت مورد استفاده، نرمال هیتان با ارزش حرارتی ۴۵/۱ مگاژول بر کیلوگرم است. مدل احتراق مورد استفاده در شعله‌ی منسجم و زیرشاخه‌ی سه‌قسمتی گسترش یافته<sup>۷</sup> است. این مدل احتراقی شامل سه ناحیه است: ناحیه‌ی شامل سوخت، ناحیه‌ی شامل هوا و گازهای خروجی باز خورانی شده و ناحیه‌ی اختلاط شامل گازهای سوخته و نسوخته؛<sup>[۱۵]</sup> شماتیک این مدل احتراقی در شکل ۹ آورده شده است. مدل توربولانسی مورد استفاده k – zeta – f، در فروپاشی اولیه‌ی قطرات افشانه‌ی سوخت از روش قطره‌ی ویسکوز، در فروپاشی ثانویه‌ی قطرات افشانه‌ی سوخت از روش موج استاندارد، برای پیش‌بینی مقدار تبخیر ایجاد شده در قطرات افشانه‌ی سوخت از روش تبخیر داکوویچ، برای مدل اثر دیواره از جت دیواره ۱ و برای سرعت شعله آرام<sup>۸</sup> از مدل متالاجی و کک استفاده شده است. برای





شکل ۱۲. شرایط مرزی موجود در شبیه‌سازی موتور دیزل.



شکل ۱۰. فشار متوسط درون سیلندر برحسب زاویه میل‌لنگ برای مقادیر مختلف سلول محاسباتی.

## ۴. صحت‌سنجی نتایج عددی

### ۴.۱. اسپری

به منظور بررسی دقت نتایج عددی حاصل، داده‌های عددی مشخصه‌ی طول نفوذ فواره و قطر متوسط ذرات حاصل از شبیه‌سازی سوراخ نازل‌های استوانه‌ای و مخروطی همگرا، با نتایج تجربی و عددی موجود<sup>[۷]</sup> مقایسه شده است و تطابق خیلی خوبی بین نتایج تجربی و عددی حاصل مشاهده می‌شود.

### ۴.۲. موتور دیزل

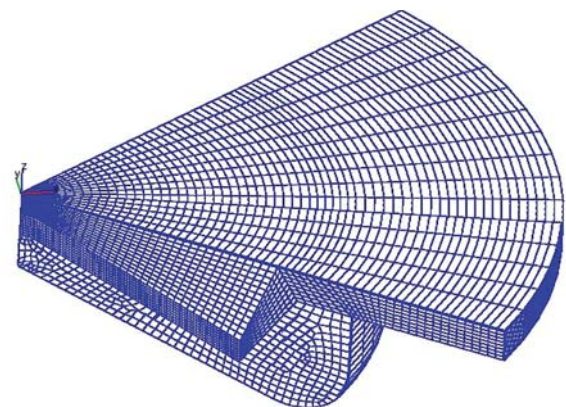
به منظور بررسی دقت نتایج حاصل، نتایج عددی با نتایج تجربی مقایسه شده است. در شکل ۱۳ نمودار فشار متوسط داخل سیلندر و نرخ حرارت آزاد شده برحسب زاویه میل‌لنگ را در حالت شبیه‌سازی شده<sup>[۱۶]</sup> نشان داده شده است. با توجه به این شکل، تطابق خیلی خوبی بین نتایج تجربی و عددی وجود دارد.

پس از شبیه‌سازی موتور دیزل و اعتبارسنجی نتایج حاصل، به شبیه‌سازی آن با هندسه‌های مختلف نازل انژکتور و افزایش زاویه‌ی پاشش سوخت (۱۲۵ درجه تا ۱۶۵ درجه) با کمک فایل ذخیره شده در شبیه‌سازی انژکتور پرداخته شده است. لازم به ذکر است که در این شبیه‌سازی‌ها، مشخصه‌های سرعت دورانی، زمان شروع پاشش سوخت، نسبت تراکم و هندسه‌ی موتور ثابت ولی جرم، مدت زمان و همچنین زاویه‌ی پاشش سوخت به محفظه‌ی احتراق متغیرند. در شکل ۱۴ شماتیک زاویه‌ی پاشش سوخت به درون محفظه‌ی احتراق آورده شده است. با توجه به این شکل، علاوه بر ایجاد جریان چرخشی افشانه‌ی سوخت و افزایش شدت توربولانسی، تغییر زاویه‌ی پاشش سوخت به منظور بهبود اختلاط سوخت و هوا و همچنین جلوگیری از برخورد و یا کاهش برخورد افشانه‌ی سوخت با دیواره سیلندر به منظور کاهش هیدروکربن‌های نسوخته و آلایندگی موتور و همچنین افزایش راندمان احتراق می‌تواند یک راهکار مناسب باشد.

## ۵. بحث و بررسی نتایج

### ۵.۱. انژکتور

تأثیر وقوع حفره‌زایی در فرایند پودرسازی سوخت مایع در انژکتورها بر خواص اسپری و عملکرد و آلایندگی موتور تأثیرگذار و غیر قابل انکار است. با وقوع پدیده‌ی حفره‌زایی و ترکیدن حباب‌های آن و خوردگی ناشی از آن، به نازل سیستم سوخت‌رسانی آسیب وارد می‌شود؛ با افزایش شدت وقوع این پدیده، میزان آسیب وارد شده به نازل افزایش



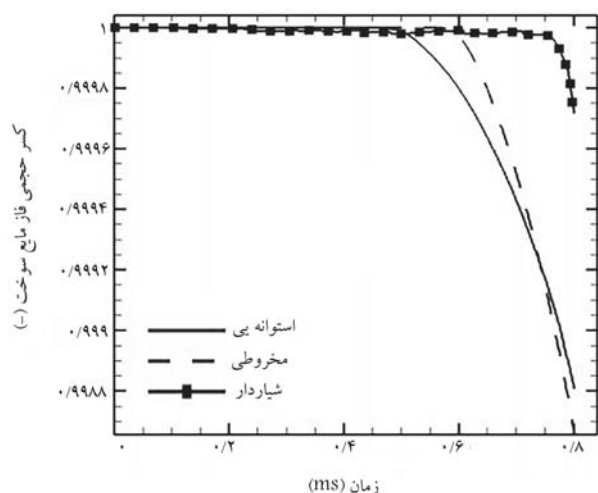
شکل ۱۱. شبکه‌بندی موتور دیزل دریایی کاترپیلار در دو نقطه مرگ بالا.

آهنگ واکنش نیز از طریق رابطه‌ی ۲۶ محاسبه می‌شود:

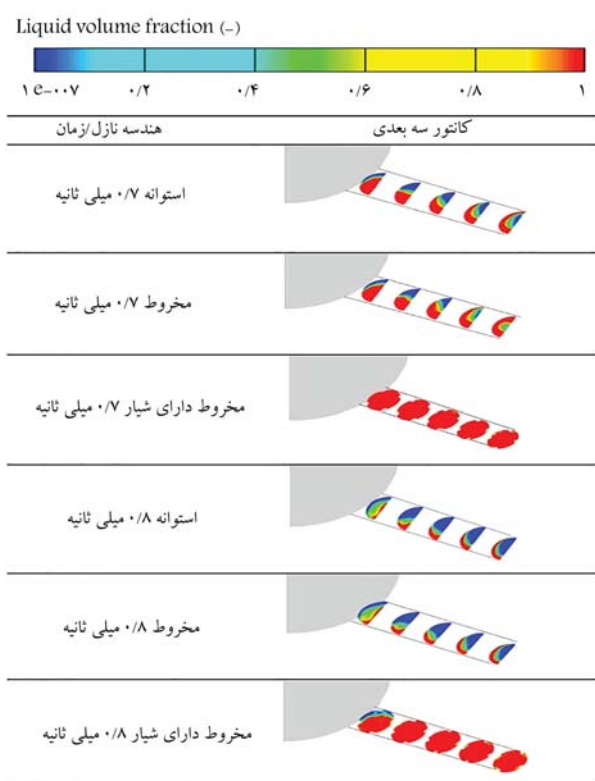
$$k_f = \frac{a}{\sqrt{T}} \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right) \quad (26)$$

$M_{form}$  جرم دوده‌ی تشکیل شده،  $M_{oxide}$  جرم دوده‌ی اکسید شده،  $M_{soot}$  تغییر جرم دوده،  $T$  دما برحسب کلوین،  $A_f$  ثابت پیش‌توان آرنیوس،  $P$  فشار برحسب بار،  $R$  ثابت عمومی گاز،  $E$  انرژی فعال‌سازی هیرواسو،  $M_s$  جرم دوده و  $k_f$  انرژی جنبشی آشفته‌گی مربوط به تشکیل دوده است. برای بررسی استقلال حل از شبکه‌بندی، سه شبکه‌بندی دارای تعداد سلول‌های مختلف ایجاد شده و نتایج حاصل از فشار متوسط داخل سیلندر برحسب زاویه‌ی میل‌لنگ برای هرکدام در شکل ۱۰ ارائه شده است. با توجه به این شکل، بین نتایج مربوط برای شبکه‌بندی‌های شماره ۲ و ۳ اختلاف بسیار ناچیزی وجود دارد. بنابراین از شبکه‌ی شماره ۲ استفاده شده است. لازم به ذکر است که این شبکه‌ی محاسباتی دارای ۴۵۵۶۲ سلول محاسباتی است. شبکه‌بندی موتور دیزل در این حالت (۴۵۵۶۲ سلول محاسباتی) در نقطه‌ی مرگ بالا در شکل ۱۱ نشان داده شده است. همچنین شرایط مرزی موجود در شبیه‌سازی موتور دیزل در شکل ۱۲ نشان داده شده است.





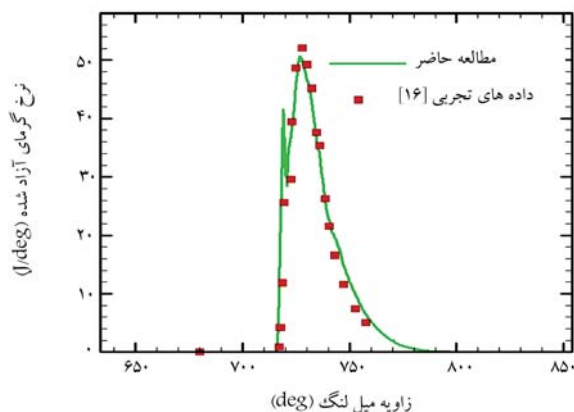
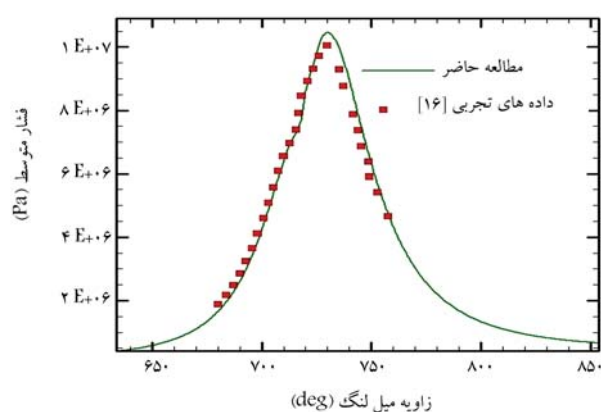
شکل ۱۵. کسر حجمی فاز مایع سوخت در حالات مختلف سوراخ نازل.



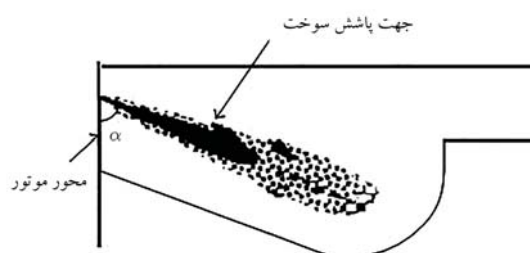
شکل ۱۶. توزیع کسر حجمی فاز مایع سوخت در هر حالت.

در نتیجه حفره‌زایی با شدت کم‌تری رخ می‌دهد.

می‌توان گفت در حالت کلی حفره‌زایی مهم‌ترین دلیل سایش و خوردگی و آسیب‌رسانی در لوله‌ها، پمپ‌ها و شیرها و نازل‌های سوخت است. ایجاد شیار و جریان چرخشی ناشی از آن، منجر به کاهش شدت وقوع حفره‌زایی و همچنین به تأخیر انداختن مدت زمان وقوع آن می‌شود. در واقع علاوه بر پارامترهای فشار تزریق، فشار خروجی نازل و همچنین فشار بخار سوخت، تغییر هندسه‌ی نازل سیستم سوخت‌رسانی تأثیر مهمی بر شدت و زمان وقوع حفره‌زایی دارد. نتایج مربوط به توزیع کسر حجمی فاز مایع درون سوراخ نازل انژکتور بدون شیار و با شیار در مدت زمان‌های پاشش ۰/۷ و ۰/۸ میلی ثانیه در شکل ۱۶ آورده شده است. وقتی سوراخ

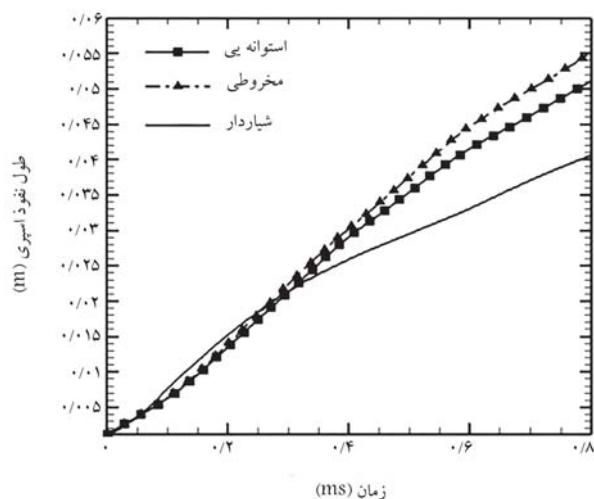


شکل ۱۳. اعتبارسنجی نتایج عددی موتور با داده‌های تجربی موجود: [۱۶] فشار متوسط درون سیلندر (بالا) و نرخ آزادسازی حرارت (پایین).

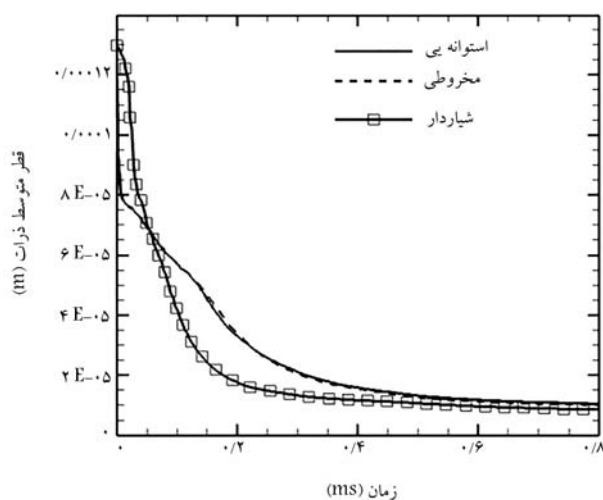


شکل ۱۴. شماتیک زاویه‌ی پاشش سوخت به محفظه‌ی احتراق موتور.

می‌یابد. بنابراین در مجموع می‌توان گفت که وقوع حد مطلوبی از حفره‌زایی مد نظر است. در این میان هندسه‌ی نازل سوخت تأثیر نسبتاً زیادی بر عملکرد سیستم سوخت‌رسانی و همچنین طول عمر نازل دارد. بدین منظور سوراخ نازل استوانه‌یی را به شکل مخروطی همگرا تغییر داده و از چهار شیار درون نازل مخروطی همگرا استفاده شده است. به منظور بررسی شدت وقوع حفره‌زایی درون سوراخ نازل انژکتور در هر حالت به بررسی کسر حجمی فاز مایع در مدت زمان پاشش سوخت پرداخته شده است. نمودار کسر حجمی فاز مایع بر حسب مدت زمان پاشش برای انژکتور مورد نظر در حالت‌های مختلف هندسه‌ی نازل سوخت در شکل ۱۵ آورده شده است. با توجه به این نمودار در حالت‌های مختلف مورد نظر حفره‌زایی با شدت‌های مختلفی رخ داده و با تغییر هندسه‌ی سوراخ نازل، شدت وقوع حفره‌زایی تغییر کرده و در حالت نازل دارای شیار شدت وقوع حفره‌زایی کاهش یافته است. دلیل این امر ایجاد جریان چرخشی درون نازل و کاهش مؤلفه محوری سرعت جریان سیال و همچنین افزایش مؤلفه‌ی شعاعی سرعت است. در این حالت فشار افزایش یافته و



شکل ۲۰. طول نفوذ اسپری در مدت زمان پاشش برای حالت مختلف.



شکل ۲۱. قطر متوسط ذرات در مدت زمان پاشش برای حالت مختلف.

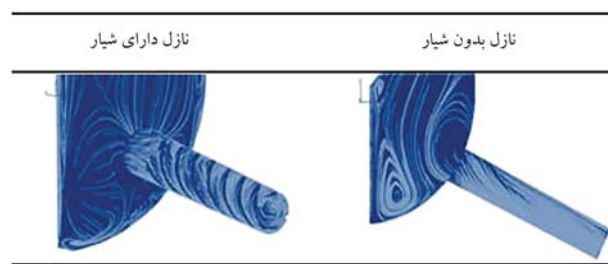
## ۲.۵. اسپری

به منظور بررسی و تحلیل تأثیر ایجاد شیار درون سوراخ نازل انژکتور بر رفتار هیدروپنماتیکی افشانه‌ی سوخت، طول نفوذ و قطر متوسط ذرات که از مهم‌ترین مشخصه‌های افشانه‌ی سوخت در موتورهای اشتعال تراکمی هستند و بر عملکرد آن‌ها مانند میزان توان تولیدی، آلاینده‌های خروجی به خصوص اکسید نیتروژن و مونوکسید کربن، مصرف سوخت و ویژه و سایر پارامترها تأثیرگذارند، در هر قسمت مقایسه شده است.

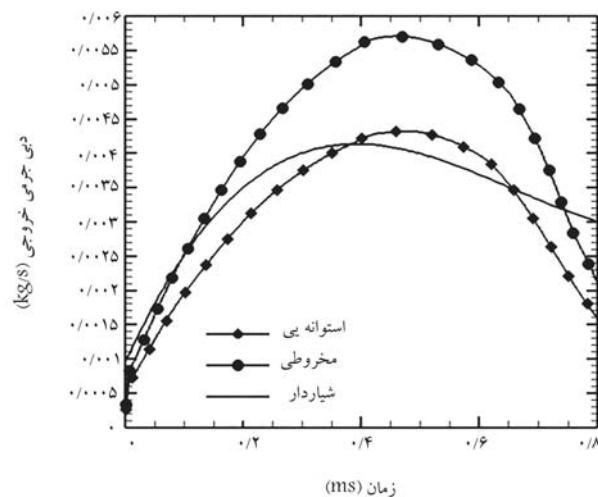
در شکل ۱۹ نامگذاری مشخصه‌های افشانه‌ی سوخت خروجی از انژکتور (طول نفوذ، قطر ریز ذرات و زاویه مخروطی اسپری) نشان داده شده است.

نتایج مربوط به طول نفوذ اسپری و قطر متوسط ریز ذرات در شکل ۲۰ و ۲۱ آورده شده است. با توجه به نتایج حاصل، ایجاد جریان چرخشی منجر به افزایش تلفات اصطکاکی درون نازل می‌شود که در نتیجه‌ی آن طول نفوذ افشانه‌ی سوخت در این حالت کاهش یافته است. همچنین جریان چرخشی خروجی از نازل دارای شیار منجر به بهبود اختلاط و تبخیر سوخت می‌شود و در نتیجه قطر متوسط ریز ذرات در حالت کاهش یافتن است.

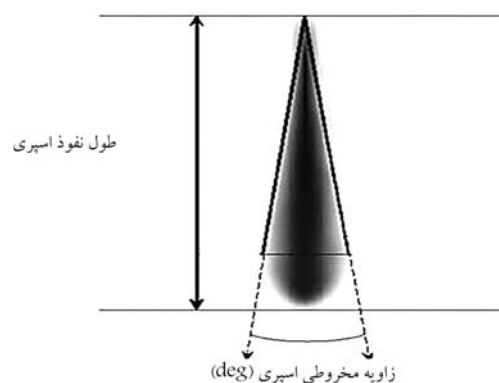
نتایج مربوط به ساختار اسپری محاسبه شده درون محفظه‌ی احتراق استوانه‌یی



شکل ۱۷. خطوط جریان درون انژکتور در هندسه‌های مختلف نازل.



شکل ۱۸. دبی جرمی خروجی نازل در حالات مختلف سوراخ نازل.



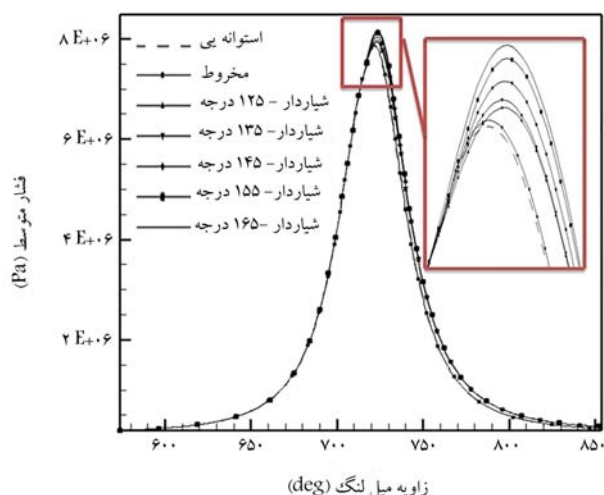
شکل ۱۹. نامگذاری مشخصه‌های افشانه‌ی سوخت خروجی از انژکتور.

نازل بدون شیار باشد شدت وقوع حفره‌زایی بیشتر است. همچنین ساختار مربوط به خطوط جریان برای هر حالت نازل (بدون جریان چرخشی و دارای جریان چرخشی) در شکل ۱۷ آورده شده است.

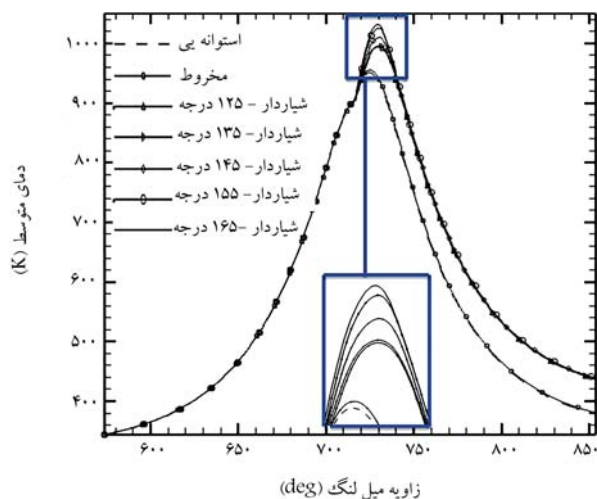
همچنین نتایج مربوط به دبی جرمی خروجی نازل انژکتور در حالت‌های مختلف هندسه در شکل ۱۸ آورده شده است. چنان که مشاهده می‌شود، ایجاد جریان چرخشی منجر به افزایش تلفات اصطکاکی و در نتیجه کاهش دبی جرمی خروجی نازل نسبت به سایر حالات می‌شود. با ایجاد شیار و جریان چرخشی درون نازل انژکتور دیزل سرعت محوری جریان در خروجی نازل کاهش ولی سرعت شعاعی آن افزایش می‌یابد. با توجه به وابستگی دبی جرمی خروجی و طول نفوذ اسپری حاصل به مؤلفه محوری سرعت، با کاهش این مؤلفه و افزایش تلفات اصطکاکی ناشی از چرخشی بودن جریان، میزان دبی جرمی خروجی و طول نفوذ اسپری حاصل کاهش می‌یابد.

جدول ۶. نتایج عملکرد موتور دیزل دریایی در حالت‌های مختلف.

هندسه	زاویه	توان تولیدی	گشتاور	مصرف سوخت
[deg]	[kw]	[Nm]	[kg/kw – h]	
استوانه	۱۲۵	۱,۹۲	۱۱,۴۷	۰,۳۱۶۶
مخروط	۱۲۵	۲,۱	۱۲,۵۶	۰,۳۰۷۳
شیاردار	۱۲۵	۳,۱۳	۱۸,۷۱	۰,۲۱۴۳
شیاردار	۱۳۵	۳,۱۷	۱۸,۹۷	۰,۲۱۱۴
شیاردار	۱۴۵	۳,۲۵	۱۹,۴۶	۰,۲۰۶۰
شیاردار	۱۵۵	۳,۳۷	۲۰,۱۴	۰,۱۹۹۱
شیاردار	۱۶۵	۳,۳۶	۲۰,۱۳	۰,۱۹۹۲

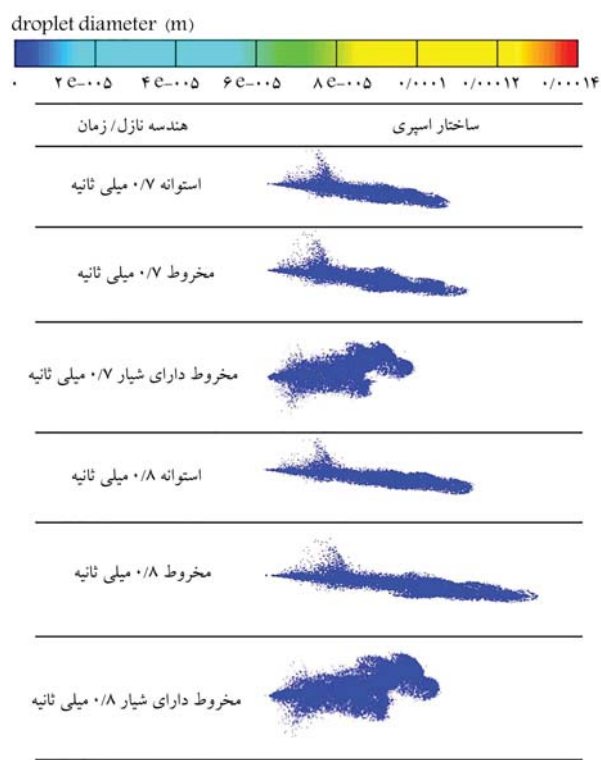


شکل ۲۳. فشار متوسط درون محفظه‌ی احتراق برحسب زاویه میل‌لنگ.



شکل ۲۴. دمای متوسط درون محفظه‌ی احتراق برحسب زاویه میل‌لنگ.

احتراق به همراه کاهش عمق نفوذ اسپری، اختلاط سوخت و هوا بهبود یافته و از تر شدن دیواره‌ی سیلندر جلوگیری شده و یا کاهش می‌یابد و در نتیجه هیدروکربن‌های نسوخته کاهش می‌یابند. در این حالت با کاهش هیدروکربن‌های نسوخته (افزایش به‌سوزی سوخت)، راندمان احتراق و نرخ آزادسازی حرارت افزایش یافته و در نتیجه میزان دما و فشار متوسط درون محفظه‌ی احتراق افزایش می‌یابد. همچنین در این حالت آلایندگی مونوکسید کربن نیز کاهش می‌یابد. همچنین جرم سوخت افشانه



شکل ۲۲. ساختار اسپری محاسبه شده در مدت زمان مختلف پاشش.

حجم ثابت در هر حالت در زمان پاشش ۰/۷ و ۰/۸ میلی ثانیه در شکل ۲۲ ارائه شده است. با توجه به این شکل، با ایجاد شیار درون نازل انژکتور و ایجاد جریان چرخشی درون آن، زاویه‌ی مخروطی اسپری نسبت به حالت نازل بدون شیار افزایش و طول نفوذ و قطر متوسط ریز ذرات کاهش می‌یابد. در حالت کلی با ایجاد شیار درون نازل انژکتور و جریان چرخشی ناشی از آن، با افزایش شدت توربولانسی و بهبود اختلاط آن، قطر ریزذرات افشانه‌ی سوخت دیزل نسبت به حالت بدون جریان چرخشی کاهش یافته و کیفیت پودرسازی سوخت افزایش می‌یابد که می‌تواند منجر به افزایش راندمان احتراق شود. همچنین کاهش طول نفوذ در این حالت، از برخورد افشانه‌ی سوخت با دیواره‌ی سیلندر که منجر به تر شدن آن و افزایش هیدروکربن‌های نسوخته می‌شود، تا حدی جلوگیری می‌کند.

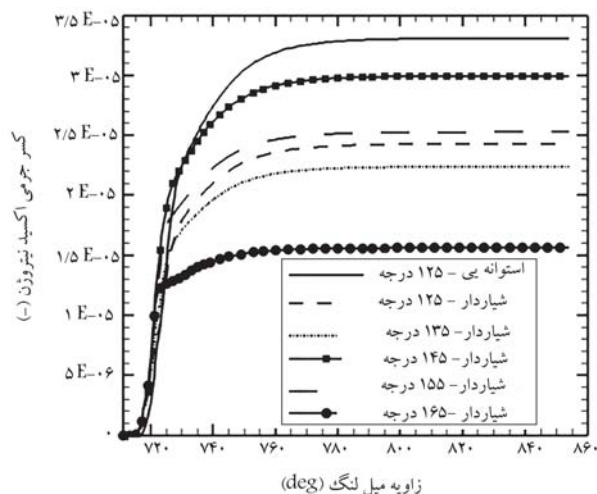
### ۳.۵. موتور دیزل

به منظور بررسی تأثیر تغییر هندسه نازل سوخت، ایجاد جریان چرخشی و افزایش شدت توربولانسی درون محفظه‌ی احتراق و همچنین تغییر زاویه‌ی پاشش سوخت بر عملکرد موتور دیزل به بررسی پارامترهای توان و گشتاور تولیدی و همچنین مصرف سوخت ویژه در هر حالت پرداخته شده و نتایج حاصل در جدول ۶ ارائه شده است. نتایج مربوط به فشار و دمای متوسط برحسب زاویه‌ی میل‌لنگ در هر حالت به ترتیب در شکل ۲۳ و ۲۴ آورده شده است. چون تمام شرایط ابتدای تراکم و هندسه موتور برای حالات مختلف یکسان است، بنابراین دو عامل مقدار جرم سوخت پاشش شده و بازده احتراق موجب ایجاد اختلاف در فشار و بیشترین مقدار دما در حالات مختلف خواهند شد. افزایش بازده احتراق منجر به افزایش به‌سوزی سوخت شده و در نتیجه‌ی آن مقدار دما و فشار درون محفظه‌ی احتراق افزایش خواهد یافت. با افزایش زاویه‌ی مخروطی اسپری و همچنین زاویه‌ی پاشش سوخت به درون محفظه‌ی

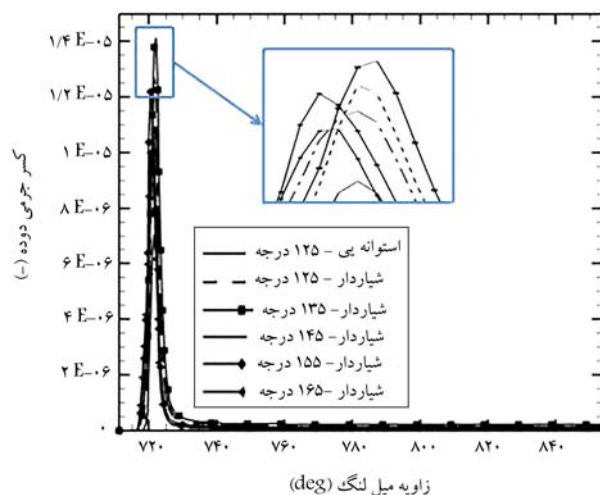
در شکل ۲۶ میزان تولید آلایندگی دوده در حالات مختلف برحسب زاویه میل‌لنگ آورده شده است. با پاشش سوخت به درون محفظه احتراق و شروع فرایند احتراق و به تبع آن بالا رفتن دمای محفظه، به دلیل عدم اکسیژن‌رسانی کافی و مناسب به سوخت در حال احتراق، ابتدا مقدار دوده افزایش یافته ولی با اتمام احتراق به علت انبساط محفظه و دما و شدت توربولانسی ایجاد شده مناسب، دوده‌ای ایجاد شده اکسید شده و لذا کاهش می‌یابد. با توجه به این شکل، در تمامی هندسه‌های مختلف نازل انژکتور، دوده به خوبی در انتهای فرایند احتراق اکسایش یافته و از بین می‌رود و لذا موتور از لحاظ تولید آلایندگی دوده مشکلی ندارد.

در شکل ۲۷ کانتورهای دوعدی توزیع دما درون محفظه احتراق در زوایای ۳۰ و ۶۰ درجه پس از نقطه‌ی مرگ بالا برای زاویه‌ی پاشش ۱۵۵ درجه آورده شده است. با توجه به این شکل احتراق سوخت از قسمت مرکزی شروع شده و رفته رفته به سمت بدنه سیلندر حرکت می‌کند.

در شکل ۲۸ کانتورهای دوعدی توزیع اکسید نیتروژن و در شکل ۲۹ کانتورهای دوعدی مربوط به توزیع دوده درون محفظه احتراق در زوایای ۳۰ و ۶۰ درجه پس از نقطه‌ی مرگ بالا آورده شده است. با توجه به این شکل‌ها، آلایندگی اکسید



شکل ۲۵. کسر جرمی اکسید نیتروژن برحسب زاویه میل‌لنگ.



شکل ۲۶. کسر جرمی دوده برحسب زاویه میل‌لنگ.

شده بیشتر درون محفظه‌ی احتراق معادل با انرژی بیشتر است و در نتیجه دما و فشار درون محفظه‌ی احتراق نیز افزایش خواهد یافت.

با توجه به تغییرات فشار و دما در حالات مختلف، بیشترین فشار و دما مربوط به نازل دارای شیار با زوایای مختلف پاشش سوخت است که این به معنای رفتار احتراقی مناسب در این حالت است. با مقایسه نتایج عددی حاصل ارائه شده در جدول ۶ می‌توان نتیجه گرفت که با تغییر هندسه نازل استوانه‌یی به مخروطی همگرا و ایجاد شیار درون آن، عملکرد موتور مربوطه بهبود یافته و زاویه‌ی پاشش نیز بر عملکرد موتور تأثیرگذار است. همچنین بهترین عملکرد موتور در زاویه‌ی پاشش ۱۵۵ درجه است. زیرا مقدار مصرف سوخت ویژه در این حالت کم‌ترین مقدار و توان و گشتاور تولیدی بیشترین مقدار است. مصرف سوخت ویژه با تغییر هندسه، ایجاد شیار درون نازل به مقدار ۳۷/۱۱ درصد نسبت به نازل استوانه‌یی و به مقدار ۷ درصد نسبت به نازل دارای شیار با زاویه‌ی پاشش اولیه (۱۲۵ درجه) کاهش یافته است. همچنین در این حالت میزان توان و گشتاور تولیدی موتور به ترتیب ۷۵/۵۲ درصد و ۷۵/۵۸ درصد نسبت به نازل استوانه‌یی و ۷/۶۶ درصد و ۷/۶۴ درصد نسبت به نازل دارای شیار با زاویه‌ی پاشش اولیه افزایش یافته است. این افزایش قابل توجه به دلیل افزایش زاویه مخروطی اسپری و بهبود میزان اختلاط سوخت و هوا است که منجر به بهبود فرایند احتراق شده است. همچنین در ادامه به منظور بررسی تأثیر تغییرات اعمال شده برآلایندگی خروجی از موتور، به بررسی مقادیر آلایندگی‌های اکسید نیتروژن، دوده و مونوکسید کربن در خروجی موتور پرداخته شده است. نتایج حاصل در جدول ۷ آورده شده است.

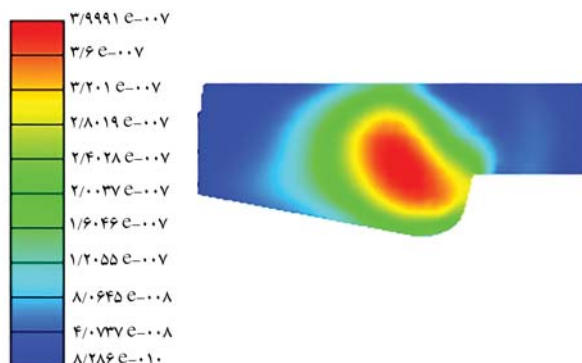
در شکل ۲۵ میزان تولید آلایندگی اکسید نیتروژن در حالات مختلف برحسب زاویه میل‌لنگ آورده شده است. با توجه به این شکل می‌توان نتیجه گرفت که استفاده از نازل دارای شیار موجب بهبود رفتار موتور از لحاظ تولید آلایندگی اکسید نیتروژن شده است. مقدار اکسید نیتروژن برای خروجی موتور دیزل دریایی در نازل استوانه‌یی برابر با ۰/۶۶ گرم بر کیلوگرم سوخت و در نازل دارای شیار با زاویه‌ی پاشش سوخت ۱۶۵ درجه برابر با ۰/۳۶ گرم بر کیلوگرم سوخت است. بنابراین مقدار این آلایندگی در این حالت به مقدار ۴۵/۴۵ درصد کاهش یافته است. این در حالی است که میزان توان تولیدی در این حالت ۷/۳۴ درصد افزایش یافته است. لذا نازل دارای شیار به علت افزایش زاویه مخروطی اسپری و همچنین تغییر زاویه‌ی پاشش به دلیل بهبود فرایند اختلاط سوخت و هوا و کاهش برخورد افشانه‌ی سوخت با دیواره سیلندر موتور، سوخت را به صورت نسبتاً یکنواخت‌تری درون سیلندر توزیع کرده است و آلایندگی آن کاهش یافته است. همچنین در این حالت میزان آلایندگی مونوکسید کربن نسبت به نازل استوانه‌یی و مخروطی دارای شیار با زاویه‌ی پاشش اولیه (۱۲۵ درجه) به ترتیب ۴۲/۷۳ درصد و ۱۸/۱۸ درصد کاهش یافته است.

جدول ۷. آلایندگی موتور حالت‌های مختلف در خروجی موتور (EVO).

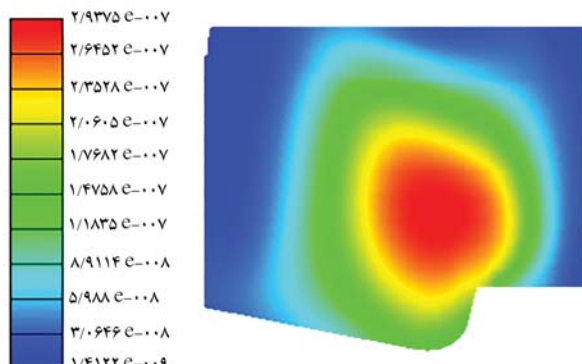
هندسه	زاویه [deg]	NO [g/kg – fuel]	CO [g/kg – fuel]
استوانه	۱۲۵	۰/۶۶	۱۰۰
مخروط	۱۲۵	۰/۶۸	۱۱۰
شیاردار	۱۲۵	۰/۵۶	۷۰
شیاردار	۱۳۵	۰/۵۱	۶۶/۸۱
شیاردار	۱۴۵	۰/۶۹	۶۵/۲۲
شیاردار	۱۵۵	۰/۵۸	۶۰/۴۵
شیاردار	۱۶۵	۰/۳۶	۵۷/۲۷



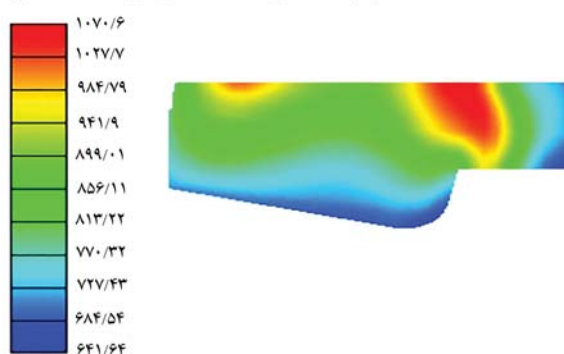
sprial ۱۵۵ :AN\_۷۵۰/۰ :Emission:Soot\_Mass\_Fraction [-]



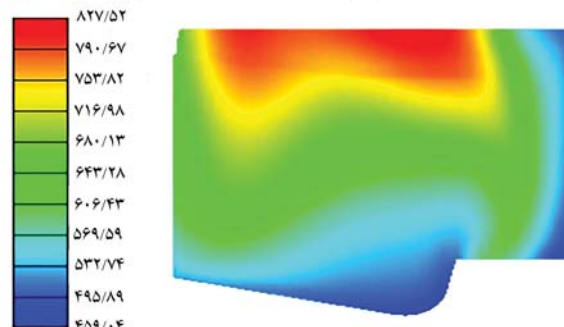
sprial ۱۵۵ :AN\_۷۸۰/۰ :Emission:Soot\_Mass\_Fraction [-]



sprial ۱۵۵ :AN\_۷۵۰/۰ :Flow:Temperature [K]

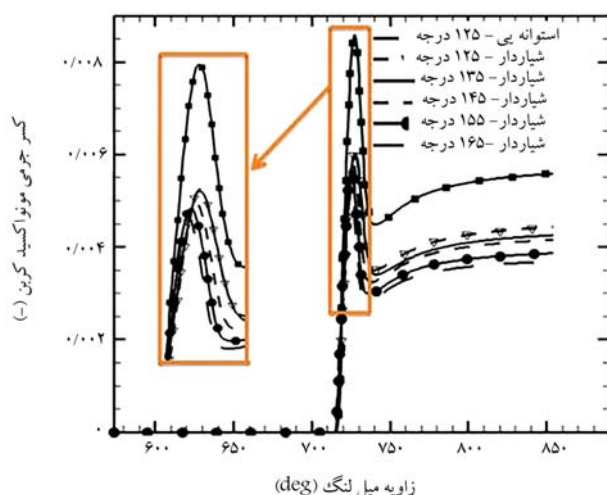


sprial ۱۵۵ :AN\_۷۸۰/۰ :Flow:Temperature [K]



شکل ۲۷. کانتور دوبعدی دما در صفحه مرکزی موتور در زوایای ۳۰ و ۶۰ درجه بعد از نقطه‌ی مرگ بالا (برای زاویه‌ی پاشش ۱۵۵ درجه).

شکل ۲۹. کانتور دوبعدی کسر جرمی آلایندگی دوده در صفحه‌ی مرکزی موتور در زوایای ۳۰ و ۶۰ درجه بعد از نقطه‌ی مرگ بالا (برای زاویه‌ی پاشش ۱۵۵ درجه).

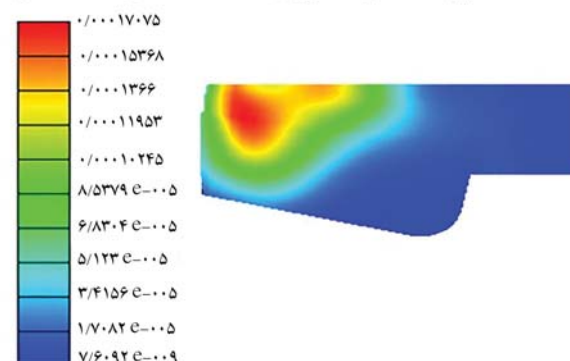


شکل ۳۰. کسر جرمی مونوکسید کربن برحسب زاویه میل‌لنگ.

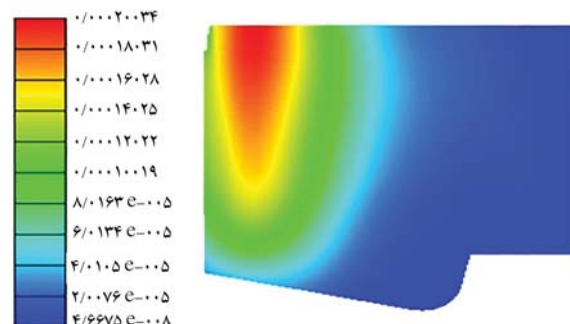
نیترژن بیشتر در نقاط دما بالا و آلایندگی دوده بیشتر در نقاط دما پایین تشکیل می‌شود. این دو آلایندگی دارای رفتار متضاد هستند و با کاهش یکی، دیگری افزایش می‌یابد.

در شکل ۳۰ میزان تولید آلایندگی مونوکسید کربن در حالات مختلف برحسب زاویه میل‌لنگ و در شکل ۳۱ کانتورهای دوبعدی توزیع مونوکسید کربن درون محفظه‌ی احتراق در زوایای ۳۰ و ۶۰ درجه پس از نقطه‌ی مرگ بالا آورده شده است. با توجه به شکل با ایجاد جریان چرخشی و افزایش

sprial ۱۵۵ :AN\_۷۵۰/۰ :Emission: NO\_Mass\_Fraction [-]



sprial ۱۵۵ :AN\_۷۸۰/۰ :Emission: NO\_Mass\_Fraction [-]



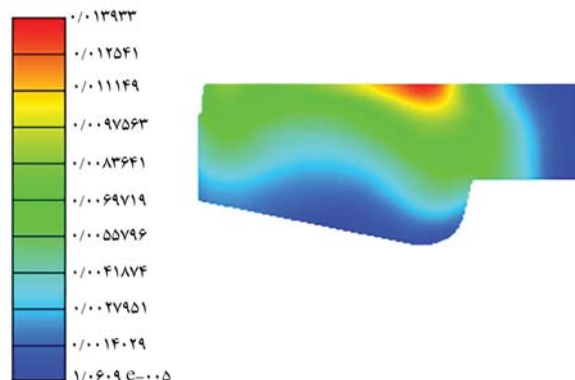
شکل ۲۸. کانتور دوبعدی کسر جرمی آلایندگی اکسید نیترژن در صفحه‌ی مرکزی موتور در زوایای ۳۰ و ۶۰ درجه بعد از نقطه‌ی مرگ بالا (برای زاویه‌ی پاشش ۱۵۵ درجه).

مونوکسید کربن افزایش خواهد یافت. با مقایسه‌ی نتایج حاصل برای عملکرد و آلایندگی موتور دیزل در حالت‌های مختلف مشاهده می‌شود که در مجموع بهترین شرایط موتور در حالت نازل دارای شیار با زاویه‌ی پاشش ۱۶۵ درجه است که در این حالت توان و گشتاور تولیدی بیشترین مقدار (تقریباً برابر با زاویه‌ی پاشش ۱۵۵ درجه) و آلایندگی مونوکسید کربن و اکسید نیتروژن کم‌ترین مقدار خود را دارد. در این حالت نیز موتور از لحاظ تولید آلایندگی دوده مشکلی ندارد.

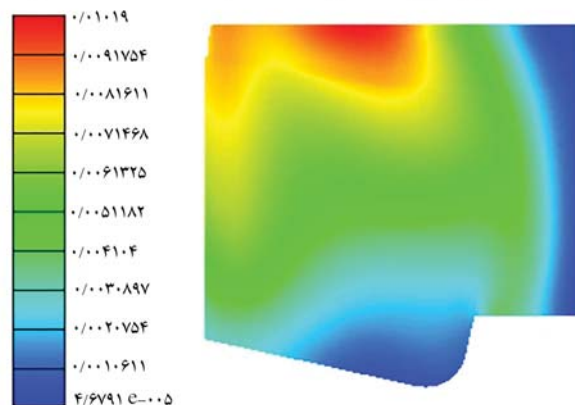
## ۶. نتیجه‌گیری

در نوشتار حاضر، از طریق افزایش شدت توربولانسی و تغییر زاویه‌ی پاشش سوخت، به بهبود عملکرد و آلایندگی موتور دیزل دریایی کاترپیلار پرداختیم. به منظور افزایش شدت توربولانسی و ایجاد جریان چرخشی از شیار درون نازل انژکتور دیزل استفاده شد. مقایسه‌ی نتایج عددی حاصل از شبیه‌سازی انژکتور و موتور دیزل با نتایج تجربی و عددی موجود بیانگر تطابق خیلی خوب این بررسی‌هاست. نتایج عددی حاصل مربوط به شبیه‌سازی انژکتور نشان می‌دهد که ایجاد شیار درون نازل انژکتور منجر به ایجاد جریان چرخشی سوخت و کاهش شدت وقوع حفره‌زایی و سایش نازل می‌شود. نتایج شبیه‌سازی افشانه نیز نشان می‌دهد که ایجاد شیار منجر به بهبود خواص افشانه‌ی سوخت و افزایش زاویه مخروطی آن می‌شود. در ادامه، نتایج شبیه‌سازی موتور دیزل نشان می‌دهد که ایجاد جریان چرخشی و افزایش شدت توربولانسی و زاویه‌ی مخروطی اسپری منجر به بهبود عملکرد و آلایندگی موتور دیزل می‌شود. در این حالت در شرایط بهینه عملکرد موتور در زاویه‌ی پاشش ۱۶۵ درجه، توان و گشتاور تولیدی به ترتیب ۷۵ درصد و ۷۵/۵ درصد نسبت به حالت نازل استوانه‌یی افزایش و مقادیر مصرف سوخت، آلایندگی اکسید نیتروژن و مونوکسید کربن به ترتیب ۸/۳۷ درصد و ۴۵/۴۵ درصد و ۴۲/۷۳ درصد نسبت به حالت نازل استوانه‌یی کاهش می‌یابد. همچنین در این حالت با توجه به شدت توربولانسی مناسب ایجاد شده درون محفظه‌ی احتراق، آلایندگی دوده اکسید شده و موتور از لحاظ دوده مشکلی ندارد. بنابراین روش‌های ارائه شده به منظور کاهش هم‌زمان مصرف سوخت و آلایندگی‌ها به همراه افزایش توان و گشتاور تولیدی با توجه به مشکلات ناشی از آلایندگی احتراق سوخت‌ها و تجدیدنپذیر بودن منابع سوخت فسیلی حائز اهمیت الزامی است.

spiral ۱۵۵ :AN\_v۵۰/۰ : Species : Mass\_Fraction\_CO [-]



spiral ۱۵۵ :AN\_v۸۰/۰ : Species : Mass\_Fraction\_CO [-]



شکل ۳۱. کانتور دوبعدی کسر جرمی آلایندگی مونوکسید کربن در صفحه مرکزی موتور در زوایای ۳۰ و ۶۰ درجه بعد از نقطه مرگ بالا (برای زاویه‌ی پاشش ۱۵۵ درجه).

زاویه‌ی پاشش سوخت، دمای محفظه‌ی احتراق افزایش و میزان اکسیداسیون کربن افزایش یافته و میزان مونوکسید کربن تولیدی کاهش می‌یابد. به دلیل وجود هوای اضافی در موتورهای دیزل نسبتاً مقدار این آلایندگی کم است. در صورتی که مقدار سوخت افزایش و یا مقدار هوا کاهش یابد، میزان تولیدی آلایندگی

## منابع (References)

- Hosseini, S.M., Ahmadi, R. and Mohebi, M. "3D Simulation of performance and pollution of hydrogen-diesel combustion in heavy duty engine", *Modares Mechanical Engineering*, **17**(03), pp. 177-186 (In Persian) (2017).
- Esmaelnadjad, R., Shervani-Tabar, M.T., Jafari, M. and et al. "Numerical study on the effects of different injection patterns in an annulus injector on the performance of a diesel engine", *Modares Mechanical Engineering*, **18**(02), pp. 423-433, (In Persian) (2018).

## پانویس‌ها

- nordin
- dukowicz
- blob injection
- common rail injector
- simple
- diesel engine simulation environment (ESE diesel)
- ECFM-3Z
- laminar flame speed

3. Hossainpour, S. and Rahhagh, H. "Numerical Investigation on the effect of split injection on performance and emission of direct injection diesel engine", Msc Thesis, Sahand University of Technology, (In Persian) (2004).
4. Bergstrand, P. "The effects of orifice shape on diesel combustion", *SAE Technical Paper*, **13**(3), pp. 106-116 (2004).
5. Nishida, K., Zhang, W. and Manabe, T. "Effects of micro-hole and ultra-high injection pressure on mixture properties of diesel spray", SAE International (2007).
6. Jaliliantabar, F., Ghobadian, B. and Najafi, G. "Optimizing the EGR rate, biodiesel fuel ratio and engine working mode using RSM method", *Journal of Fuel and Combustion*, **10**(03), pp. 15-31 (In Persian) (2016).
7. Farajollahi, A.H. and Firuzi, R. "Numerical investigation on the effect of nozzle geometry and needle lift profile on the cavitation flow and efficiency of the marine diesel engine injector", *The Journal Of Marine Engineering*, **16**(32), pp. 47-58 (In Persian) (2020).
8. Anvari, S., Taghavifar H., Khalilarya, S. and et al. "Numerical simulation of diesel injector nozzle flow and in-cylinder spray evolution", *Applied Mathematical Modelling*, **40**(19-20), pp. 8617-8629 (2016).
9. Gafoor, A. and Gupta, R. "Numerical investigation of piston bowl geometry and swirl ratio on emission from diesel engines", *Energy Conversion and Management*, **101**(1), pp. 541-551 (2015).
10. Mhlbauer, M. "Modelling wall interactions of a high-pressure, hollow conespray", PhD Thesis, Technical University of Darmstadt (2009).
11. Holkar, R., Yogesh, N., Pise, S.M. and et al. "Numerical simulation of steady flow through engine intake system using CFD", *IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering (IOSR-JMCE)*, **12**(1), pp. 30-45 (2015).
12. Farajollahi, A.H., Firuzi, R., Pourseifi, M. and et al. "Numerical investigation of the effect of swirl and needle lift profile change on the diesel fuel spray behavior", *Journal of Engine Research*, **54**, pp. 25-38 (In Persian) (2019).
13. Perry, R.H. and Green, D.W. *Perry's Chemical Engineer's Handbook*, McGraw-Hill, New York (1997).
14. Berchiche, N., Franc, J.P. and Michel, J.M. 2A. "Cavitation erosion model for ductile materials", *Journal of Fluids Engineering*, **124**, pp 601-606 (2002).
15. Farajollahi, A.H., Firuzi, R., Rostami, M. and et al. "Numerical study on the effects of creating rotary flow inside the injector nozzle and changing fuel injection angle on the performance and emission of caterpillar diesel engine", *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, **44**(3) (2022). <https://DOI.org/10.1007/s40430-021-03306-9>.
16. Farajollahi, A.H., Firuzi, R., Rostami, M. and et al. "Consideration of the effects of increasing spray cone angle and turbulence intensity on heavy-duty diesel engine pollution and specific outputs using CFD", *International Journal of Engine Research*, December (2021). <https://DOI.org/10.1177/14680874211052735>.
17. Postrioti, L., Grimaldi, C.N., Ceccobello M., and et al. "Common rail injection system behavior with different fuels", *SAE Technical paper*, 2004-01-0029, (2004). <https://DOI.org/10.4271/2004-01-0029>.



# توسعه‌ی مدل برای فرایند شروع و میرایی موتور گرماصوتی موج ایستا

علیرضا مرادی (دانشجوی دکتری)

فتح‌اله امی\* (استاد)

محسن بهرامی (دانشجوی دکتری)

دانشکده مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس

زهیر صبوچی (استادیار)

پژوهشگاه هوافضا، وزارت علوم، تحقیقات و فناوری، تهران

مهندسی مکانیک شریف (بهار ۱۴۰۱)  
دوره ۳-۲، شماره ۱، ص. ۱۱۳-۱۲۵، (پادداشت شریف)

این مقاله یک روش مدل‌سازی موتور گرماصوتی موج ایستا برای بررسی شرایط سیستم در حالت گذرا را ارائه می‌کند. تمرکز این روش بر دقیق‌سازی پیش‌بینی‌ها و ایجاد شناخت بهتر درباره‌ی شرایط عملکردی این دستگاه‌هاست. ایده‌ی که پایه‌ی اصلی این کار را تشکیل می‌دهد تلفیق روش حل عددی حالت گذرا و هم‌ترازی مدار الکتریکی موتور گرماصوتی موج ایستاست. با فرض هر جزء موتور گرماصوتی به‌عنوان یک المان فشرده‌ی هم‌ترازی مدار الکتریکی یک موتور گرماصوتی موج ایستا صورت می‌پذیرد. نتیجه‌ی حاصل از ترکیب روش حل عددی وابسته به زمان و هم‌ترازی مدار الکتریکی، یک کد برنامه‌نویسی است که امکان تعیین شرایط شروع، پایداری و میرایی نوسانات خودبه‌خودی در یک موتور گرماصوتی موج ایستا را فراهم می‌کند. با استفاده از این روش، لحظه‌ی شروع نوسانات خودبه‌خودی در سیستم ۱۳/۱ ثانیه محاسبه شد.

moradialireza@modares.ac.ir  
fommi@modares.ac.ir  
bahramymohsen@modares.ac.ir  
sabooohi@ari.ac.ir

واژگان کلیدی: موتور گرماصوتی، موج ایستا، فرایند شروع، فرایند میرایی، هم‌ترازی مدار الکتریکی، حل عددی.

## ۱. مقدمه

توان ثابت عمل می‌کند.<sup>[۷]</sup> در این سیستم‌ها، حرارت گاز خروجی از آگروز به‌عنوان توان حرارتی ورودی به موتور گرماصوتی استفاده می‌شود. با تبدیل انرژی حرارتی به توان صوتی و در مرحله‌ی دوم تبدیل توان صوتی به توان الکتریکی، بخشی از انرژی حرارتی اتلافی آگروز خودرو بازایی می‌شود.

در یک موتور گرماصوتی، انرژی حرارتی به وسیله‌ی نوسانات صوتی به کار تبدیل می‌شود. در واقع از یک سو انرژی حرارتی می‌تواند به کمک امواج صوتی در یک محیط منتقل شود و از سوی دیگر نیز وجود گرادیان دمای معین در طول یک مجرا با هندسه‌ی خاص می‌تواند منجر به تولید امواج صوتی شود که آن را اثر گرماصوتی<sup>۳</sup> گویند. عمل تبدیل انرژی حرارتی به توان صوتی در موتور گرماصوتی، همراه با مجموعه‌ی تغییرات وابسته به زمان خواص ترمودینامیکی سیال همچون دما، فشار و چگالی است. رابطه‌ی میان دمای نوسانی و جابه‌جایی گاز نقش اساسی را در اثر گرماصوتی ایفا می‌کند که این رابطه توسط لرد ریلی توضیح داده شده است.<sup>[۱۲]</sup> علاوه بر این، نظریه‌ی گرماصوتی خطی رات،<sup>۴</sup> به‌طور گسترده در چهل سال گذشته برای توصیف این پدیده مورد استفاده قرار گرفته است.<sup>[۱۳]</sup> درک مفاهیم گرماصوتی نیازمند بررسی این پدیده در حوزه زمان است. هرچند نظریه‌ی خطی رات می‌تواند معادلات گرماصوتی را در حوزه‌ی فرکانس محاسبه کند، اما در شبیه‌سازی‌های مربوط به پیش‌بینی زمان شروع و خاتمه نوسانات صوتی، نمی‌تواند

امروزه باتوجه به حجم قابل توجه انرژی‌های اتلافی قابل بازیافت، استفاده از تکنولوژی‌های بازیافت انرژی همچون چرخه‌ی تولید توان رانکین،<sup>[۱]</sup> شامل چرخه‌ی کالینا،<sup>۱</sup> بویلرهای بازیافت حرارتی،<sup>۲</sup> سیستم‌های خورشیدی،<sup>[۲]</sup> مازول ترموالکتریک، مواد پیزوالکتریک<sup>[۳]</sup> و یخچال‌های جذبی،<sup>[۴]</sup> توجیه اقتصادی دارد. موتور گرماصوتی نیز یکی از تکنولوژی‌های بازایی انرژی به شمار می‌آید که با توجه به نداشتن قطعات متحرک، قابلیت اطمینان بالا و سازگاری با محیط زیست، توجه بسیار گسترده‌ی را به خود جلب کرده است.<sup>[۵]</sup> این در حالی است که این سیستم‌ها به دلیل وجود پدیده‌ی تلفات داخلی جریان صوتی، به‌صورت ایده‌آل عمل نمی‌کنند.<sup>[۶]</sup> همچنین وزن و ابعاد دستگاه به تناسب میزان انرژی مورد نیاز بالاست و هزینه‌ی ساخت درایورهای صوتی - الکتریکی نیز بسیار زیاد است.<sup>[۷]</sup> هرچند بازده سیستم‌های گرماصوتی تک‌مرحله‌ی پایین است اما با توجه به مطالعات بسیاری که در زمینه‌ی بازایی انرژی به کمک این سیستم‌ها انجام شده است نشان از توجه محققان به مزیت‌های بیان شده برای این سیستم‌هاست.<sup>[۸-۱۱]</sup> یک مورد کاربرد بهینه‌ی این سیستم‌ها در خودروهای هیبریدی است، برای حالتی که در یک مسیر طولانی، خودرو با شرایط

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۴۰۰/۲/۴، اصلاحیه ۱۴۰۰/۶/۲۶، پذیرش ۱۴۰۰/۸/۱۱.

DOI:10.24200/J40.2021.57707.1586

مورد استفاده قرار گیرد.<sup>[۱۴]</sup> معادلات گرماصوتی که توسط رات، ویتلی و سوئیفت در طول زمان ارتقا پیدا کرد، امکان محاسبه‌ی دما و فرکانس نوسانات خودبه‌خودی را برای یک موتور گرماصوتی اولیه فراهم می‌کرد.<sup>[۱۵-۱۷]</sup> اما وجود تفاوت دما میان شروع نوسانات و حالت میرایی نوسانات که اولین بار توسط ژو و ماتسویارا در یک موتور گرماصوتی موج ایستا مشاهده شد، توسط معادلات بیان شده قابل ارزیابی نبود.<sup>[۱۸]</sup> به‌طور کلی اساس مدل ارائه شده توسط آن‌ها یافته‌های ترمودینامیکی بود که انتقال انرژی و تلفات از سطح را مرتبط می‌ساخت. این روش مطابقت خوبی با نتایج آزمون‌های تجربی دستگاه‌های گرماصوتی داشت، اما دارای محدودیت‌هایی نیز بود. به همین دلیل، از روش‌های مختلف حل عددی غیر خطی برای پوشش محدودیت‌های نظریه‌ی خطی استفاده شده است.<sup>[۱۹-۲۳]</sup>

یکی از محدودیت‌های استفاده از معادلات حالت نوسانات پایا، عدم پیش‌بینی شرایط زمانی مربوط به لحظه‌ی شروع نوسانات خودبه‌خودی بوده است. لذا حل عددی حالت گذرای معادلات گرماصوتی، همواره مورد توجه محققین بسیاری بوده است. با بررسی ارتباط میان ظرفیت حرارتی ماده‌ی به‌کار رفته در بخش استک موتورهای گرماصوتی (بخش بازیاب یخچال‌های گرماصوتی) و معادلات انتقال انرژی در این بخش، امکان مشاهده‌ی تغییر پارامترهای ترمودینامیکی گاز کاری سیستم به‌صورت وابسته به زمان فراهم می‌شود. اولین تلاش‌ها برای حل عددی معادلات گرماصوتی در حالت گذرا توسط کائو و همکارانش،<sup>[۲۴]</sup> ایشیکاوا و می،<sup>[۲۵]</sup> با استفاده از انتقال حرارت متوسط در طول صفحه‌ی استک که در دمای ثابت قرار داشت، عملکرد یک سیستم گرماصوتی را بررسی کردند و این در حالی بود که پیکولو و پیستون،<sup>[۲۵]</sup> با ترکیب معادلات گرماصوتی و ظرفیت حرارتی مربوط به صفحه‌ی استک، توانستند معادلات گرماصوتی را در حالت گذرا حل کنند و از این طریق به نتایج مشابهی دست یافتند. اما در این روش تنها بخش استک برای حالت گذرا مورد مطالعه قرار گرفت. لذا امکان شبیه‌سازی کامل یک دستگاه گرماصوتی به چشم می‌خورد که در سال ۲۰۱۴ سوئیفت و همکارانش،<sup>[۲۶]</sup> با تأکید بر وجود تشابه میان معادلات حاکم بر میدان‌های فیزیکی همچون مکانیکی، صوتی و الکتریکی توانستند الگوی مناسبی برای شبیه‌سازی دستگاه‌های گرماصوتی به‌کمک مدار الکتریکی، ممکن سازند. به کمک این همتراپی مدار الکتریکی، امکان استفاده از نرم‌افزارهای الکتریکی برای بررسی فرایند شروع و میرایی نوسانات خودبه‌خودی در موتورهای گرماصوتی فراهم شد.

یکی از اهداف این مقاله مرتبط ساختن حل عددی حالت گذرا با همتراپی الکتریکی موتور گرماصوتی است. به‌کمک این روش امکان تعیین بازه زمانی شروع و میرایی نوسانات خودبه‌خودی، دقیق‌تر کردن پیش‌بینی شرایط شروع و میرایی نوسانات و بررسی لحظه‌ی تغییرات خواص در موتور گرماصوتی فراهم می‌شود. همچنین به کمک این روش که در قالب یک حل ترکیبی عددی و شبیه‌سازی الکتریکی است، امکان مشاهده لحظه‌ی پارامترهای نوسان‌کننده برای یک موتور گرماصوتی در مقیاس کامل وجود دارد. با تعیین شرایط ترمودینامیکی و محل زمانی شروع نوسانات خودبه‌خودی و شرایط میرایی نوسانات سیستم، وجود اختلاف دما در شرایط شروع و میرایی نوسانات در سیستم گرماصوتی که توسط آزمایش‌ها مشاهده شده بود، تأیید شد. در ادامه این مقاله، روش حل عددی ارتقا یافته تشریح شده و نتایج حاصل از آن به کمک یک نمونه موتور گرماصوتی موج ایستا که برای صحت سنجی نتایج این پژوهش ساخته شده است، مورد بررسی قرار گرفته است. به عبارت دیگر، اختلاف دما اندازه‌گیری شده نشان داد که دو درجه حرارت بحرانی وجود دارد و رفتار موتور گرماصوتی در نزدیکی این دو دما متفاوت است. این اثر قابلیت‌پذیری<sup>۵</sup> نام دارد که با تقریب خطی گرماصوتی رات قابل توضیح نیست، اما در تحقیقات تجربی مشاهده

شده است.<sup>[۲۷-۲۹]</sup> در ادامه این نوشتار، روش حل عددی ارتقا یافته توصیف شد و نتایج حاصل از آن، به کمک موتور گرماصوتی موج ایستا که برای اعتبارسنجی نتایج این تحقیق ساخته شده، مورد بررسی قرار گرفت.

## ۲. مدل حل عددی

معادلات اصلی که برای بررسی تغییرات سیال در عبور از استک، داکت‌ها و مبدل‌های حرارتی مورد استفاده قرار می‌گیرد، معادله‌ی تغییرات فشار، دبی حجمی و معادله‌ی انرژی است که امکان بررسی تغییرات دما را فراهم می‌کند. معادلات ۱ تا ۳ به ترتیب نمایش‌دهنده‌ی این معادلات در سیستم‌های گرماصوتی هستند:<sup>[۲۷]</sup>

$$dp_v = -\frac{i\omega\rho_m \frac{dx}{A}}{1-f_v} U_v \quad (1)$$

$$dU_v = -\frac{i\omega A dx}{\gamma p_m} [1 + (\gamma - 1) f_k] p_v + \frac{f_k - f_v}{(1-f_v)(1-\sigma)} \frac{dT_m}{dx} \frac{U_v}{T_m} \quad (2)$$

$$\dot{H}_v = \frac{1}{\gamma} Re \left[ \tilde{p}_v U_v \left( 1 - \frac{f_k - \tilde{f}_v}{(1-\tilde{f}_v)(1+\sigma)} \right) \right] + \frac{\rho_m c p |U_v|^2}{2A\omega |1-f_v|^2 (1-\sigma^2)} Im \left( f_k + \sigma \tilde{f}_v \right) \frac{dT_m}{dx} - (Ak + A_{solid} k_{solid}) \frac{dT_m}{dx} \quad (3)$$

معادلات ۱ و ۲ که معادلات گرماصوتی رات نیز نامیده می‌شوند، به ترتیب برگرفته از معادله‌ی اندازه حرکت و پیوستگی هستند. این دو معادله به کمک شرایط اولیه دما، فشار و سرعت جریان در طول استک را محاسبه می‌کنند. معادله‌ی ۳ نیز حالت کلی معادله‌ی انرژی است و متشکل از ترم جریان انتالپی و ترم جریان حرارتی است. در این معادلات  $dU_v$ ،  $dp_v$  و  $dT_m$  به ترتیب تغییرات دامنه فشار نوسانی، سرعت حجمی نوسانی و دمای متوسط را نسبت به گام قبلی نمایش می‌دهند. همچنین به کمک این سه معادله، مشخص بودن شرایط مرزی حجم کنترل و شرایط اولیه دما، می‌توان حدود تغییرات دما در دو طرف استک را در حالت نوسانات پایا محاسبه کرد. اما با توجه به این که معادلات ۱ تا ۳ برای حل در حالت پایای نوسانی هستند، بررسی حالت حل گذرا برای پیش‌بینی زمان شروع و خاتمه نوسانات صوتی مورد توجه است.

## ۱.۲. معادلات حالت گذرا

در حالت گذرا، تغییرات خواص سیال نه تنها وابسته به مکان است بلکه با زمان نیز تغییر می‌کند. در این حالت می‌بایست اتلاف حرارتی به محیط و حرارت ورودی به استک در موتور گرماصوتی به‌صورت تابع وابسته زمان، در نظر گرفته شود. در این نوع مدل‌سازی می‌توان تغییرات زمانی دما در طول استک را به‌صورت مرحله به مرحله بررسی کرد. در این حالت با برقراری ارتباط میان ظرفیت حرارتی ماده به کار رفته در استک و معادله‌ی انرژی، تغییرات زمانی دما در طول استک را می‌توان بررسی کرد.<sup>[۲۶]</sup> استک موتور گرماصوتی این مقاله، از ۲۳ صفحه که با آرایش موازی در جهت محور موتور گسترش یافته‌اند تشکیل شده است. شکل ۱ شماتیک نحوه آرایش صفحات استک را نمایش می‌دهد که صفحه میانی برای انجام مدل‌سازی انرژی مشخص شده است.

پارامتر ورودی و برحسب وات با توان صوتی ورودی جمع می‌شود. برای محاسبه‌ی میزان انرژی ورودی به یک بخش و خروجی از آن، با نگاهی عمیق‌تر به معادله‌ی ۳ می‌توان این معادله را برای اعمال شرایط دقیق‌تر، به سه بخش مجزا تقسیم کرد:

۱. معادله‌ی جریان انرژی: ترم اول معادله‌ی ۳ به دلیل نوسانات صوتی است که بسته به محل اندازه‌گیری، در دو بخش ورودی و خروجی استک (حجم کنترل) می‌تواند مثبت یا منفی باشد.<sup>[۳۲]</sup>

$$F(x) = \frac{1}{\gamma} Re \left[ p_1 \tilde{U}_1 \left( 1 - \frac{f_k - \tilde{f}_v}{(1 - \tilde{f}_v)(1 + \sigma)} \right) \right]$$

۲. معادله‌ی اثر پمپاژ گرماصوتی: حاصل ضرب ترم دوم معادله‌ی ۳ در گرادینان دما در طول استک که به دلیل برگشت ناپذیری محیط کار ایجاد می‌شود و متناسب با شیب دماست اثر پمپاژ گرماصوتی نام دارد. جهت آن از سمت گرم به سمت سرد (مخالف جهت شیب دما) است.<sup>[۳۳]</sup>

$$G(x) = \frac{\rho_m c_p |U_1|^2}{2A\omega |1 - f_v|^2 (1 - \sigma^2)} Im(f_k + \sigma \tilde{f}_v)$$

۳. معادله‌ی هدایت حرارتی میان گاز و جامد: این معادله میزان انرژی منتقل شده به صورت هدایت حرارتی به وسیله‌ی گازکاری و ماده‌ی مورد استفاده در استک را محاسبه می‌کند. مقدار هدایت حرارتی در دو بخش ورودی و خروجی استک (حجم کنترل) متفاوت است.<sup>[۳۴]</sup>

$$C = (Ak + A_{solid}k_{solid})$$

در نهایت تفاوت تغییرات انرژی هر قسمت و مقدار انرژی حرارتی که به محیط می‌دهد، برابر است با مقدار انرژی که بر آن بخش اعمال می‌شود و صرف تغییر دمای آن قسمت می‌شود که متغیر با زمان است. معادله‌ی ۶ تساوی عددی قابل حل برای محاسبه‌ی تغییرات دمای در المانی از شکل ۲ را ارائه می‌کند.<sup>[۳۴]</sup>

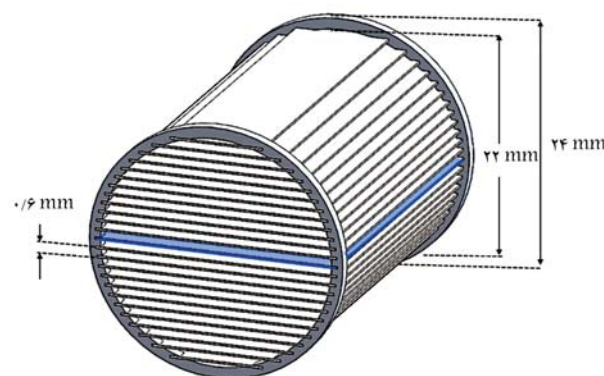
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{F(x_i) - F(x_{i+1}) + (G(x_i) + C) \frac{(T_i - T_{i-1})}{\Delta x}}{\rho c_p V} - \frac{(G(x_{i+1}) + C) \frac{(T_i - T_{i-1})}{\Delta x} + \dot{Q}_{out}}{\rho c_p V} \quad (6)$$

## ۲.۲. مشخصات مواد و هندسه‌ی مسئله

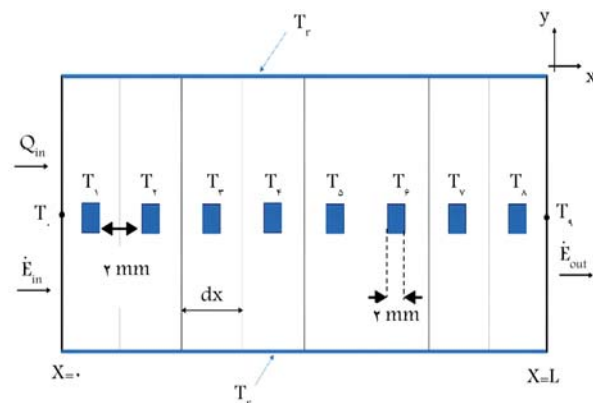
پس از تعیین معادلات اصلی، شبکه حل و حجم کنترل مورد نظر، نوبت به تعیین ثابت‌های معادله‌ی ۶ و نحوه‌ی حل این معادله می‌رسد. در جدول ۱ ثوابت مهمی که مربوط به پارامترهای ساختاری موتور گرماصوتی موج ایستا به کار رفته در این پژوهش است، بیان شده است.

## ۳. مدل همترایی مدار الکتریکی

همترایی مدار الکتریکی موتور گرماصوتی دو هدف را در این مقاله محقق می‌کند؛ یکی امکان پیش‌بینی نوسانات خودبه‌خودی با استفاده از حل گذرای مدار الکتریکی و دیگری حل موتور گرماصوتی به صورت یک مدار الکتریکی مجتمع. به گونه‌ی که



شکل ۱. شماتیک استک موتور گرماصوتی با آرایش صفحات موازی.



شکل ۲. شماتیک شبکه حل در قسمت استک موتور گرماصوتی.

برای حل معادلات ۱ تا ۳ به یک شبکه‌ی حل و تعیین شرایط مرزی و اولیه نیازمندیم. شکل ۲ شماتیک صفحه میانی استک را که به تعداد مشخصی المان تقسیم شده است نمایش می‌دهد. در این بخش برای استفاده از گرمکن، توان حرارتی و توان صوتی در ورود به استک وجود دارد و در خروج از آن، ترم توان صوتی وجود خواهد داشت. در شکل ۲  $T_r$  دمای دیواره جانبی صفحات استک است که نشان‌دهنده‌ی دمای مرجع است. همچنین عبارت‌های  $Q_{in}$  و  $E_{in}$  در ابتدای استک به ترتیب نشان‌دهنده‌ی حرارت ورودی (حاصل از گرمکن) و انرژی صوتی ورودی است و  $E_{out}$  نمایانگر انرژی صوتی خارج شده از المان حجم کنترل خواهد بود که به طور مجزا در روند حل برای هر بخش محاسبه می‌شود و در ادامه تشریح شده است.

برای حل معادله‌ی انرژی برای محاسبه‌ی پروفیل دمای استک، صفحه‌ی میانی استک به عنوان نمونه در جهت محور موتور (محور  $x$ ) گسسته‌سازی شد (شکل ۲). هر بخش به طور مجزا دارای ظرفیت حرارتی مشخصی است و می‌توان معادله‌ی انرژی را برای هر کدام از ۸ بخش مختلف نوشت و حل کرد که در نهایت، با تقسیم توان کل بخش مورد نظر بر ظرفیت حرارتی مربوط به آن بخش، تغییرات دما نسبت به زمان در آن بخش استک محاسبه می‌شود. توان صوتی ورودی به استک و خروجی از آن با توجه به روابط ۴ و ۵ محاسبه می‌شود.<sup>[۳۲]</sup>

$$\dot{E}_{in} = \frac{1}{\gamma} Re(p_1|_{x=0} \tilde{U}_1|_{x=0}) \quad (4)$$

$$\dot{E}_{out} = \frac{1}{\gamma} Re(p_1|_{x=L} \tilde{U}_1|_{x=L}) \quad (5)$$

همچنین با توجه به وجود گرمکن در مجاورت ورودی استک، مقدار حرارت به عنوان

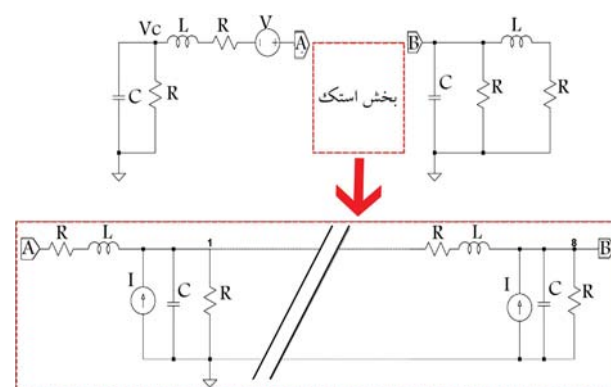
جدول ۱. مشخصات هندسی استک، ضرایب ترمودینامیکی و مقدار ثابت‌های مورد استفاده در حل عددی. [۳۵]

عنوان	نماد	مقدار (یکا)
سطح مقطع عبور گاز	$A$	$229/889 \times 10^{-6} (m)$
سطح مقطع استک	$A_{solid}$	$222/5 \times 10^{-6} (m)$
طول صفحات استک	$l_p$	$0/35 (m)$
عرض صفحه میانی	$w_p$	$0/2206 (m)$
فاصله میان صفحات	$D_p$	$6 \times 10^{-4} (m)$
ضخامت صفحات	$d_p$	$2 \times 10^{-4} (m)$
دمای مرجع	$T_r$	$300 (K)$
فشار محیط	$p_o$	$101800 (Pa)$
لزجت دینامیکی در دمای مرجع	$\mu_o$	$1/85 \times 10^{-5} (Pa.s)$
ضریب هدایت حرارتی گاز در دمای مرجع	$k_o$	$0/26 (W/K.m)$
ضریب هدایت حرارتی صفحات استک	$k_{solid}$	$4705 (W/K.m)$
ثابت گاز هوا	$R_{air}$	$286/7 (J/kg.K)$
ظرفیت حرارتی ویژه گاز	$C_p$	$1003 (J/kg.K)$
ظرفیت حرارتی ویژه صفحات استک	$C_{SO}$	$880 (J/kg.K)$
ثابت توانی ویسکوزیته	$b_\mu$	$0/76$
ثابت توانی هدایت حرارتی	$b_k$	$0/89$

#### ۴. مدل ارتقاء یافته

مبنای روش ارتقاء یافته، پیوند حل عددی معادلات و روش مدل‌سازی الکتریکی موتور گرماسوتی است. کد نوشته شده در این روش برای فائق آمدن بر محدودیت‌های بیان شده، استفاده شد. تشخیص محل زمانی شروع نوسانات خودبه‌خودی و ارائه مدل‌سازی کاملی از موتور گرماسوتی دو محدودیت بیان شده در این پژوهش هستند. برنامه‌ی نوشته شده به این صورت عمل می‌کند که ابتدا با وارد کردن مشخصات هندسی موتور گرماسوتی، محل قرارگیری گرمکن (موقعیت مکانی ورود حرارت)، تعیین جنس قسمت‌های مختلف موتور، تعیین گاز عملکردی سیستم و شرایط محیط آزمایش، اطلاعات مورد نیاز برنامه تکمیل می‌شود. در مرحله دوم با مشخص بودن دمای اولیه، در یک تحلیل فرکانسی، اولین فرکانس تشدید سیستم توسط کد محاسبه می‌شود. در این مرحله تمام المان‌های مدار الکتریکی محاسبه شده و برنامه وارد مرحله انجام یک تحلیل گذرا می‌شود که بسته به نتیجه‌ی این تحلیل، دوگزینه وجود خواهد داشت. فاز اول بیانگر روند شروع حل عددی برنامه تا لحظه‌ی تشخیص شروع نوسانات خودبه‌خودی است. در این مرحله مقدار حرارت ورودی به گونه‌ی اعمال می‌شود که در مدت زمان مورد نظر و یا کم‌تر از آن نوسانات خودبه‌خودی شروع شود، در غیر این صورت مقدار توان افزایش می‌یابد. فاز دوم برنامه، مربوط به نحوه‌ی کاهش توان ورودی برای برقرار کردن حالت نوسانات پایدار در سیستم است (مقدار توان مورد نیاز برای شروع نوسانات خودبه‌خودی بیشتر از مقدار توان مورد نیاز برای ایجاد حالت نوسانات پایدار است) و نهایتاً فاز سوم، مسیر مورد نظر برای ایجاد فرایند میرایی را در برنامه نوشته شده نمایش می‌دهد. در یک سیستم گرماسوتی، دو دمای بحرانی وجود دارد، دمای بحرانی بزرگتر دمای شروع می‌نامند، که هرگونه افزایش مقدار دما باعث تشدید دامنه فشار نوسانی شده و سیستم از حالت سکون به حالت نوسانات ناپایا منتقل می‌شود. از طرف دیگر، دمای بحرانی پایین‌تر، دمای میرایی نامیده می‌شود و هرگونه کاهش دما از این مقدار، باعث از بین رفتن نوسانات صوتی می‌شود. برای تغییرات دما میان دو دمای بحرانی بیان شده تعیین‌کننده نوع رفتار سیستم خواهد بود. در یک جهت با افزایش یکنواخت دما از مقداری کوچکتر از دمای بحرانی میرایی تا رسیدن به دمای شروع نوسانات، سیستم به حالت سکون باقی می‌ماند. در جهت معکوس، با کاهش یکنواخت دما از مقدار شروع، تا رسیدن به دمای میرایی، سیستم در حالت نوسانات پایا عمل خواهد کرد که به دلیل رفتار هیستریزیس<sup>۶</sup> سیستم اتفاق می‌افتد.

کد حل عددی به دو روش مختلف حل شد. در روش اول تنها بخش استک در حجم کنترل لحاظ شد و پس از محاسبه‌ی فرکانس تشدید سیستم از روش آنالوژی مدار الکتریکی، حل عددی مسئله به کمک معادلات ۱، ۲ و ۶ صورت پذیرفت. به طور کلی در روش اول در هر حلقه‌ی محاسبه‌ی پروفیل دما، بعد از به دست آمدن دما در طول استک، برای گام زمانی بعدی فشار و سرعت حجمی دوباره محاسبه



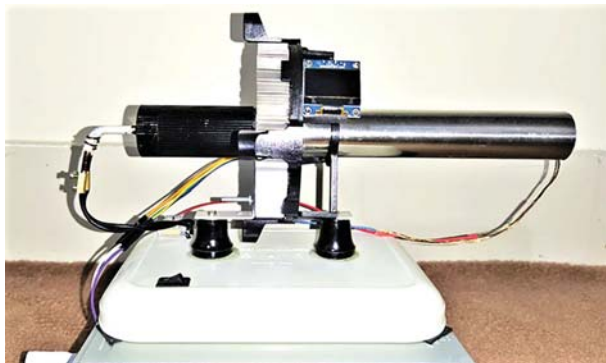
شکل ۳. شماتیک مدار الکتریکی برای موتور گرماسوتی با یک انتها باز.

پارامترهای محاسبه شده در بخش استک، هم از سایر بخش‌های موتور تأثیر می‌پذیرد و هم بر سایر قسمت‌ها اثر می‌گذارد. شکل ۳ شماتیک مدار رسم شده برای موتور گرماسوتی با یک انتهای باز را نمایش می‌دهد. در این حالت، بخش استک به تعداد ۸ المان تقسیم می‌شود. تعداد المان‌ها بر اساس محدودیت تعداد حسگرهای دمایی است که در استک موتور گرماسوتی نصب شده‌اند تا بتوان با اعمال محدودیت‌های دمایی در اندازه‌گیری‌های مداری، به حل پایا دقت بیشتری بخشید.

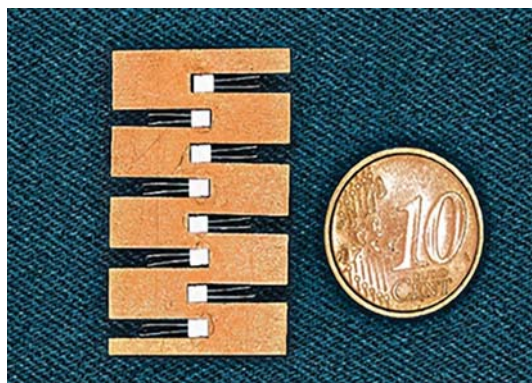
در هم‌ترازی مدار الکتریکی دو نوع تحلیل مد نظر است: الف) تحلیل حوزه‌ی فرکانس، ب) تحلیل حوزه‌ی زمان. تحلیل فرکانسی، پاسخ مدار به یک موج سینوسی در یک فرکانس یا مجموعه‌ی از فرکانس‌هاست. مشابه تحلیل جریان مستقیم، این تحلیل رفتار حالت پایای یک سیستم توصیف شده در یک گره ورودی در یک فرکانس تحریک را نشان می‌دهد. به کمک این نوع تحلیل می‌توان فرکانس‌هایی را که مدار طی آن دچار تشدید می‌شود، محاسبه کرد. تحلیل گذرای یک مدار نیز، همراه یک حل جریان مستقیم شروع شده تا نقطه‌ی جدایی شبیه‌سازی با رفتار متغیر با زمان تعیین شود. پس از این که حل جریان مستقیم مدار محاسبه شد، تغییرات

جدول ۲. مشخصات هندسی استک، ضرائب ترمودینامیکی و مقدار ثابت‌های مورد استفاده در حل عددی.

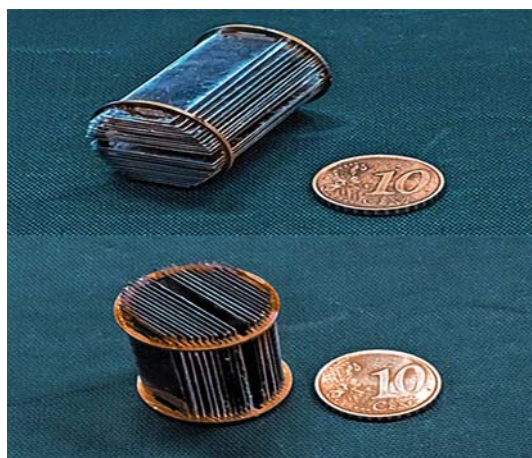
نام قطعه	مواد بکار رفته	ضخامت (mm)	شعاع (m)	طول (m)	درصد تخلخل
بازآویشگر	لوله استیل ضد زنگ	۱	۰/۰۲۵	۰/۱۱۵	۱۰۰
مبدل حرارتی	آلومینیوم	-	۰/۰۰۹	۰/۰۲	-
استک	صفحات میکا $KAl_2(Si_2AlO_7)(OH)_2$	۰/۲	۰/۰۲۴	۰/۰۳۵	۴۵
بخش گرم	آلومینیوم	۱	۰/۰۲۴	۰/۰۰۵	۱۰۰
گرمکن الکتریکی	سیم نیکل کروم	۰/۵	۰/۰۲۲	۰/۰۰۰۲	۶۰



شکل ۴. ساختار موتور گرم‌ماصوتی موج ایستا.



شکل ۵. نمایی از صفحه‌ی میانی استک و آرایش حسگرهای دما.



شکل ۶. دو نمای مختلف از استک با آرایش صفحات موازی از جنس میکا.

می شود و این روند تا انتهای حل ادامه می‌یابد. این در حالی است که در عمل، با تغییر دما در طول استک متغیرهایی همچون مقاومت لزجی، لختی گاز، مقاومت آسایش حرارتی و ... تغییر می‌کنند که تأثیر مستقیم بر دامنه فشار نوسانی و سرعت حجمی دارند. برای دقیق‌تر کردن فرایند حل و رفع این نارسایی، مدل جدیدی از حل عددی تلفیق شده با هم‌ترازی مدار الکتریکی اتخاذ شد. طی آن در هر حلقه حل عددی، متغیرهای موتور گرم‌ماصوتی با توجه به دما به‌روزرسانی می‌شود. در روش دوم با تعیین لیست المان‌های الکتریکی که با موتور گرم‌ماصوتی مشابه‌سازی شده بود، ابتدا یک آنالیز فرکانسی در دمای مرجع صورت گرفت که طی آن فرکانس تشدید سیستم محاسبه شد. همچنین در روش دوم علاوه بر سه معادله‌ی استفاده شده در روش اول، پارامترهای مدار الکتریکی هم‌ترا شده نیز نقش داشتند. در این حالت پس از هر بار محاسبه‌ی دما در هر گام زمانی، المان‌های مدار الکتریکی به‌روزرسانی می‌شدند. با ادغام مدار الکتریکی و روش حل عددی، علاوه بر استک، سایر بخش‌های موتور گرم‌ماصوتی نیز در فرایند حل وارد شوند. مزیت‌های اساسی استفاده از روش تلفیق حل عددی با حل مدار الکتریکی هم‌ترا شده با موتور گرم‌ماصوتی (روش دوم) را می‌توان چنین بیان کرد:

- تعیین زمان و دمای شروع نوسانات خودبه‌خودی در موتور گرم‌ماصوتی؛
- تعیین اختلاف دمای میان شروع نوسانات خودبه‌خودی و حالت نوسانات پایدار در سیستم؛
- تعیین زمان و دمای میرایی نوسانات خودبه‌خودی در موتور گرم‌ماصوتی.

## ۵. تجهیزات آزمایش تجربی

در شکل ۴ ساختار موتور گرم‌ماصوتی موج ایستا با یک انتهای باز که برای انجام آزمایشات این پروژه ساخته شده است را نمایش می‌دهد.

در جدول ۲ مشخصات هندسی و جنس مواد به‌کاررفته در بخش‌های مختلف موتور گرم‌ماصوتی شکل ۴ گردآوری شده است. در این نمونه موتور گرم‌ماصوتی از یک بخش استک با آرایش صفحات موازی استفاده شد. شکل ۵ آرایش حسگرهای قرار گرفته در صفحه میانی استک و شکل ۶ دو نمای متفاوت از استک موتور گرم‌ماصوتی مورد استفاده در این پژوهش را نشان می‌دهد. هرچند آرایش حسگرها که در صفحه میانی استک قرار گرفته‌اند به فرمت نشان داده شده در شکل ۵ است، اما صفحه میانی با صفحه‌ی از جنس میکا جایگزین شد. در حالتی که صفحه میانی از جنس برنج بود، به دلیل بالا بودن ضریب هدایت حرارتی این فلز، جهت جریان انرژی در استک مختل می‌شد که جایگزین کردن ورقه میکا باعث کاهش این اثر شد.

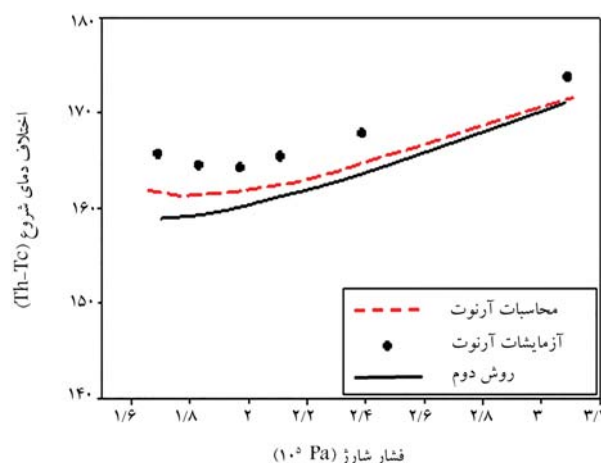


## ۶. اعتبارسنجی مدل ارائه شده

در این بخش نمودار دمای شروع نوسانات خودبه‌خودی برای دستگاه گرماسوتی آرنوت و نتایج به دست آمده برای دستگاه آرنوت با استفاده از روش حل تلفیقی تشریح شده در بخش ۴، مقایسه می‌شود و میزان تفاوت موجود در نتایج، برای اعتبارسنجی روش حل تلفیقی، بررسی می‌شود. در یک نمونه موتور گرماسوتی موج ایستا با دو انتهای بسته و پر شده از گاز هلیوم که توسط آرنوت و همکارانش مورد بررسی قرار گرفت، اختلاف دمای مورد نیاز برای شروع نوسانات خودبه‌خودی از روش تحلیلی و روش آزمون تجربی استخراج شد.<sup>[۳۶]</sup> محاسبات برای محدوده‌ی فشارهای مختلف گاز محبوس در سیستم صورت پذیرفت. در شکل ۷ منحنی‌های دمای شروع نوسانات خودبه‌خودی برحسب فشار گاز موجود در سیستم ترسیم شده است. مقادیر دمای شروع نوسانات خودبه‌خودی برای آزمون‌های تجربی صورت گرفته توسط آرنوت و همکارانش به همراه محاسبات تحلیلی آن‌ها، با مقادیر محاسبه شده توسط روش ارتقا یافته (روش دوم) در شکل ۷ ارائه شده است.

برای محاسبه‌ی دمای شروع نوسانات خودبه‌خودی سیستم ارائه شده توسط آرنوت، ابتدا همترایی مدار الکتریکی متناظر با دستگاه صورت پذیرفت، سپس به کمک حل ترکیبی مدار الکتریکی و حل عددی معادلات گرماسوتی (روش دوم)، دمای شروع نوسانات خودبه‌خودی در لحظه‌ی تشدید دامنه‌ی نوسانی فشار در سیستم، برای چند فشار شارژ مختلف محاسبه شد. می‌توان مشاهده کرد که منحنی حاصل از روش دوم، برای مقادیر فشارهای شارژ مختلف، نزدیک به مقادیر محاسبه شده و آزمون‌های تجربی حاصل از دستگاه آرنوت و همکارانش است و مقدار خطای موجود میان روش دوم و مقادیر تجربی، کم‌تر از ۰.۵٪ محاسبه شد. بنابراین، می‌توان در نظر گرفت که نتیجه به دست آمده از روش دوم با مقادیر آزمون تجربی آرنوت مطابقت خوبی دارد و نتایج حاصل از روش دوم منطقی است.

اغتشاش موجود در گاز عملکردی سیستم یکی از پارامترهای مهم در شروع نوسانات خودبه‌خودی است و فشار گاز سیستم تأثیر مستقیم بر تولید اغتشاش در گاز را دارد. به علاوه، چنان که در شکل ۷ مشاهده می‌شود، فشار گاز سیستم با اختلاف دمای مورد نیاز برای شروع نوسانات خودبه‌خودی رابطه‌ی غیرخطی دارد. به تعبیر فیزیکی تغییر فشار گاز سیستم می‌تواند بر تولید اغتشاش در گاز عملکردی



شکل ۷. نمودار دمای شروع نوسانات خودبه‌خودی برحسب فشار محیط (فشار شارژ گاز) خط پیوسته نمایشگر نتایج حاصل از اعمال روش ارتقا یافته برای ساختار گرماسوتی آرنوت است.<sup>[۳۶]</sup>

سیستم تأثیرگذار و باعث کاهش یا افزایش دمای شروع نوسانات خودبه‌خودی و تغییر راندمان موتور گرماسوتی شود.

## ۷. نتایج و بحث

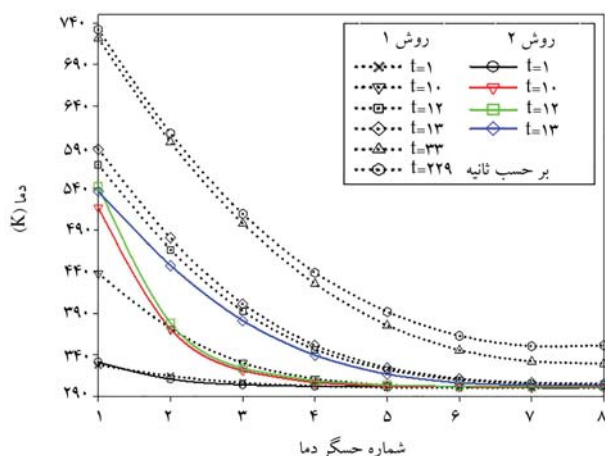
در این بخش منحنی‌های دما از دو روش حل عددی و یک روش تجربی گردآوری شده است که در طول مراحل شروع و میرایی نوسانات ثبت شده است.

### ۱.۷. پروفیل دمای استک در مرحله‌ی شروع نوسانات

فاز اول دربرگیرنده‌ی زمان اتصال جریان برق تا لحظه‌ی شروع نوسانات خودبه‌خودی در موتور گرماسوتی است. در کدهای حل عددی این فاز مربوط به لحظه‌ی شروع به حل تا زمان تشدید دامنه‌ی فشار نوسانی است. تفاوت موجود میان حل عددی و آزمون تجربی موتور گرماسوتی، در مدت زمانی است که گرمکن به دمای بحرانی (دمای شروع فرایند نوسانات خود به خودی) برسد. در آزمون تجربی با متصل کردن جریان برق، مدتی طول می‌کشد تا دمای گرمکن افزایش یابد و به حد نهایی خود برسد.

در روش اول، مقدار المان‌های مدار الکتریکی همترا شده با موتور گرماسوتی موج ایستا ثابت فرض شد. در این حالت، نمودارهای فرایند شروع به کار سیستم با حل عددی معادله‌ی ۶ برای ۲۲۹ ثانیه حل شد (تا برقراری تعادل حرارتی). شکل ۸ منحنی‌های دما در ۸ نقطه با فاصله‌ی یکسان از هم، در طول استک و برای ۸ زمان مختلف را نمایش می‌دهد (منحنی‌های نقطه‌چین). با توجه به شکل ۸، پس از گذشت تقریبی ۳۳ ثانیه از شروع به کار موتور گرماسوتی، تعادل حرارتی موتور با محیط اتفاق افتاده و در لحظات بعدی نقاط انتهایی شروع به افزایش دما کرده‌اند و منحنی لحظه‌ی ۲۲۹ ثانیه حد نهایی دمای اندازه‌گیری شده در مقاطع هشت‌گانه‌ی استک را نمایش می‌دهد. در روش اول تنها معادلات در قسمت استک موتور گرماسوتی حل شد. در شکل ۸ حسگر ۱ نزدیک‌ترین حسگر به گرمکن موتور گرماسوتی است و نمودارها تا زمان برقراری تعادل حرارتی ادامه یافته است.

منحنی‌های دما در شکل ۸ در حالتی اندازه‌گیری شده‌اند که یک توان حرارتی ۶۳ وات در طول حل عددی در ورودی استک (به دلیل وجود گرمکن) تا رسیدن به تعادل حرارتی اعمال شده است. این توان حرارتی برابر با توان الکتریکی مصرف شده



شکل ۸. منحنی‌های دمای محاسبه شده توسط روش اول (نقطه‌چین) و روش دوم (خطوط ممتد رنگی) پیش از ورود به حالت نوسانات پایا.

دامنه‌ی فشار نوسانی و دبی حجمی نوسانی در هرگه از مدار شبیه‌سازی شده برای موتورگرماسوتی این پژوهش وجود دارد. گرچه اندازه‌ی دامنه نوسانی فشار و سرعت حجمی در طول فرایند شروع نوسانات خودبه‌خودی متفاوت بود اما فرکانس نوسان یکسان داشتند و در یک زمان مشخص با اختلاف فاز ۸۵ تا ۹۰ درجه زمان شروع فرایند نوسانات خودبه‌خودی را پیش‌بینی کردند.

## ۲.۷. پروفیل دمای استک در مرحله‌ی میرایی نوسانات

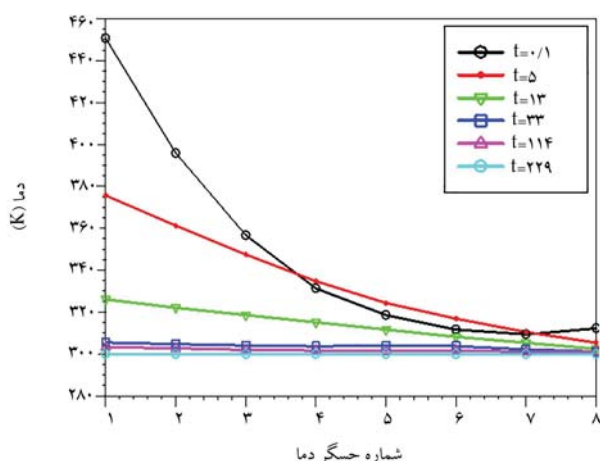
در عمل، رژیم خاموشی درست بعد از قطع جریان برق در موتورگرماسوتی اتفاق می‌افتد. این اتفاق در شبیه‌سازی عددی با حذف توان حرارتی ورودی به سیستم و اعمال فشار و سرعت حجمی نوسانی حالت پایا در شروع فرایند آغاز می‌شود و تا لحظه‌ی رسیدن به دمای مرجع ادامه می‌یابد. در این بخش پروفیل دما در طول استک با استفاده از دو روش حل عددی ارائه می‌شود. در روش اول، پروفیل دما و خواص ترمودینامیکی گاز در حالت نوسانات پایا، شرایط اولیه را در رژیم خاموشی تعیین می‌کنند. با انجام محاسبات به کمک روش اول، منحنی‌های شکل ۱۰ حاصل شد.

در شکل ۱۰ در لحظات اولیه رژیم خاموشی، یک افزایش دمای پنج درجه‌یی بین نقاط ۴ تا ۷ مشاهده می‌شود. اندکی پس از ورود به رژیم خاموشی، نوسانات خودبه‌خودی گاز در سیستم متوقف شده و جریان همرفتی به‌تدریج از بین می‌رود. در این حالت با ساکن شدن گاز در سیستم، ترم انتقال حرارت به محیط که از طریق انتقال حرارت میان سطح صفحات استک و گاز صورت می‌گرفت، کاهش یافته و افزایش دمای جزئی در نقاط ۴ تا ۷ را در بر داشته است. پروفیل دما از ثانیه ۱۳ام به بعد به صورت خطی است که طی آن تمامی نقاط تا لحظه‌ی رسیدن به دمای مرجع، با نرخ ثابت دچار کاهش دما می‌شوند. در این بازه، انتقال حرارت هدایتی از گاز داخل سیستم به صفحات استک و در نهایت به محیط، نقش اصلی را در کاهش دمای سیستم ایفا می‌کند. در روش اول، سیستم از حالت تعادل حرارتی وارد رژیم میرایی نوسانات خودبه‌خودی می‌شود. این در حالی است که در روش دوم، پس از این که شروع نوسانات خودبه‌خودی در سیستم تشخیص داده شد، توان حرارتی ورودی کاهش یافته و تا لحظه‌ی همگرایی دامنه‌ی فشار نوسانی، تغییرات فشار نوسانی توسط یک تحلیلگر مداری بررسی می‌شود. پس از همگرایی دامنه‌ی فشار نوسانی سیستم وارد رژیم میرایی نوسانات می‌شود. هرچند نحوه‌ی ورود این دو

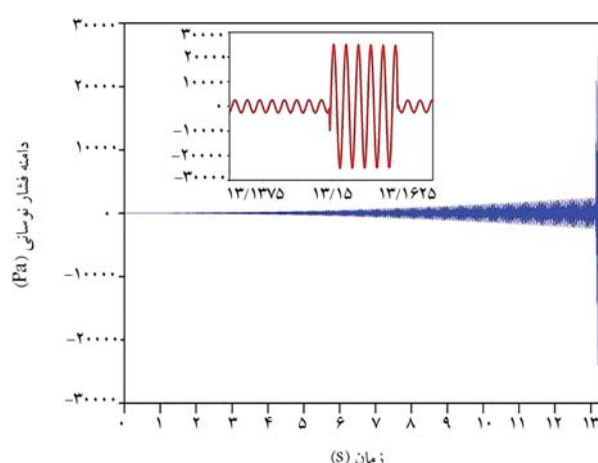
توسط گرمکن است. همچنین فشار نوسانی در ابتدای فرایند حل در بازه نوسانات با دامنه کم<sup>۷</sup> در نظر گرفته شد. همچنین شکل ۸ منحنی تغییرات دما در طول استک را برای ۶ لحظه‌ی مختلف تا زمان شروع نوسانات خود تقویت شونده برای روش حل دوم نمایش می‌دهد (منحنی‌های رنگی). در این روش، با تغییر دما در طول استک، دمای سایر اجزای سیستم نیز به‌روزرسانی شد. در این حالت، تغییرات دما منجر به تغییر مقدار المان‌های الکتریکی مدار همترا شده با موتورگرماسوتی شد که در گام بعدی حل تأثیر مستقیم داشت. با مقایسه‌ی منحنی‌های دمای هر دو روش ارائه شده در شکل ۸ اثر اعمال تغییرات دما بر المان‌های الکتریکی مدار همترا شده مشخص می‌شود. کاهش دما در لحظه‌ی شروع نوسانات خود تقویت شونده (ثانیه‌ی ۱۳) در روش دوم به نسبت منحنی دما در ثانیه ۱۳ در روش اول، بیانگر تأثیر دما بر المان‌های الکتریکی مدل شده و تأثیر متقابل آن‌ها بر دما در گام بعدی است. به تعبیر فیزیکی، با اعمال تغییر دما در طول استک، مقادیر مقاومت لژی، مقاومت آسایش حرارتی، تراکم پذیری و ایزرسی گاز دچار تغییر شده و فشار و سرعت حجمی به‌دست آمده در این گام زمانی، روی متغیرهای محاسبه‌ی پروفیل دمای گام زمانی بعدی اثر می‌گذارد و این اتفاق روند حل مسئله را واقعی‌تر می‌کند.

تفاوت موجود در نمودارهای روش اول و دوم در جهش صورت گرفته در بازه زمانی ۱۲ تا ۱۳ ثانیه نمایان می‌شود. این اختلاف به دلیل شروع نوسانات خودبه‌خودی در سیستم است که باعث تقویت جریان همرفتی سیال در استک می‌شود و به همین دلیل، تغییر دما در نقاط بعدی محسوس‌تر می‌شود. در روش دوم تا قبل از شروع نوسانات خودبه‌خودی، بخش اصلی انتقال حرارت به دلیل هدایت حرارتی و تشعشع حرارتی در حجم کنترل صورت می‌گرفت. اما پس از شروع نوسانات خودبه‌خودی، جریان همرفتی تقویت شده و منجر به افزایش دمای حسگرهای نصب شده در نیمه دوم استک شد. همچنین باتوجه به نمودار شکل ۸ روش دوم، نقاط انتهایی استک (نقاط ۴ تا ۸ نمودار) تا زمان شروع نوسانات خودبه‌خودی تغییرات دمایی کمی را احساس می‌کنند.

در شکل ۹ دامنه‌ی فشار نوسانی گاز، قبل و اندکی بعد از شروع نوسانات خودبه‌خودی نمایش داده شده است که به کمک تحلیلگر مداری، تغییرات ناگهانی دامنه فشار نوسانی را تشخیص داده و زمان شروع نوسانات خودبه‌خودی را ثبت می‌کند. بخش بزرگنمایی شده در شکل ۹ به خوبی نمایانگر تغییرات صورت گرفته در لحظه‌ی شروع نوسانات خودبه‌خودی در سیستم است. در روش دوم، امکان تحلیل

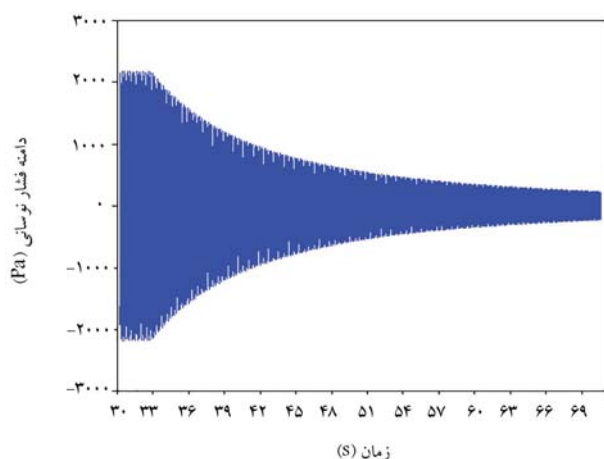


شکل ۱۰. منحنی‌های دما برای ۶ لحظه‌ی مختلف در مرحله‌ی میرایی نوسانات خودبه‌خودی. زمان‌های ثبت شده برحسب ثانیه است (روش اول).

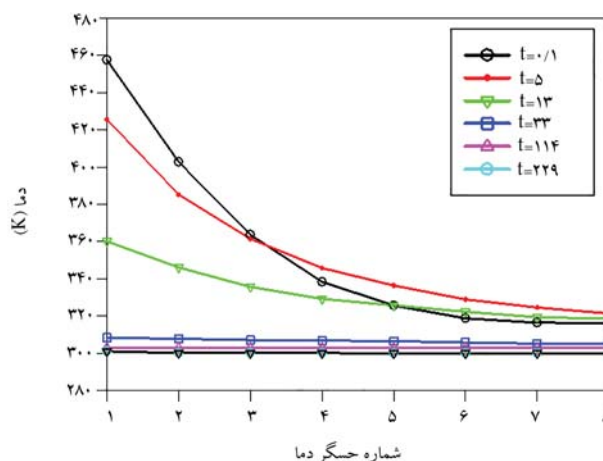


شکل ۹. دامنه‌ی فشار نوسانی در لحظات قبل و اندکی بعد از شروع نوسانات خودبه‌خودی.

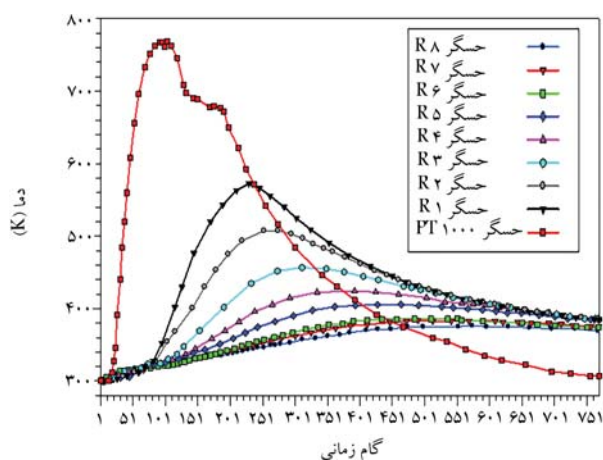




شکل ۱۲. دامنه‌ی فشار نوسانی در مرحله‌ی میرایی نوسانات خودبه‌خودی.



شکل ۱۱. منحنی‌های دما در مرحله‌ی میرایی نوسانات (روش دوم).



شکل ۱۳. دمای اندازه‌گیری شده توسط حسگرهای ۱ تا ۸ (PT ۱۰۰۰) و حسگر مجاور گرمکن (PT ۱۰۰۰) در طول فرایند عملکردی سیستم.

ورودی استک افزایش می‌یابد در این حالت مقدار جریان  $6/3$  آمپر ولتاژ  $10$  ولت اندازه‌گیری شد. همچنین مقدار شدت صوت تولیدی اندازه‌گیری شده در لحظه‌ی شروع نوسانات خودبه‌خودی برابر با  $8$  دسی بل بود.

بعد از شروع نوسانات، با کاهش توان ورودی تا مقدار  $35$  درصد توان ورودی اولیه، تولید صوت همچنان ادامه داشت. این در حالی بود که هرگونه کاهش بیشتر توان، منجر به قطع تولید صوت شد. نحوه‌ی تغییرات دمای استک و گرمکن در طول انجام آزمایش، اندازه‌گیری شد که طی آن تغییرات دمایی که  $8$  حسگر تعبیه شده در طول استک اندازه‌گیری کردند، در شکل ۱۳ نمایش داده شده است. به ترتیب شمارش، نزدیک‌ترین حسگر به گرمکن  $R1$  و دورترین حسگر  $R8$  است. همچنین به کمک یک حسگر  $PT 1000$  نوع  $K$  دمای دقیق گرمکن در طول انجام آزمایش اندازه‌گیری شد که در شکل ۱۳ با منحنی قرمز رنگ نمایش داده شده است. منحنی دمای حسگر نصب شده در موقعیت گرمکن در شکل ۱۳ دمای دقیق گرمکن را در طول تمام مراحل آزمایش نمایش می‌دهد. با توجه به شکل ۱۳ دمای حسگر  $R1$  حتی تا بعد از ورود به مرحله‌ی خاموشی نیز روبه افزایش است.

در ثانیه‌ی ۳۷ سیستم به حالت تشدید درآمده و هم‌زمان توان ورودی کاهش می‌یابد (کاهش توان ورودی، کاهش دامنه‌ی فشار نوسانی را در پی داشته و باعث همگرایی دامنه‌ی نوسانی فشار و در نتیجه رسیدن به حالت نوسانات پایا می‌شود) تا

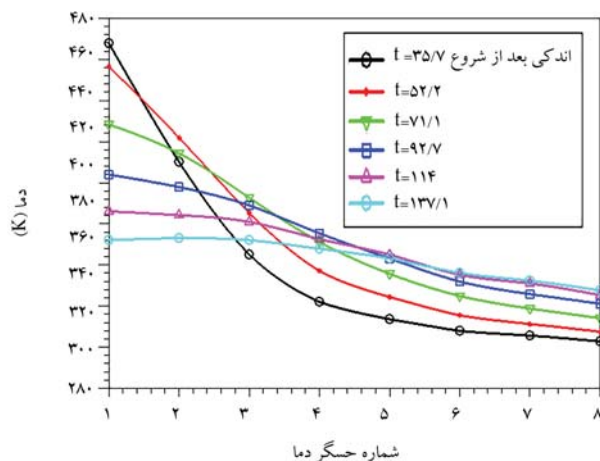
روش به رژیم میرایی متفاوت است، اما رفتارهای مشابهی از خود نشان دادند. در روش دوم حل دقیق‌ترین‌گونه حاصل شد که در هرگام زمانی، با محاسبه‌ی تغییرات دمایی، مقدار المان‌های الکتریکی مدار الکتریکی هم‌ترا شده نیز به‌روزرسانی شد. با اعمال شرایط بیان شده برای حالت تلفیق مدار الکتریکی و حل عددی (روش دوم)، منحنی‌های دما در طول فرایند خاموشی به‌صورت شکل ۱۱ خواهد بود. در حالتی که با تغییر دما، مقدار المان‌های الکتریکی هم‌ترا شده با موتور گرم‌صوتی نیز به‌روزرسانی گردند، پس از گذشت مدت زمان کوتاهی، دما در طول استک به مقدار متعادلی می‌رسد. در این حالت تمام نقاط استک به صورت هم‌زمان دچار کاهش دما می‌شوند.

به عبارت دیگر در ثانیه‌های اولیه رژیم خاموشی همچنان ترم پمپاژ گرم‌صوتی به عنوان ترم غالب متقل‌کننده‌ی انرژی عمل می‌کند اما با گذشت زمان، تأثیر این ترم کاهش یافته و ترم انتقال حرارت هدایتی به عنوان ترم غالب، تا زمان رسیدن به دمای مرجع عمل می‌کند. بعد از ورود به مرحله‌ی خاموشی، جریان هم‌رفتی کاهش یافته و منجر به افزایش دما در حسگرهای نیمه دوم استک می‌شود. به‌طور کلی منحنی‌های دما در شکل ۱۰ و شکل ۱۱ با اختلاف اندکی به صورت یکسان رفتار کردند اما نکته‌ی مورد توجه در این دو شکل مربوط به منحنی دما در ثانیه اول رژیم خاموشی است. در شکل ۱۰ رژیم خاموشی بعد از فعالیت چند دقیقه‌ی سیستم در حالت نوسانات پایا اتفاق افتاده است در حالی که در شکل ۱۱ منحنی دما بعد از چند ثانیه عملکرد در مرحله‌ی نوسانات پایا وارد رژیم خاموشی شده است. از آنجا که در روش دوم فاصله‌ی رژیم شروع نوسانات خودبه‌خودی و رژیم خاموشی کوتاه تر است، لذا مقادیر دما در لحظه‌ی ورود به مرحله‌ی خاموشی برای روش دوم، نسبت به همین حالت در روش اول بیشتر است.

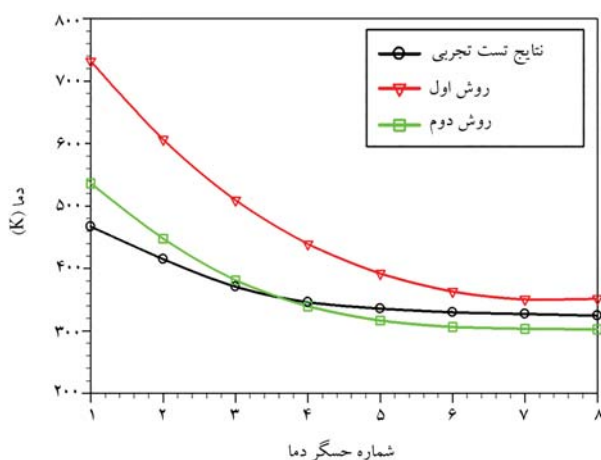
همچنین در شکل ۱۲ روند تغییرات دامنه فشار نوسانی نمایش داده شده است که به محض قطع شدن توان حرارتی ورودی به استک، دامنه فشار نوسانی نیز روند کاهش را در پیش می‌گیرد. شروع فرایند خاموشی از ثانیه ۳۳، با حذف توان ورودی اتفاق افتاد.

### ۳.۷. نتایج تجربی

هر آزمون در مدت زمان تقریبی ۲۶۰ ثانیه انجام شد و در هر ثانیه ۳ بار دمای حسگرها ثبت شد. با اتصال جریان برق، گرمکن شروع به گداخته شدن کرده و دما در



شکل ۱۵. مقادیر دمای اندازه‌گیری شده در طول استک برای مرحله‌ی میرایی نوسانات خودبه‌خودی.

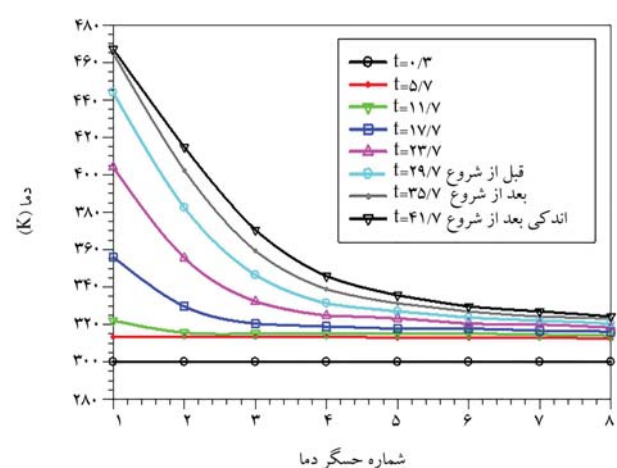


شکل ۱۶. منحنی دما در طول استک برای دو روش حل عددی و مقادیر آزمایش تجربی (مرحله‌ی شروع نوسانات خودبه‌خودی).

#### ۴.۷. مقایسه نتایج

در شکل ۱۶ منحنی تغییرات دما برای دو روش حل عددی و مقادیر اندازه‌گیری شده توسط حسگرهای دما در طول آزمایش نشان داده شده است. نمودار شکل ۱۶ میزان تطابق دمای اندازه‌گیری شده در حالت تجربی و مقدار محاسبه شده توسط دو روش بیان شده را برای بازه شروع نوسانات خودبه‌خودی نمایش می‌دهد. مقادیر ارائه شده، میانگین دمای اندازه‌گیری شده در مجموع آزمون‌های انجام شده توسط هر حسگر در لحظه‌ی شروع نوسانات خودبه‌خودی است.

با توجه به شکل ۱۶ مطابقت خوبی میان روند تغییرات دما اندازه‌گیری شده به روش تجربی و دو روش حل عددی دیگر در نیمه انتهایی استک دیده می‌شود. در نیمه نخست استک هرچند داده‌های روش تلفیقی دارای اختلاف اندکی با مقادیر مربوط به حسگرها در روش تجربی هستند، اما هرچه به ابتدای استک (نقطه‌ی  $R_1$ ) نزدیک می‌شویم، این اختلاف افزایش می‌یابد. علت وجود این تفاوت در موقعیت نیمه‌ی نخست استک، به دلیل وجود فاصله دو میلی‌متری حسگر اول با المنت گرمکن و تأخیر زمانی در برقراری تعادل حرارتی میان حسگر و المنت گرمکن است. تعادل حرارتی زمانی ایجاد می‌شود که سیستم مدت زمان مشخصی را در دمای معین گرمکن بگذرانند یا به عبارت دیگر دمای گرمکن و حسگر دقیقاً یکسان باشد.

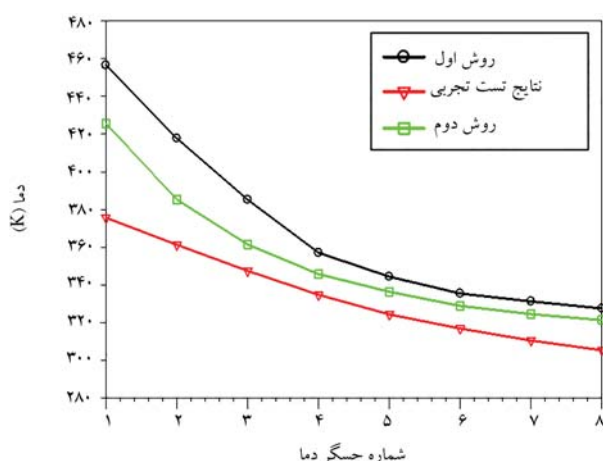


شکل ۱۴. مقادیر دمای اندازه‌گیری شده در طول استک برای لحظات قبل و اندکی بعد از شروع نوسانات خودبه‌خودی. زمان‌ها برحسب ثانیه است.

سیستم برای مدتی (حدوداً ۲۰ ثانیه) در حالت نوسانات پایدار فعالیت کند و سپس جریان برق در سیستم قطع شده و دمای استک در طول فرایند میرایی اندازه‌گیری می‌شود. فرایند میرایی نوسانات از لحظه قطع جریان برق شروع شده و تا زمانی که اختلاف دمای دو طرف استک به زیر حد بحرانی<sup>۸</sup> برسد ادامه دارد درحالی که بعد از قطع جریان برق در سیستم، تولید صوت هفت ثانیه ادامه داشت (تا ثانیه‌ی ۶۰). هنگامی که صوت بلند و یکنواختی تولید شد، توان ورودی سیستم توسط اپراتور کاهش یافت. در این حالت حسگر مجاور گرمکن بیشترین دما را ثبت کرد در حالی که دمای ابتدای استک به مقدار بیشینه‌ی خود نرسیده است و این نکته پایین بودن ضریب هدایت حرارتی صفحات میکا قرارگرفته در طول استک را بیان می‌کند.

شکل ۱۴ نمودار شیب دمای اندازه‌گیری شده در استک در ۸ زمان متفاوت را نمایش می‌دهد. در شکل ۱۴ دمای مجموعه حسگرها در یک زمان معین، در کنار یک دیگر شیب دمایی در طول استک را مشخص می‌کند و پروفیل دمای مربوط به لحظات قبل و اندکی بعد از شروع نوسانات خودبه‌خودی در سیستم نمایش داده شده است. همچنین شیب دمایی در طول استک در ۶ زمان متفاوت ثبت شد و در شکل ۱۵ ارائه شده است این لحظات مربوط به اندکی بعد از شروع نوسانات خودبه‌خودی تا محدوده خاموشی سیستم است.

تعداد ۱۰ آزمون برای اطمینان از صحت داده‌های دریافتی حسگرها و بررسی تکرارپذیری آزمایش‌ها انجام شد. مدت زمان انجام آزمایش می‌بایست به اندازه‌ی باشد که تأثیر متغیرهایی که در آزمایش وجود دارند، به خوبی نمایان شود. آزمون‌ها برای مدت زمان تقریبی ۲۶۰ ثانیه صورت گرفت و در نهایت، حاصل میانگین داده‌های دریافتی استخراج شد. بیشترین مقدار انحراف معیار در دمای اندازه‌گیری شده در طول انجام ۱۰ آزمون متوالی و در طول استک، برابر ۸/۷ کلوین اندازه‌گیری شد. در بازه شروع فرایند نوسانات خودبه‌خودی تا رسیدن به حالت نوسانات پایا، میزان اغتشاشات موجود در گاز افزایش می‌یابد (به دلیل تغییرات زیاد دامنه‌ی فشار نوسانی) و متأثر از آن، دمای نقاط مختلف دچار تغییرات با سرعتی بالاتر از نرخ اندازه‌گیری حسگرهای دمای تعبیه شده در قسمت استک می‌شود. لذا مقادیر انحراف معیار دمای اندازه‌گیری شده، با افزایش دما و در بازه شروع و پایداری نوسانات خودبه‌خودی بیشترین مقادیر را به خود اختصاص دادند.



شکل ۱۷. منحنی دمای استک برای دو روش حل عددی و مقادیر آزمایش تجربی (۵ ثانیه پس از شروع مرحله‌ی میرایی نوسانات).

و باعث کاهش دما در نیمه‌ی دوم استک می‌شد، کاهش یافته است. این اثر منجر به افزایش دما در حسگرهای قرارگرفته در نیمه‌ی انتهایی استک می‌شود. همچنین در رژیم خاموشی، اهمیت هدایت حرارتی افزایش یافته و تأثیر انتقال انرژی به کمک امواج صوتی کاهش می‌یابد. این اثر با شدت کم‌تری برای حل عددی روش اول در شکل ۱۷ دیده می‌شود که بدون تأثیر دما در المان‌های الکتریکی هم‌تراز شده است. اما در روش تلفیقی که در شکل ۱۷ نمایش داده شده است، رفتاری مشابه آنچه توسط حسگرهای دما در آزمایش‌ها ثبت شده، مشاهده می‌شود. بعد از گذشت چند ثانیه از ورود به مرحله‌ی خاموشی، روند کاهشی دما بسیار کند می‌شود و در این حالت تمام حسگرها به تعادل حرارتی رسیده‌اند و هم زمان با یکدیگر دچار کاهش دما تا رسیدن به دمای مرجع می‌شوند. با از بین رفتن نوسانات صوتی در سیستم، جریان همرفتی که در موتور ایجاد شده بود به شدت تضعیف می‌شود. در این حالت تنها عامل انتقال حرارت به محیط، از طریق هدایت حرارتی میان اجزای سیستم و گاز ساکن اطراف سیستم صورت می‌پذیرد. نکته‌ی مورد توجه دیگر مدت زمانی است که سیستم به دمای مرجع می‌رسد. مدت زمان رسیدن سیستم به دمای مرجع برای منحنی‌های دما مربوط به آزمون تجربی نسبت به دو روش حل عددی ارائه شده بیشتر است.

حسگر  $R_1$  نزدیک‌ترین حسگر اندازه‌گیری دما به المنت گرمکن در آزمون تجربی بود. همچنین در روش حل عددی، محل ورود توان حرارتی (منبع جریان وابسته در مدار الکتریکی، ورودی به گره ۱) در نظر گرفته شد. به همین جهت، تغییرات دما در موقعیت مربوط به حسگر اول برای هر سه مرحله‌ی ذکر شده مورد بررسی قرارگرفت (شکل ۱۷).

مقدار این تغییرات برای موقعیت المان‌های بعدی کم‌تر از مقادیر ثبت شده در موقعیت حسگر شماره ۱ در روش‌های حل عددی است. در شکل ۱۸ رفتار ثبت شده از تغییرات دما در موقعیت  $R_1$  برای هر دو روش حل عددی مشابه است. در روش اول قابلیت تشخیص لحظه‌ی شروع نوسانات خود به خودی وجود نداشت و برنامه تا زمان ایجاد تعادل حرارتی ادامه می‌یافت لذا برای مقایسه تغییرات دما ثبت شده در مرحله‌ی شروع نوسانات خود به خودی برای روش اول، این تغییرات تا ثانیه ۱۳/۱ در نظر گرفته شد. شیب تغییرات دما در هر دو روش برای مرحله‌ی شروع نوسانات خودبه‌خودی کاملاً مشابه است اما روش اول دمای بالاتری را در مرحله‌ی

در طی فرایند آزمایش، بعد از شروع نوسانات خود تقویت شونده، توان ورودی توسط اپراتور کاهش یافت که در این حالت، دامنه فشار نوسانی از حالت واگرا به حالت پایا رسید.

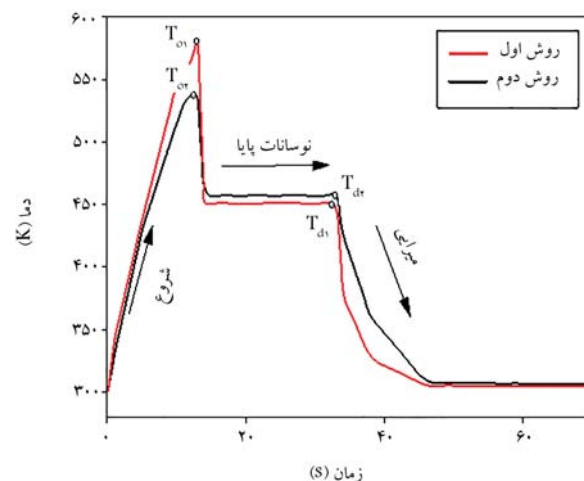
سیستم برای شروع نوسانات به توان بیشتری نیاز دارد و در صورتی که بعد از رسیدن به حالت شروع نوسانات خود تقویت شونده، توان سیستم توسط اپراتور کاهش نیابد، فرکانس نوسانات افزایش یافته و سیستم در دمای بالاتری به تعادل خواهد رسید. این در حالی است که ایجاد نوسانات خود به خودی و عملکرد دستگاه در دمای پایین‌تر همواره مدنظر است. اگر دستگاه با توانی که در حالت نوسانات پایا اعمال شد شروع به کار کند، هیچ‌گاه نوسانات خودبه‌خودی در سیستم شروع نمی‌شود. در موتورهای گرماصوتی با یک مبدل در سمت گرم، به دلیل کاهش لحظه‌ی اختلاف دمای دو طرف استک، فرصت کافی برای ایجاد تعادل حرارتی در هر مرحله از آزمایش (مرحله‌ی شروع، پایداری و خاموشی) وجود ندارد. ذکر این نکته بسیار قابل توجه است که به دلیل وجود فاصله یک میلی‌متری میان لبه‌ی صفحات استک و لوله‌ی استیل (ضخامت نگهدارنده‌ی صفحات استک)، میزان انتقال حرارت از صفحات به محیط، نسبت به حالت حل عددی کم‌تر است و در طول انجام آزمایش منجر به افزایش دما در استک می‌شود. این موضوع از مقایسه‌ی منحنی‌های دمای رسم شده برای روش دوم و آزمون تجربی در شکل ۱۶ برای حسگرهای انتهایی استک کاملاً مشخص است.

به‌طور کلی روش تلفیقی مطابقت مناسبی را با داده‌های آزمون تجربی نشان داد. در میانگین آزمون‌های تجربی انجام شده، زمان اندازه‌گیری شده برای شروع نوسانات خودبه‌خودی ۳۷ ثانیه اندازه‌گیری شد. با توجه به این که مقدار توان ورودی اندازه‌گیری شده در آزمون تجربی به دلیل وجود تلفات فرعی، دقیقاً برابر با همان مقدار توان اعمال شده به حل عددی نیست و همچنین مدت زمان مشخصی طول می‌کشد تا المنت گرمکن به دمای آستانه‌ی شروع نوسانات برسد، همه‌ی این موارد منجر به وجود اختلاف میان زمان اندازه‌گیری شده در آزمون‌های تجربی و حل عددی شده است. در حالتی که عدم قطعیت بیان شده، در حل عددی روش تلفیقی وجود ندارد و به محض شروع حل، توان ورودی ۶۵ وات به طور دقیق در هر لحظه در معادلات اثر می‌کند. به عبارت دیگر در آزمایش‌های تجربی دمای گرمکن یک شیب خطی را از دمای مرجع تا رسیدن به مقدار بیشینه، برحسب زمان طی می‌کند و این اتفاق در میانگین آزمون‌ها ۲۲ ثانیه طول می‌کشد که منجر به افزایش زمان شروع نوسانات خودبه‌خودی می‌شود. مدت زمان لازم برای شروع فرایند نوسانات خودبه‌خودی در حل عددی به روش تلفیقی ۱۳/۱ ثانیه اندازه‌گیری شد که با احتساب مدت زمانی که طول می‌کشد تا گرمکن به دمای مشخص برسد، مطابقت خوبی با زمان اندازه‌گیری شده در آزمون‌های تجربی دارد.

مرحله‌ی سوم ورود به ناحیه‌ی خاموشی سیستم است که در شکل ۱۰ و شکل ۱۱ منحنی‌های دمای حاصل از روش‌های حل عددی اول و دوم و در شکل ۱۳ منحنی‌های دما برای آزمون تجربی نمایش داده شده است. شکل ۱۷ مقایسه‌ی این شکل‌های ۱۰، ۱۱ و ۱۳ است که تغییرات دما در مرحله‌ی خاموشی را نمایش می‌دهد. با توجه به شکل ۱۷ روند کاهش دما در طول استک برای دو روش حل عددی و نتایج آزمون تجربی، برای ثانیه ۵ام ورود به مرحله‌ی خاموشی نشان داده شده است. در آزمایش‌های تجربی با ورود به مرحله‌ی خاموشی، دمای گزارش شده توسط حسگرها کاهش می‌یابد، اما با توجه به کاهش شدت نوسانات صوتی در سیستم، بخشی از انرژی که به صورت توان صوتی از سیستم خارج

پژوهش پیش رو با رویکرد ارتقا روش حل عددی معادلات گرماصوتی و ساخت صورت گرفت که طی آن نتایج کلی ذیل حاصل گشت:

- ارائه روش تلفیقی حل عددی و همترایی مدار الکتریکی برای یک موتور گرماصوتی موج ایستا با یک انتهای بسته که با دقت مناسبی بر نتایج آزمون های تجربی مطابقت داشت؛
- محاسبه ی زمان تقریبی شروع فرایند نوسانات خود به خودی در یک موتور گرماصوتی به کمک روش ارائه شده. این مقدار برای روش حل تلفیقی ۱۳/۱ ثانیه اندازه گیری شد؛
- اندازه گیری شیب دما در طول استک موتور گرماصوتی موج ایستا به کمک دو روش حل عددی ارتقا یافته. پروفیل دمای ثبت شده در طول استک برای روش دوم، مطابقت بیشتری را با نتایج حل عددی نشان داد؛
- بررسی عددی تفاوت میان شرایط فرایند شروع و میرایی نوسانات در سیستم که با تحلیل دامنه ی فشار نوسانی در روش دوم مشخص شد. در این حالت شروع نوسانات پروفیل دمای اندازه گیری شده در طول استک با پروفیل دما در لحظه ی حذف توان حرارتی ورودی به سیستم که درست در انتهای حالت نوسانات پایا اندازه گیری شد، نشان دهنده ی وجود اختلاف دما میان فرایند شروع و میرایی در موتور گرماصوتی موج ایستا مدل شده بود؛
- مقدار توان حرارتی ورودی به موتور گرماصوتی برای شروع نوسانات خود به خودی وابسته به جنس ماده مورد استفاده در استک است؛
- در یک توان حرارتی ورودی یکسان، استفاده از ورقه های میکا به جای ورقه های آهن گالوانیزه در استک موتور گرماصوتی، زمان شروع نوسانات خود به خودی را کاهش می دهد؛
- هرچه میزان رسانش حرارتی ماده مورد استفاده در استک موتور گرماصوتی کم تر باشد، مدت زمان عملکرد سیستم در حالت نوسانات پایا بیشتر خواهد بود.



شکل ۱۸. منحنی دمای حسگر  $R_1$  برای مرحله ی شروع، پایداری و میرایی نوسانات خود به خودی. مقادیر  $T_0$  و  $T_d$  به ترتیب نمایش دهنده ی مقدار دمای بحرانی شروع و میرایی نوسانات در سیستم است.

شروع نوسانات پیش بینی کرده است. مرحله ی نوسانات پایا به مدت ۲۰ ثانیه برای روش دوم ادامه داشت و برای روش اول از تعادل حرارتی در توان حرارتی پایین تر حاصل شد. برای هر دو روش حل عددی، دمای ثبت شده برای حالت نوسانات پایا کم تر از دمای ثبت شده طی فرایند شروع نوسانات خود به خودی است و وجود دو دمای بحرانی در سیستم را تأیید می کند. بخش سوم نمودار که از ثانیه ی ۳۷ شروع می شود، مربوط به رژیم میرایی است که با حذف توان حرارتی ورودی آغاز می شود و تا لحظه ی رسیدن به دمای مرجع ادامه می یابد. به طور کلی در روش دوم با تأثیر دما بر مقدار المان های الکتریکی، تغییرات دما به صورت هموارتری محاسبه شد.

## ۸. نتیجه گیری

در این پژوهش یک مدل حل عددی و شبیه سازی الکتریکی برای موتور گرماصوتی موج ایستا ارائه شد که تلفیقی از حل عددی معادلات گرماصوتی و همترایی مدار الکتریکی بود که با در نظر گرفتن ظرفیت حرارتی صفحه ی میانی، تغییرات زمانی دما در طول استک بررسی شد. مدل مدار الکتریکی هم ترا شده با موتور گرماصوتی موج ایستا، در بخش استک به شکل خاصی هم ترا شده بود که امکان شبیه سازی کامل یک دستگاه گرماصوتی را فراهم کرد.

مشخصات مربوط به این همترایی، حاصل از نمونه ساخته شده برای انجام تحقیقات تجربی در این پژوهش بود. در این مدل همترایی مدار الکتریکی، بخش استک به تعداد ۸ قسمت تقسیم شد که مشاهده پروفیل دما در طول آن فراهم شد و دقت محاسبه ی دما را از دو نقطه به ۸ نقطه در طول استک افزایش داد. همچنین فرایندهای شروع، پایداری و میرایی نوسانات در سیستم به کمک دو روش در این پژوهش بررسی شد که طی آن روش دوم قادر به پیش بینی زمان شروع و میرایی نوسانات خود به خودی در سیستم بود.

نمودارهای خروجی روش حل عددی با نمودارهای آزمایش تجربی مطابقت خوبی داشتند؛ لذا مدل بررسی شده برای یک استک با یک مبدل حرارتی که ایزولاسیون حرارتی روی آن صورت نگرفته است، نتایج خوبی را به نمایش گذاشت.

## فهرست علائم

$p_m$ : فشار متوسط  $Pa$ ؛

$\rho_m$ : چگالی متوسط  $kg/m^3$ ؛

$p_1$ : دامنه فشار نوسانی  $Pa$ ؛

$U_1$ : دامنه دبی حجمی نوسانی  $m^3/s$ ؛

$T_{ref}$ : دمای مرجع  $K$ ؛

$T_m$ : دمای متوسط،  $K$ ؛

$k_{solid}$ : ضریب انتقال حرارتی صفحات استک  $W/m^2 K$ ؛

$k$ : ضریب انتقال حرارتی  $W/m^2 K$ ؛

$A_{solid}$ : سطح جامد  $m^2$ ؛

$V_{solid}$ : حجم صفحات استک  $m^3$ ؛

$A$ : سطح عبور گاز،  $m^2$ ؛

$\dot{q}_{out}$ : شار حرارتی به محیط،  $W/m^2$ ؛

$\dot{Q}_{in}$ : توان حرارتی ورودی،  $W$ ؛

$\dot{E}_{in}$ : توان صوتی ورودی  $W$ ؛

$\dot{E}_{out}$ : توان صوتی خروجی  $W$ ؛

$F(x)$ : جریان انرژی  $W$ ؛

$y$ : فاصله میان صفحات استک  $m$ ؛  
 $\delta_v$ : عمق نفوذ لزجی  $m$ ؛  
 $\delta_k$ : عمق نفوذ حرارتی  $m$ ؛  
 $g$ : ضریب منبع وابسته؛  
 $\omega$ : فرکانس دورانی  $rad$ ؛  
 $Re$ : بخش حقیقی عدد مختلط؛  
 $Im$ : بخش حقیقی عدد مختلط؛  
 عدد موهومی  $i$ .

$G(x)$ : اثر پمپاژ گرماسوتی  $W$ ؛  
 $R$ : ثابت جهانی گاز  $J/K.mol$ ؛  
 $\sigma$ : عدد پراشتل؛  
 $f_v$ : تابع لزجی رات؛  
 $f_k$ : تابع حرارتی رات؛  
 $\gamma$ : نسبت حرارتی ویژه؛  
 $\mu$ : ویسکوزیته دینامیکی  $kg.s/m$ ؛  
 $C_p$ : ظرفیت گرمایی ویژه فشار ثابت  $J/K.mol$ ؛

## پانویسها

1. Kalina cycle
2. heat recovery steam generators (HRSGs)
3. thermo-acoustic effect
4. rott
5. bistability
6. hysteresis
7. low-pressure amplitude (5-10% Pm)
8. حد بحرانی، مقدار اختلاف دمایی است که طی آن، نوسانات خود به خودی در سیستم در حالت پایا باقی خواهد ماند.

## منابع (References)

1. Wang, K., Sanders, S.R., Dubey, S. and et al. "Stirling cycle engines for recovering low and moderate temperature heat: a review", *Renew. Sustain. Energy Rev.*, **62**, pp. 89-108 (2016). DOI: 10.1016/j.rser.2016.04.031.
2. Suresh, C. and Saini, R.P. "Review on solar thermal energy storage technologies and their geometrical configurations", *Int. J. Energy Res.*, **44**(6), pp. 4163-4195 (2020). DOI: 10.1002/er.5143.
3. Safaei, M., Sodano, H.A. and Anton, S.R. "A review of energy harvesting using piezoelectric materials: state-of-the-art a decade later (2008-2018)", *Smart Mater. Struct.*, **28**(11), pp.44-45 (2019). DOI: 10.1088/1361-665X/ab36e4.
4. Robbins, T. and Garimella, S. "A centrally heated, air-coupled adsorption cooling system driven by waste heat", *Int. J. Refrig.*, **120**, pp. 58-65 (2020). DOI: 10.1016/j.ijrefrig.2020.08.026.
5. Jin, T., Huang, J., Feng, Y. and et al. "Thermoacoustic prime movers and refrigerators: thermally powered engines without moving components", *Energy*, Elsevier, **93**(P1), pp. 828-853, (Dec. 15 2015). DOI: 10.1016/j.energy.2015.09.005.
6. Karlsson, M., Åbom, L., Lalit, M. and et al. "A Note on the applicability of thermo-acoustic engines for automotive waste heat recovery", *SAE Int. J. Mater. Manuf.*, **9**(2), pp. 286-293 (2016). DOI: 10.4271/2016-01-0223.
7. Bou Nader, W., Chamoun, J. and Dumand, C. "Thermoacoustic engine as waste heat recovery system on extended range hybrid electric vehicles", *Energy Convers. Manag.*, **215**(April), p. 112912 (2020). DOI: 10.1016/j.enconman.2020.112912.
8. Ramadan, I.A., Baillet, H. and Valière, J.C. "Experimental investigation of acoustic streaming in a simple thermoacoustic engine", *24th Int. Congr. Sound Vib. ICSV 2017*, pp. 1-8 (2017).
9. Wang, K., Dubey, S., Choo, F.H. and et al. "Thermoacoustic stirling power generation from LNG cold energy and low-temperature waste heat", *Energy*, **127**, pp. 280-290 (2017). DOI: 10.1016/j.energy.2017.03.124.
10. Chen, G., Tang, L., Yang, Z. and et al. "An electret-based thermoacoustic-electrostatic power generator", *Int. J. Energy Res.*, **44** (3), pp. 2298-2305 (2020). DOI:10.1002/er.5019.
11. Chen, G., Tang, L. and Mace, B.R. "Modelling and analysis of a thermoacoustic-piezoelectric energy harvester", *Appl. Therm. Eng.*, **150** (November 2018), pp. 532-544 (2019). DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2019.01.025.
12. L. R. W. "The Theory of Sound", *Nature*, **58**(1493), pp. 121-122 (Jun 1898). DOI: 10.1038/058121a0.
13. Rott, N. "Damped and thermally driven acoustic oscillations in wide and narrow tubes", *Zeitschrift für Angew. Math. und Phys. ZAMP*, **20**(2), pp. 230-243 (1969). DOI: 10.1007/BF01595562.
14. Qiu, L.M., Lai, B.H., Li, Y.F. and et al. "Numerical simulation of the onset characteristics in a standing wave thermoacoustic engine based on thermodynamic analysis", *Int. J. Heat Mass Transf.*, **55**(7-8), pp. 2200-2203 (2012). DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2011.11.043.
15. Rott, N. "Thermoacoustics", **20**, C-S. Yih. Elsevier, pp.135-175 (1980).
16. Swift, G.W. "Thermoacoustic engines", *J. Acoust. Soc. Am.*, **84**(4), pp. 1145-1180 (Oct 1988). DOI:10.1121/1.396617.
17. A. Cox. "Natural Engines", *Phys. Today*, **38**(8), pp. 50-58 (1985). DOI: 10.1063/1.880985.

18. Zhou, S., and Matsubara, Y. "Experimental research of thermoacoustic prime mover", *Cryogenics (Guildf)*, **38**(8), pp. 813-822 (1998). DOI: 10.1016/S0011-2275(98)00055-1.
19. Chen, G., Krishan, G., Yang, Y. and et al. "International journal of heat and mass transfer numerical investigation of synthetic jets driven by thermoacoustic standing Waves", *Int. J. Heat Mass Transf*, **146**, p. 118859 (2020). DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.118859.
20. Piccolo, A. "Numerical study of entropy generation within thermoacoustic heat exchangers with plane fins", no. July, pp. 8228-8239 (2015). DOI: 10.3390/e17127875.
21. El-rahman, A.I.A., Abdelfattah, W.A. and Fouad, M.A. "International journal of heat and mass transfer a 3D investigation of thermoacoustic fields in a square stack", *Int. J. Heat Mass Transf*, **108**, pp. 292-300 (2017). DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.12.015.
22. Mergen, S., Yildirim, E. and Türkoğlu, H. "Numerical study on effects of computational domain length on flow field in standing wave thermoacoustic refrigerators", *Cryogenics (Guildf)* (2018). DOI: 10.1016/j.cryogenics.2018.09.012.
23. Ilori, O.M., Jaworski, A.J. and Mao, X. "Experimental and numerical investigations of thermal characteristics of heat exchangers in oscillatory flow ", *Appl. Therm. Eng* (2018). DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2018.07.073
24. Cao, N., Olson, J.R., Swift, G.W. and et al. "Energy flux density in a thermoacoustic couple", *J. Acoust. Soc. Am*, **99**(6), pp. 3456-3464 (1996). DOI: 10.1121/1.414992.
25. Ishikawa, H. and Mee, D.J. "Numerical investigations of flow and energy fields near a thermoacoustic couple", *J. Acoust. Soc. Am*, **111**(2), pp. 831-839 (2002). DOI: 10.1121/1.1430687.
26. Piccolo, A. and Pistone, G. "Estimation of heat transfer coefficients in oscillating flows: The thermoacoustic case", *Int. J. Heat Mass Transf*, **49**(9-10), pp. 1631-1642 (2006). DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.11.009.
27. Swift, G.W., *Thermoacoustics. Cham: Springer International Publishing* (2017).
28. Jin, T., Yang, R., Liu, Y. and Tang, et al. "Thermodynamic characteristics during the onset and damping processes in a looped thermoacoustic prime mover", *Appl. Therm. Eng*, **100**, pp. 1169-1172 (2016). DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2016.02.115.
29. Qiu, L.M. and et al. "Characteristics of onset and damping in a standing-wave thermoacoustic engine driven by liquid nitrogen", *Chinese Sci. Bull*, **58**(11), pp. 1325-1330 (2013). DOI: 10.1007/s11434-012-5214-z.
30. He, Y.L., Ke, H.B., Cui, F.Q. and et al. "Explanations on the onset and damping behaviors in a standing-wave thermoacoustic engine", *Appl. Therm. Eng*, **58**(1-2), pp. 298-304 (2013). DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2013.04.031.
31. Chen, G.B. and Jin, T. "Experimental investigation on the onset and damping behavior of the oscillation in a thermoacoustic prime mover", *Cryogenics (Guildf)*, **39**(10), pp. 843-846 (1999). DOI: 10.1016/S0011-2275(99)00099-5.
32. Clark, J.P., Ward, W.C. and Swift, G.W. "Design environment for low-amplitude thermoacoustic energy conversion (DeltaEC)" *J. Acoust. Soc. Am*, **122**(5), p. 3014 (2007). DOI: 10.1121/1.2942768.
33. Xiao, J.H. "Thermoacoustic heat transportation and energy transformation part 1: formulation of the problem", *Cryogenics (Guildf)*, **35**(1), pp. 15-19 (1995). DOI: 10.1016/0011-2275(95)90419-G.
34. Marx, D. and Blanc-benon, P. "Numerical calculation of the temperature difference between the extremities of a thermoacoustic stack plate", **45**, pp. 163-172 (2005). DOI: 10.1016/j.cryogenics.2004.08.007.
35. Aben, P. "High-amplitude thermoacoustic flow interacting with solid boundaries", Eindhoven University of Technology Library (2010).
36. Arnott, W.P., Belcher, J.R., Raspet, R. and et al. "Stability analysis of a helium-filled thermoacoustic engine", *J. Acoust. Soc. Am*, **96**(1), pp. 370-375 (1994). DOI: 10.1121/1.410486.

## \* مشخصات مقالات ارسالی:

مقاله به صورت دوتونی (طول سطر ۸/۵ سانت) در قالب نرم افزار Word با قلم نازنین پوینت ۱۲ با فاصله سطر مناسب (تمامی معادلات، علائم ریاضی، رابطه ها الزاماً فقط در محیط Mathtype ارائه شود) و منضم به نامه معرفی مقاله از سوی استاد راهنما به نشانی سایت مجله <http://journal.sharif.ir> به دفتر مجله ارسال شود.

\* ضمن معرفی نویسنده مسئول مقاله، نشانی پست الکترونیکی کلیه نویسندگان قید شود.

\* صفحه عنوان شامل: عنوان مقاله، اسامی نویسندگان و ذکر نویسنده مسئول، درج آخرین درجه علمی کلیه نویسندگان، نشانی پست الکترونیکی ایشان، چکیده فارسی بین ۱۳۰ تا ۱۵۰ کلمه، چکیده انگلیسی در حد یک صفحه A4 کامل (قلم Times فونت ۱۲) و کلمات کلیدی فارسی و انگلیسی ارائه شود.

\* سایر اجزای اصلی مقاله، نظیر مقدمه، عناوین بخش های اصلی و زیربخش ها، نتیجه گیری به صورت شماره بندی و کاملاً مشخص باشد، حجم مقاله نیز بین ۷ - ۱۵ صفحه -- با احتساب شکل و نمودار -- باشد.

\* کلیه عبارات، اصطلاحات و اعداد و ارقام در جداول، نمودارها و شکل ها باید به فارسی باشد و موضوع جداول در بالای آنها و موضوع شکل ها و نمودارها در زیر آنها درج شود.

**نکته:** از آنجا که مطالب مجله در ستون های ۸/۵ سانتی متری آراسته می شوند، لازم است اصل (اورژینال) شکل و نمودار در عرض ۸ یا ۱۶ سانتی متر با ضخامت کادر Apx و خط نمودار ۶ px تهیه شوند. پذیرش اصل شکل ها و نمودارها فقط در محیط فتوشاپ با Resolution 600 یا پسوند JPG یا Tif امکان پذیر است.

\* از به کار بردن کلمات و اصطلاحات لاتین که دارای معادل متداول فارسی می باشند، اجتناب شود. در صورت ضرورت استفاده از واژه های لاتین، معادل انگلیسی آن نیز داده شود.

**یادآوری مهم و ضروری:** با توجه به یکسان سازی شکل های کلیه مقالات در محیط فتوشاپ، لازم است اعداد تصاویری که دارای راهنمای رنگی و کانتور (فشار، سرعت، تنش و...) هستند، با فرمت جنرال (عدد معمولی) ارائه شود (طبق شکل های نمونه) و از آوردن اعداد به صورت نماد علمی و سایر نمادها جدا خودداری شود.

\* کلیه منابع مورد استفاده، شماره بندی (از شماره یک و به طور مسلسل) و در متن مقاله در داخل کروشه [ ] مشخص شود. در بخش مراجع کلیه منابع مورد استفاده به زبان انگلیسی ارائه شود. با توجه به مثال های زیر نوشته شوند. (مراجع فارسی نیز به انگلیسی ترجمه شده و در انتها واژه ای (In Persian) داخل پرانتز قید شده و سال آنها نیز به میلادی برگردان شوند).

Examples:

Journals:

Mirghafoori, S.H., Sadeghi Arani, Z. and Jafarnejad, A. "Forecasting success of commercialization of innovative ideas using artificial neural networks; the case of inventors and innovations in Yazd province", *Journal of Science and Technology Policy*, 4(1), pp. 63-76 (In Persian) (2011).

Journals:

Johnson, W. and Mamalis, A.G. "The preformation of circular plat with four sided pyramidally - headed square-section punches", *Int. J. of Mech. Sci.*, 20 (3), pp.801-820 (1990).

Books:

Hindmarsh, J. "The electrical-circuit viewpoint", *In Electrical Machines and their Applications*, P. Hammond, Ed., 4th Edn., pp. 57-130, Pergamon Press, Oxford, UK (1975).

Proceedings and reports:

Walker, L.K. and Morgan, J.R. "Field performance of firm silty clay", *9th Int. Conf. on Soil Mech. And Found. Engrg.*, 1, Tokyo, Japan, pp.341-346 (1977).

Barksdale, R.D. and Bachus, R.C. "Design and construction of stone columns", Report SCEGIT 83-10, Georgia Inst. of Tech., Atlanta, GA, submitted to Fed. Highway Admin (1983).

Bhandari, R.K.M. "Behavior of tank founded on soil reinforced with stone columns", *VIII European Conf. on Soil Mech. and Found. Engrg.*, Helsinki (1983).

## راهنمای نگارش مقالات مجله علمی و پژوهشی

# شریف

مجله علمی و پژوهشی «شریف»، از انتشارات دانشگاه صنعتی شریف است که هدف آن فراهم آوردن بستری مناسب برای تبادل اطلاعات در زمینه های پژوهش های علمی، فنی و تخصصی در میان استادان و دانشمندان و اعتلای سطح دانش نظری و علمی آنان و نیز تهیه مجموعه ای مفید است. چاپ مقالات در مجله شریف منوط به دارا بودن یکی از ویژگی های زیر است:

۱. مقالاتی که حاوی مطالب بدیع در زمینه های علمی و فنی بوده و در مجله دیگری به چاپ نرسیده باشند؛ مقاله های ارائه شده در کنفرانس، از این امر مستثنی هستند و مانند سایر مقالات، ارزیابی شده و در صورت تایید به چاپ می رسند.

۲. مقالات مبتنی بر تحقیقات نظری و علمی پیشرفته، دارای یکی از مشخصات زیر:

۱.۲. با نقد و بررسی در موضوعات فنی و مهندسی، به طرح نظرهای جدیدی پرداخته و به نتایج تازه ای دست یافته باشند.

۲.۲. به اختصار و در زمینه های فنی، صنعتی و پژوهشی تدوین شده باشند.

۳.۲. پژوهش، تلخیص و استنتاج از برخی آثار برجسته علمی و فنی باشند.



was used. The numerical results show that changing the geometry of the nozzle hole and creating a rotational flow inside it leads to reducing the severity of cavitation and thus reducing the erosion and corrosion caused by it and increasing the life of the injector nozzle. Thus the fuel spray characteristics can be controlled by creation of swirly flow and changing the nozzle geometry and needle lift profile. Numerical results and experimental data validated from previous researches.

**Key Words:** Marine diesel engines, swirly flow, turbulence intensity, fuel injection angle, emission.

## MODEL DEVELOPMENT FOR STARTUP AND DAMPING OF A STANDING WAVE THERMO-ACOUSTIC ENGINE

**A. Moradi**

moradialireza@modares.ac.ir

**F. Ommi**(corresponding author)

fommi@modares.ac.ir

**M. Bahrami**

bahramymohsen@modares.ac.ir

**Dept. of Mechanical Engineering  
Tarbiat Modares University**

**Z. Saboohi**

saboohi@ari.ac.ir

**Aerospace Research Institute  
Tehran**

**DOI:10.24200/J40.2021.57707.1586**

Sharif Mechanical Engineering Journal

Volume 38, Issue 1, Page 113-125, Research Note

© Sharif University of Technology

- Received 24 April 2021; received in revised form 17 September 2021; accepted 2 November 2021.

### Abstract

This paper presents a numerical method to evaluate the system conditions in transient mode for a standing wave

thermo-acoustic engine (STAE). This method focuses on increasing the accuracy of predictions and creating a better eyesight of the operating conditions of these devices. Combining the numerical solution of transient mode with the electrical circuit analogy of standing wave TAE, is the main idea of this work. Electrical circuit analogy of STAE is done by assuming each component of a STAE as a lumped element. The result of Combining the time-dependent numerical solution and the electrical circuit analogy is a code, which determines the condition of startup, steady periodic, and damping regime of the spontaneous oscillations in the STAE. Accordingly, a nonlinear temperature distribution is obtained along the hot core. The developed numerical approach is in line with the experimental results of a STAE. Based on this method, the temperature variations along the stack and the impact of stack material on startup time and onset temperature are numerically investigated. Additionally, the onset temperature profiles are calculated and presented comparatively for the numerical and experimental results. The startup time of spontaneous oscillations is calculated for the standing wave system. Consequently, the best geometry that quickly reaches the sustained oscillations can be selected using this model. Examining the temperature profile during the startup and damping process highlights a temperature difference between these two processes. Observations show that using a material with lower thermal conductivity in the stack section can reduce the onset-damping temperature difference. Also, with the help of this method the startup moment of spontaneous oscillations was calculated as second in the system. The data obtained from the experimental tests and the temperature profiles resulting from the numerical solution method, showed a good agreement with each other for the onset and damping process in the system. The novel approach described here shows potential in capturing the onset-damping behavior of thermoacoustic systems efficiently.

**Key Words:** Thermo-acoustic engine, standing wave, onset process, damping process, electrical circuit analogy, numerical solution.

**M. Taghipoor**(corresponding author)

mtaghipoor@sharif.ir

**Dept. of Mechanical Engineering**

**Sharif University of Technology**

**DOI:10.24200/J40.2022.59079.1621**

Sharif Mechanical Engineering Journal

Volume 38, Issue 1, Page 85-97, Original Article

© Sharif University of Technology

- Received 14 November 2021; received in revised form 2 January 2022; accepted 18 January 2022.

### Abstract

Hot isostatic pressing (HIP) is a manufacturing process used in powder metallurgy science. It can be used to consolidate a powder, enhance the properties of a single crystal, solidify a cast blade in a specified direction and generally, densify a cold pressed, sintered or a cast part. The numerical simulation of the thermofluidic responses of working gases can provide important and detailed information about the dynamics of fluid flow and heat transfer in a HIP furnace. This information cannot be obtained from experimental observations. The experimental investigation of such a high temperature and pressure process is quite expensive. Moreover, the high working pressure and temperature limits the application of probes and sensors that may enable detailed data collection. This paper presents the modeling procedure and the results of a numerical investigation of a HIP furnace. The effects of the heater temperature, the performance of the cooling water system, and the presence of a radiation shield in front of the element were studied for two working gases. Moreover, investigation of the element heat flux and the temperature variation of the furnace could be used to choose a proper element and design an accurate control system. In order to increase the accuracy of the results, a real gas thermodynamic model has been also employed. In terms of physical modeling, the momentum and continuity equations and a two-equation turbulence model were coupled with the energy equation and radiation correlations. The results indicate that the final furnace pressure is directly influenced by the performance of the cooling system and the initial furnace pressure. A linear relation between the final and initial furnace pressure is observed. In addition, the final pressure is dependent on the type of the working gas whereas the temperature distribution is not significantly varied by gas selection. Based on the results, existence of the radiation shield causes non-uniformity in the flow field and temperature distribution of the hot zone area. The thermal conductivity of the furnace wall has a significant effect on the furnace heat loss. As the thermal conductivity increases tenfold, heat loss increases by 700 percent.

**Key Words:** Hot isostatic pressing furnace, numerical simulation, heat transfer.

## NUMERICAL INVESTIGATION ON THE EFFECT OF INCREASING TURBULENCE INTENSITY AND CHANGING THE INJECTION ANGLE ON THE PERFORMANCE AND EMISSION OF CATERPILLAR MARINE DIESEL ENGINE

**A.H. Farajollahi**(corresponding author)

a.farajollahi@sharif.edu

**Dept. of Engineering**

**Imam Ali University**

**R. Friruzi**

rezafiruzi@edu.ikiu.ac.ir

**Faculty of Engineering**

**Imam Khomeini International University**

**DOI:10.24200/J40.2021.57189.1573**

Sharif Mechanical Engineering Journal

Volume 38, Issue 1, Page 99-112, Research Note

© Sharif University of Technology

- Received 26 December 2020; received in revised form 28 August 2021; accepted 9 October 2021.

### Abstract

In this article, the effect of increasing turbulence intensity and changing fuel injection angle on performance and pollution of Caterpillar marine diesel engine has been investigated using computational fluid dynamics method in Fire software. To this end, two phase flow inside the diesel injector was simulated using the CFD.Solidworks software has been used for geometry creation and AVL-Fire software has been used for meshing and simulating. In order to increase the turbulence intensity, the groove inside the injector nozzle has been used and the fuel injection angle has been increased. Numerical results of injector and diesel engine simulation in operating conditions were compared with experimental data and a good agreement was observed between them. The results of diesel engine performance show that grooving, increasing turbulence intensity and fuel injection angle lead to a 75% increase in power and torque output and a 37% reduction in fuel consumption compared to the cylindrical fuel nozzle. Also, the results related to the pollution of this marine diesel engine show that in this case, the pollutants of carbon monoxide and nitrogen oxide decreasing 42.73% and 45.45%, respectively. Also, in this case, the engine has no problem in terms of producing soot pollutants and the soot produced during the combustion process is well oxidized. Then, in order to create a rotational flow and reduce the intensity of cavitation as well as the resulting erosion, the geometry of the cylindrical nozzle hole was changed to a converging cone and the groove inside it

the degradation process in the rolling element bearings (REBs). In the first step, this feature is transformed into a stationary time series using logarithmic transformation. That is because the long short-term memory neural network (LSTM-NN) works better with the stationary time series. Training the LSTM-NN is performed by this stationary time series as the input and the response is the training time series with values shifted by one time step. Therefore, the LSTM-NN learns to predict the value of the next time step at each point. In other words, to forecast the values of multiple time steps in the future, previous forecasted steps are used as inputs. Next, the values of the future time steps are returned to the main non-stationary form to predict the trend of the peak in the future. Importantly, new measured data can be used to perform new predictions. For this purpose, for every new measured data, the LSTM-NN repeats the mentioned steps and generates a new trend. This algorithm is a trend-dependent method. Therefore, an REB that has a slow degradation stage in its life, which is corresponding to the growth and expansion of defects in REBs, is appropriate to be studied by this algorithm. This method is implemented on two REBs from PRONOSTIA accelerated-life test which have been used by many researchers in the literature. According to the prediction results, the remaining time that peak amplitude trend touches a given threshold is provided. If this threshold is a criterion for the end of life (EoL), this method can be used to determine the RUL. The performance of the proposed method has been evaluated and the presented results are in a good agreement with the experimental data.

**Key Words:** Recurrent Neural Network (RNN), Long Short-Term Memory (LSTM), Remaining Useful Life (RUL), time series forecasting, bearing accelerated-life test.

## ACTIVE FLOW CONTROL IN DARRIEUS WIND TURBINE BLADE USING PLASMA ACTUATOR

M. Zare Chavoshi

zare@ae.sharif.ir

A. Ebrahimi (corresponding author)

ebrahimi\_a@sharif.ir

Dept. of Aerospace Engineering

Sharif University of Technology

DOI:10.24200/J40.2022.59189.1623

Sharif Mechanical Engineering Journal

Volume 38, Issue 1, Page 73-83, Original Article

© Sharif University of Technology

- Received 30 October 2021; received in revised form 25 January 2022; accepted 29 January 2022.

## Abstract

Darrieus type vertical axis wind turbine is an appropriate choice for local electricity generation in urban environments. The major aerodynamical challenge in these turbines is dynamic stall which drastically affects the aerodynamic performance of the turbine. In this study, the effect of plasma actuator on aerodynamic performance of a Darrieus type vertical axis wind turbine was numerically investigated. Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes (URANS) equations were employed, accompanied with  $k-\omega$  SST turbulence model. Suzen-Hoang model was used to model plasma actuator that calculates body force source term representing plasma actuator effects. The pressure-based finite volume method was utilized to solve the governing equations. First, the physics of dynamic stall in turbine blade was explored. Results show that the contribution of connection point moment in instantaneous moment of a blade is more than 25 percent. Moreover, counter clock-wise vortex in the suction side of blade was found to have a significant role in the blade's performance. To study plasma actuator effects, three test cases of inboard, outboard, and two side actuation, were considered and compared with the clean blade (no plasma actuator). The inboard plasma actuator weakened the dynamic stall vortex, increased lift, and decrease drag force in the down-stroke motion of the blade. Nevertheless, plasma has no effect during the up-stroke motion since the flow is attached to the blade's surface. The inboard actuation is effective for blade azimuth angles in the range of 70 to 180 degrees, and the outboard actuation is effective in blade azimuth angles between 180 to 290 degrees. In conclusion, plasma actuator leads to a 10 percent enhancement in power production for inboard actuation and two-sided actuation, but no significant effects were observed for outboard actuation.

**Key Words:** Vertical axis wind turbine, dynamic stall, active flow control, plasma actuator.

## NUMERICAL INVESTIGATION OF AFFECTING PARAMETERS ON THE THERMAL AND DYNAMIC PERFORMANCE OF A HOT ISOSTATIC PRESSING FURNACE

S. Shoaee

Saeed.shoaee@mech.sharif.edu

M. Bakouei

bakouei.mostafa@mech.sharif.edu

M.M. Behzadi

mohammadmatin.behzadi@mech.sharif.edu

analytical solution for river networks can model more complex river networks and can be considered a criterion for the validation of numerical solutions. Also, the existing analytical solution can be used as a tool to validate other analytical solutions in the river network.

**Key Words:** Analytical solution, laplace transform method, advection-dispersion-reaction equation, river network, concentration distribution function.

## SIMULTANEOUS ATTITUDE AND BENDING-TORSIONAL-VIBRATION CONTROL OF A SATELLITE WITH MULTI-SECTION FLEXIBLE PANELS USING PDE BASED BOUNDARY CONTROL-OBSERVER

**M.M. Ataei**

mehdi.sut@gmail.com

**H. Nejat Pishkenari**

nejat@sharif.edu

**H. Salarieh**(corresponding author)

salarieh@sharif.edu

School of Mechanical Engineering

Sharif University of Technology

DOI:10.24200/J40.2021.58511.1604

Sharif Mechanical Engineering Journal

Volume 38, Issue 1, Page 51-62, Original Article

© Sharif University of Technology

- Received 4 September 2021; received in revised form 30 October 2021; accepted 26 December 2021.

### Abstract

In this paper a PDE observer based boundary control method is presented for attitude control and vibration suppression of a general form of flexible satellites considering torsional deflections in addition to bending for the first time. Attitude dynamics of the rigid hub together with the vibrations of solar panels form a coupled system of ordinary and partial differential equations which is controlled directly in this paper without discretization. Consequently, spill-over instability is avoided that may rise from the ignored vibration modes through simplifying partial differential equations into ordinary ones. The presented method requires the least number of feedbacks from boundaries which are estimated by the observer. Therefore, control system still uses information from vibrations in distributed parts while just attitude data shall be measured. Besides, no actuators excess to regular torque actuators in the main hub like reaction wheels are needed. Dynamic model is derived via Hamilton principle method which encompasses coupled ODE-PDE attitude dynamic equations plus the governing equations

of torsional and bending vibrations. Bending deflections appear to be coupled with roll dynamics while torsional deflections affect pitch dynamics and vice versa. PDE observer is designed following the pattern of Luenberger scheme. After constructing error dynamics, Lyapunov stability criterion is applied to prove boundedness of observer states. Next, control laws are introduced that use boundary data estimated by the observer. Again a Lyapunov function is defined to cover total closed-loop system. Implicating Lyapunov stability criterion together with LaSalle invariance reasoning, asymptotic stability of the closed loop system is approved. Finally, finite element model of the satellite is obtained. Euler-Bernoulli beam elements are used in this regard and torsional generalized coordinates are added to them before calculating equivalent mass, stiffness and damping matrices of the dynamic system. Simulation of the closed-loop behavior illustrates good performance of this PDE observer based boundary controller.

**Key Words:** PDE observer, boundary control, flexible satellite, out of plane dynamics.

## PROGNOSTICS OF ROLLING BEARINGS USING LSTM NEURAL NETWORK FOR PREDICTING THE TREND OF DEGRADATION SIGNAL

**M. Behzad**(corresponding author)

m\_behzad@Sharif.ir

**S.A. Hosseinli**

seyedali.hosseinli@mech.sharif.edu

School of Mechanical Engineering

Sharif University of Technology

**H. Arghand**

arghand@znu.ac.ir

Dept. of Mechanical Engineering

University of Zanzan

**A. Banazadeh**

banazadeh@sharif.edu

Dept. of Aerospace Engineering

Sharif University of Technology

DOI:10.24200/J40.2022.58619.1610

Sharif Mechanical Engineering Journal

Volume 38, Issue 1, Page 63-71, Original Article

© Sharif University of Technology

- Received 11 September 2021; received in revised form 25 December 2021; accepted 4 January 2022.

### Abstract

This paper proposes a remaining useful life (RUL) prediction method that uses the peak of the vibration acceleration signal as an appropriate feature to indicate

**F. Dadgar-Rad**(corresponding author)

dadgar@guilan.ac.ir

**S.R. Falahatgar**

falahatgar@guilan.ac.ir

**Faculty of Mechanical Engineering**

**University of Guilan**

**DOI:10.24200/j40.2022.58307.1599**

Sharif Mechanical Engineering Journal

Volume 38, Issue 1, Page 23-34, Original Article

© Sharif University of Technology

- Received 12 June 2021; received in revised form 4 December 2021; accepted 10 April 2022.

### Abstract

The aim of this paper is the formulation and numerical simulation of the growth phenomenon in skin under mechanical loading. The main feature and the novelty of the present research is that it models the skin as a membrane that obeys the constitutive equations of hyperelastic materials. Moreover, the membrane is not necessarily flat, and can have arbitrary initial curvature in its reference configuration. At first, kinematics of membranes under large deformations is formulated and the essential tensors to be used in the next sections are introduced. Afterwards, fundamentals of the formulation of growth mechanics and its specialization for membranes are presented. In this work, growth phenomenon is characterized as an transversely isotropic growth which occurs through a single scalar-valued growth multiplier which is defined in the surface where the growth phenomenon takes place. Growth parameter is considered to be an internal variable that obeys a n evolution equation, which is a first-order differential equation of time. In addition, to solve the evolution equation for growth multiplier, an unconditionally stable Euler backward method is employed. The compressible neo-Hookean strain energy density function is used to derive the expressions for the stress and the fourth-order elasticity tensors. For numerical solution of governing equations, a Total Lagrangian nonlinear finite element formulation is developed. Finally, as numerical examples, growth and large deformation of skin considering initially flat with three square, circular and rectangular geometries, as well as an initially curved cylindrical sector under external pressure loading is investigated. Even though the presented model in this paper is much simpler than the preceding ones, the obtained results are in agreement with those available in the literature. Moreover, numerical calculations and storage space are remarkably reduced by the present formulation, so that the number of membrane elements used in the present work is one percent of that of three-dimensional elements employed in the literature.

**Key Words:** Growth mechanics, skin, membrane, hyperelasticity, nonlinear finite element method.

## ANALYTICAL SOLUTION OF MASS TRANSPORT EQUATION IN RIVER NETWORK

**M.J. Fardadi Shilsar**

m.fardadi@modares.ac.ir

**M. Mazaheri**(corresponding author)

m.mazaheri@modares.ac.ir

**J. Mohammad Vali Samani**

samani\_j@modares.ac.ir

**Dept. of Water Engineering and Management**

**Faculty of Agriculture**

**Tarbiat Modares University**

**DOI:10.24200/J40.2021.58767.1613**

Sharif Mechanical Engineering Journal

Volume 38, Issue 1, Page 35-49, Original Article

© Sharif University of Technology

- Received 22 August 2021; received in revised form 8 november 2021; accepted 9 November 2021.

### Abstract

In this study, by Laplace transform method, the analytical solution of the pollution transport equation in the limited domain for the river network to the upstream and downstream Dirichlet boundary conditions, and the initial condition of zero was extracted, and simulation was performed for two branch and loop networks with fixed and variable boundary conditions. After naming the nodes, by forming matrices of how to connect, flow characteristics and geometry of the river for each network as input to the problem, the diffusion matrix is created based on a function of the Laplace variable, which The value of the concentration in each node is calculated by solving the complex device created and using the inverse Laplace transform. Then, using the analytical solution extracted in a branch of the river for the pollution transfer equation, the analytical solution can calculate the value of pollution concentration at any desired location and time along with the river network. Finally, for validation, the analytical solution was compared with the numerical solution, and then the statistical error indices were calculated. The results indicate the optimal performance and high ability of analytical solution in modeling the two networks and its good adaptation to the numerical solution, which can replace numerical solution due to high accuracy and speed of calculations. Generally, due to common errors in numerical solutions such as numerical dispersion error, Round-off error, Truncation error of Taylor expansion mathematical sentences, analytical solutions, if any, for the river network are recommended over numerical solutions. Also, in the performed simulations, due to the change of the inlet flow and the flow cross-section to each, changes in the pollution concentration occur in the areas where the branches connect to each other, increasing or decreasing. The proposed

FCU. The real-time simulation of the gas turbine engine thermodynamic model is implemented on an industrial personal computer with an input/output board in connection with the electro-hydraulic system. There is time-delay in the forward path of the fuel control system due to the use of flowmeter for measuring the outlet flow rate of the FCU in HIL simulation. According to extensive experimental works, the AC motor's lag dynamics has no considerable effect on the HIL testing, and the flowmeter is the only additional transfer system of which the dynamic effect needs to be mitigated. The results show instability of the hardware-in-the-loop simulation due to unwanted time-delay of the flowmeter. Therefore, a model-based predictor is designed for time-delay compensation of the flowmeter. The consistency of the experimental real-time simulation and off-line simulation shows the applicability of the presented method for mitigating the effect of unwanted dynamic of the transfer system in the HIL simulation.

**Key Words:** Hardware-in-the-loop (HIL), Fuel control unit (FCU), gas turbine engine, model-based predictor.

## NUMERICAL EVALUATION OF THE MECHANICAL PERFORMANCE OF INTELLIGENT ALLOY STENTS UNDER AXIAL LOADING FOR APPLICATION IN PERIPHERAL ARTERY

**F. Nematzadeh**(corresponding author)

f-nematzadeh@araku.a.ir

**Dept. of Materials Engineering  
Faculty of Engineering, Arak University  
S.K. Sadrnezhaad**

sadrnezha@sharif.ed

**Faculty of Materials Science and Engineering  
Sharif University of Technology  
M. Seyedsalehi**

seyedsalehi@kntu.ac.ir

**Faculty of Materials Engineering  
K.N. Toosi University of Technology  
DOI:10.24200/J40.2021.58129.1596**

Sharif Mechanical Engineering Journal  
Volume 38, Issue 1, Page 13-21, Original Article

© Sharif University of Technology

- Received 15 May 2021; received in revised form 7 August 2021; accepted 18 September 2021.

## Abstract

Stent placement has been a unique treatment for peripheral arteries illnesses in the recent years. Intelligent alloy stents can be used for peripheral arteries by reducing problems such as insufficient radial strength, low torsional capability and poor dynamic behavior compared to other stents. The application of the stent develops twofold chief objectives: undersized duration influence which avoids the effects of intimal division and the flexible shrinking and extended duration consequence which avoids restenosis due to the neointimal hyperplasia. Additionally, the other advantages of stent applications can be shortened as monitors: operative contour-capability to attain a satisfactory obsession to the vessel's wall; adequate resistance contrary to the flexible shrinking; fatigue asset due to the pulsatile current and physique's kinematics; a much smaller device to facilitate the percutaneous technique; small thrombogenicity; and height biocompatibility. In this study, metallurgical and mechanical behaviors of two types of intelligent alloys stent were studied by finite element method during the crushing process (axial loading) according to the standard. The intelligent stent material' model used to describe the material and mechanical behavior were based on the free thermodynamic energy of Helmholtz and the free thermodynamic energy of Gibbs. with varying the  $A_f$  temperature from 293 to 303°K (about 10°K), the difference between the upper and lower plateau stresses was about 40 MPa (equivalent to about 12%). The results showed favorable mechanical and clinical behavior of the stent with high  $A_f$  temperature. Intelligent stents with high  $A_f$  temperature is shown to have the best mechanical performance for clinical applications owing to lower Chronic Outward Force (COF), higher Radial Resistive Force (RRF), and more suitable superelastic behavior. Model calculations showed that a high  $A_f$  temperature of Intelligent stent could exert a substantial effect on practical performance of the stent. This finite element model can provide a convenient way for evaluation of biomechanical properties of stents given to effects of intelligent alloys stents used in peripheral artery with respect to the effects of metallurgical, mechanical and clinical performance.

**Key Words:** Intelligent alloys, stent, peripheral artery, finite element method.

## NONLINEAR FINITE ELEMENT ANALYSIS OF SKIN GROWTH USING HYPERELASTIC MEMBRANE MODEL

**N. Firouzi**

firouzi@phd.guilan.ac.ir

# Abstracts of Papers in English

## **HARDWARE-IN-THE-LOOP SIMULATION OF A GAS TURBINE ENGINE FUEL CONTROL UNIT USING MODEL-BASED PREDICTOR**

**M. Nasiri**(corresponding author)

m.nasiri@iut.ac.ir

**Mechanical Engineering Group  
Golpayegan College of Engineering  
Isfahan University of Technology**

**M. Montazeri**

montazeri@iust.ac.ir

**Dept. of Mechanical Engineering  
Iran University of Science and Technology**

**M. Rezazadeh**

m.rezazade@iut.ac.ir

**Mechanical Engineering Group  
Golpayegan College of Engineering  
Isfahan University of Technology  
DOI:10.24200/J40.2021.54521.1532**

Sharif Mechanical Engineering Journal  
Volume 38, Issue 1, Page 3-12, Original Article

© Sharif University of Technology

- Received 2 May 2021; received in revised form 13 November 2021; accepted 22 November 2021.

### **Abstract**

Hardware-In-the-Loop (HIL) is a kind of simulation in which an actual component of a closed-loop control system is tested within computer-based real-time simulation of the rest of the system. In a conventional HIL simulation, the hardware is an Electronic Control Unit (ECU) in which electronic control signals are communicated between the hardware and the software. But, HIL simulation of a mechanical component, within a closed-loop control system, requires additional sensors and actuators named transfer systems. The transfer systems are used to connect the software and hardware parts. The HIL simulation can achieve unstable behavior or inaccurate results due to unwanted time-delay dynamic of the transfer systems. In this paper, a test bench is implemented for the hardware-in-the-loop simulation of the fuel control unit (FCU) of a gas turbine engine. The FCU is an electro-hydraulic actuator of the fuel control system. In a real engine, the FCU contains a miniature gear-type liquid-fuel pump which is driven at a fraction of the engine rotor speed mechanically by gears. In the HIL simulation, the engine is simulated numerically and an electric motor is employed to drive the pump of the



## Mechanical Engineering

The logo of Sharif University of Technology, featuring the word "Sharif" in a bold, stylized, black font.

Spring  
2022

Editor-in-Chief: Mohammad Taghi Ahmadian

This Journal is published under the auspices of Sharif University of technology, Office of the Vice-Chancellor-in-Charge of Research.

The Journal is published semiannually in Farsi language, aims at establishing a relationship between scientists active in different branches of science and technology and, in particular, at providing a forum for exchange of knowledge between scientists and technologists related to scientific problems prevailing in contemporary society. The journal also strives to present practical and theoretical analyses of these issues and facilitates the circulation of modern scientific findings by scientists and researchers for practical application. In addition, “**Sharif**” publishes original papers focusing on issues of specific concern to universities, including research, technological advancements, and topics related to matters of higher education.

**P.O.BOX 11155-8639 AZADI AVENUE, TEHRAN, I.R. IRAN**

**Phone: (98-21) 66005419 - 66164093 Fax: (98-21) 66012983**

**Web: <http://journal.sharif.ir/> [http:// www. globalsciencejournals.com](http://www.globalsciencejournals.com)**

**E-mail: [pajouhesh@sharif.edu](mailto:pajouhesh@sharif.edu)**

## CONTENTS

- 3    **HARDWARE-IN-THE-LOOP SIMULATION OF A GAS TURBINE ENGINE FUEL CONTROL UNIT USING MODEL-BASED PREDICTOR**  
M. Nasiri, M.Montazeri and M. Rezazadeh
- 13   **NUMERICAL EVALUATION OF THE MECHANICAL PERFORMANCE OF INTELLIGENT ALLOY STENTS UNDER AXIAL LOADING FOR APPLICATION IN PERIPHERAL ARTERY**  
F. Nematzadeh, S.K. Sadrnezhad and M. Seyedsalehi
- 23   **NONLINEAR FINITE ELEMENT ANALYSIS OF SKIN GROWTH USING HYPERELASTIC MEMBRANE MODEL**  
N. Firouzi, F. Dadgar-Rad and S.R. Falahatgar
- 35   **ANALYTICAL SOLUTION OF MASS TRANSPORT EQUATION IN RIVER NETWORK**  
M.J. Fardadi Shilsar, M. Mazaheri and J. Mohammad Vali Samani
- 51   **SIMULTANEOUS ATTITUDE AND BENDING-TORSIONAL-VIBRATION CONTROL OF A SATELLITE WITH MULTI-SECTION FLEXIBLE PANELS USING PDE BASED BOUNDARY CONTROL-OBSERVER**  
M.M. Ataei, H. Nejat Pishkenari and H. Salarieh
- 63   **PROGNOSTICS OF ROLLING BEARINGS USING LSTM NEURAL NETWORK FOR PREDICTING THE TREND OF DEGRADATION SIGNAL**  
M. Behzad, S.A. Hosseinli, H. Addin Arghand and A. Banazadeh
- 73   **ACTIVE FLOW CONTROL IN DARRIEUS WIND TURBINE BLADE USING PLASMA ACTUATOR**  
M. Zare Chavoshi and A. Ebrahimi
- 85   **NUMERICAL INVESTIGATION OF AFFECTING PARAMETERS ON THE THERMAL AND DYNAMIC PERFORMANCE OF A HOT ISOSTATIC PRESSING FURNACE**  
S. Shoaee, M. Bakouei, M.M. Behzadi and M. Taghipoor

## RESEARCH NOTES:

- 99   **NUMERICAL INVESTIGATION ON THE EFFECT OF INCREASING TURBULENCE INTENSITY AND CHANGING THE INJECTION ANGLE ON THE PERFORMANCE AND EMISSION OF CATERPILLAR MARINE DIESEL ENGINE**  
A. Farajollahi and R. Friruzi
- 113   **MODEL DEVELOPMENT FOR STARTUP AND DAMPING OF A STANDING WAVE THERMO-ACOUSTIC ENGINE**  
A. Moradi, F. Ommi, M. Bahrami and Z. Saboohi

## APPENDIX

- 133   **ABSTRACTS OF PAPERS IN ENGLISH**